

> diviseur, notons-le $n^\circ 1$, ne soit pas premier. Puisqu'il n'est pas premier, $n^\circ 1$ est donc divisible par un nombre, $n^\circ 2$, strictement plus petit que $n^\circ 1$ et strictement plus grand que 1. Mais ce $n^\circ 2$ divise $n^\circ 1$ qui lui-même divise le nombre de départ. Donc $n^\circ 2$ divise le nombre de départ. Voilà qui est gênant : deux nombres différents se disputent la place de plus petit diviseur du nombre de départ. Notre hypothèse de départ (le plus petit diviseur n'est pas premier) ne tient pas la route : ce plus petit diviseur est forcément premier.

Nous sommes maintenant en mesure de donner cette recette d'Euclide qui montre que la liste des nombres premiers est inépuisable. Prenons un exemple avec les nombres premiers 2, 3 et 5, et formons le produit $2 \times 3 \times 5$ (sans effectuer le calcul). Ce nombre est divisible par 2, 3 et 5. Maintenant ajoutons 1 : $2 \times 3 \times 5 + 1$. Les deux nombres $2 \times 3 \times 5$ et $2 \times 3 \times 5 + 1$ sont bien consécutifs. D'après la première propriété, ils n'ont donc aucun diviseur en commun si ce n'est 1. Le nombre $2 \times 3 \times 5 + 1$ n'est donc divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Pourtant la deuxième propriété nous dit qu'il possède un diviseur qui est un nombre premier. Nous venons de montrer qu'il se trouve un nombre premier qui est différent de 2, 3 et 5. Inutile de savoir de quel nombre il s'agit : il existe et il est différent des nombres premiers 2, 3, 5 déjà connus, c'est tout ce que l'on voulait.

Voici donc une recette de fabrication d'un nouveau nombre premier à partir de plusieurs autres : prenez plusieurs nombres premiers, multipliez-les entre eux, ajoutez 1 au résultat et vous obtenez un nombre divisible par un nouveau nombre premier différent de ceux du départ. Avec cette recette, la liste des nombres premiers pourra toujours être agrandie : il y a une infinité de nombres premiers.

LE PROBLÈME RESTE ENTIER

La première étape de notre plan, résoudre un problème « facile » est franchie. Passons à la deuxième. Peut-on s'inspirer de cette recette de fabrication de nombres premiers pour en former une qui produise des nombres premiers jumeaux ? Peut-être, mais jusqu'à présent personne n'y est parvenu. Et l'on ignore toujours s'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux.

Après Euclide, d'autres mathématiciens ont produit de nouvelles démonstrations du fait qu'il y a une infinité de nombres premiers. Des chercheurs très inventifs s'en sont inspirés pour essayer de prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux. Cela a débouché sur la construction de théories mathématiques incroyablement élaborées qui n'ont pourtant pas encore permis de résoudre ce problème.

Néanmoins on s'en rapproche... la preuve avec un résultat récent obtenu par les efforts

conjointes de plusieurs chercheurs. Prenez la liste des nombres premiers jumeaux, celle des nombres premiers cousins, celle des sexy et regroupez-les dans une même liste. On n'est pas encore capable de montrer que cette nouvelle liste ne s'arrête pas. Ajoutez les nombres premiers consécutifs distants de 8, puis ceux de 10, puis ceux de 12... jusqu'à ajouter les nombres premiers consécutifs distants de 246. Et bien la liste ainsi obtenue ne se termine pas, on sait maintenant le prouver !

DE 70 000 000 À 246

De façon synthétique, on peut dire qu'il y a une infinité de paires de nombres premiers consécutifs distants d'au plus 246. Ce résultat peut paraître curieux, et peu éloquent. Il est pourtant qualifié d'extraordinaire par les experts des nombres premiers. En fait, il y a encore six ans, personne n'était capable de prouver un résultat de ce type, même en remplaçant 246 par un entier N beaucoup plus grand.

Pourquoi 246 ? Dans un premier temps, en 2013, le mathématicien chinois Yitang Zhang a établi le résultat pour $N = 70\,000\,000$ qui a stupéfait et passionné la communauté mathématique. Pouvaient-on améliorer la preuve d'Yitang Zhang et remplacer 70 000 000 par un nombre bien plus petit ? Plusieurs chercheurs se sont lancés dans l'aventure et ont entamé une collaboration intensive via un forum public de discussion sur Internet. Cette pratique, relativement neuve dans le milieu, avait été conceptualisée et lancée par le mathématicien anglais Tim Gowers sous le nom de *Polymaths*. Chaque projet *Polymath* réunit virtuellement un groupe plus ou moins important de chercheurs intéressés autour d'un problème ouvert bien précis, et pour un laps de temps plus ou moins long. Toute publication qui en résulte est signée sous le pseudonyme collectif D. H. J. Polymath.

Après une succession d'améliorations, une nouvelle percée du jeune mathématicien anglais James Maynard, puis de nouvelles améliorations, le projet *Polymath* $n^\circ 8$ parvint à ce fameux 246. Mais même avec ces progrès extraordinaires, établir la conjecture des nombres premiers jumeaux (ce qui en somme consisterait à remplacer ce 246 par 2) semble hors d'atteinte actuellement aux dires des spécialistes.

Le chemin qui mène à une démonstration de cette conjecture semble donc encore bien long. Et pire encore, une telle preuve, si elle venait à être trouvée, resterait probablement incompréhensible à toute personne n'ayant pas un solide bagage mathématique. Alors que vous veniez juste de vous attaquer au problème avec un papier et un crayon... ■

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques* : <http://images.math.cnrs.fr/> Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. DELAHAYE, *Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique*, Belin, 2013.

M. DU SAUTOY, *La symphonie des nombres premiers*, Seuil, 2007.

J. DERBYSHIRE, *Dans la jungle des nombres premiers*, Dunod, 2007.

POUR LA SCIENCE HORS-SERIE

Edition française de Scientific American

COMPLÉTEZ VOTRE COLLECTION DÈS MAINTENANT!



N° 91 (avr. 16)
réf. DO091



N° 92 (juil. 16)
réf. DO092



N° 93 (oct. 16)
réf. DO093



N° 94 (janv. 17)
réf. DO094



N° 95 (avr. 17)
réf. DO095



N° 96 (août 17)
réf. DO096



N° 97 (nov. 17)
réf. DO097



N° 98 (févr. 18)
réf. DO098



N° 99 (mai 18)
réf. DO099



N° 100 (août 18)
réf. DO100



N° 101 (nov. 18)
réf. DO101



N° 102 (fév. 19)
réf. DO102

RETROUVEZ L'ENSEMBLE DES ANCIENS NUMÉROS SUR BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR/HORS-SERIE.HTML

À retourner accompagné de votre règlement à :

Pour la Science – Service VPC – 19 rue de l'Industrie – BP 90053 – 67402 Illkirch Cedex – email : pourlascience@abopress.fr



OUI, je commande des numéros de Pour la Science Hors-série, au tarif unitaire de 10,90 €.

1 / JE REPORTE CI-DESSOUS LES RÉFÉRENCES à 5 chiffres correspondant aux numéros commandés :

1^{re} réf. _____ 0 1 x 10,90 € = 1 0 9 0 €
 2^e réf. _____ x 10,90 € = _____ €
 3^e réf. _____ x 10,90 € = _____ €
 4^e réf. _____ x 10,90 € = _____ €
 5^e réf. _____ x 10,90 € = _____ €
 6^e réf. _____ x 10,90 € = _____ €

TOTAL À RÉGLER _____ €

Offre valable jusqu'au 31/12/2019 en France Métropolitaine. Pour une livraison à l'étranger, merci de consulter boutique.pourlascience.fr

Les informations que nous collectons dans ce bon de commande nous aident à personnaliser et à améliorer les services que nous vous proposons. Nous les utiliserons pour gérer votre accès à l'intégralité de nos services, traiter vos commandes et paiements, et vous faire part notamment par newsletters de nos offres commerciales moyennant le respect de vos choix en la matière. Le responsable du traitement est la société Pour la Science. Vos données personnelles ne seront pas conservées au-delà de la durée nécessaire à la finalité de leur traitement. Pour la Science ne commercialise ni ne loue vos données à caractère personnel à des tiers. Les données collectées sont exclusivement destinées à Pour la Science. Nous vous invitons à prendre connaissance de notre charte de protection des données personnelles à l'adresse suivante : <https://rebrand.ly/charte-donnees-pls>. Conformément à la réglementation applicable (et notamment au Règlement 2016/679/UE dit « RGPD ») vous disposez des droits d'accès, de rectification, d'opposition, d'effacement, à la portabilité et à la limitation de vos données personnelles. Pour exercer ces droits (ou nous poser toute question concernant le traitement de vos données personnelles), vous pouvez nous contacter par courriel à l'adresse protection-donnees@pourlascience.fr.

2 / J'INDIQUE MES COORDONNÉES

☐ M. ☐ Mme

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal _____ Ville : _____

Téléphone _____

J'accepte de recevoir les offres de Pour la Science ☐ OUI ☐ NON

3 / JE CHOISIS MON MODE DE RÈGLEMENT

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Carte bancaire

N° _____

Date d'expiration _____

Clé (les 3 chiffres au dos de votre CB) _____

Signature obligatoire :

Groupe Pour la Science – Siège social : 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris Cedex 14 – Sarl au capital de 32000 € – RCS Paris B 311 797 393 – Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z



PLUS SIMPLE, PLUS RAPIDE
ABONNEZ-VOUS SUR BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR

L'ESSENTIEL

● La répartition des nombres premiers est un défi pour les mathématiciens. La fonction *zêta* de Riemann apporte des informations sur cette répartition.

● Cette fonction *zêta*, au départ définie pour

une variable complexe s de partie réelle $\text{Re}(s)$ supérieure à 1, peut être prolongée à tout le plan complexe, à l'exception du point $s=1$.

● D'après la conjecture de Riemann, les zéros non triviaux (pour lesquels

la fonction *zêta* s'annule) se trouvent tous sur la droite verticale $\text{Re}(s)=1/2$. Cette conjecture semble vraie, mais reste indémontrée.

● Un million de dollars est promis à qui apportera la preuve de cette hypothèse.

LES AUTEURS



PETER MEIER est assistant à l'Institut de mathématiques de l'université de Würzburg, en Allemagne.



JÖRN STEUDING est professeur à l'Institut de mathématiques de l'université de Würzburg, en Allemagne.

L'hypothèse qui valait un million

La fonction *zêta* de Riemann est la clé de nombreux résultats de la théorie des nombres, notamment sur la répartition des nombres premiers. Mais ces résultats dépendent d'une hypothèse qui, depuis 160 ans, résiste aux assauts des mathématiciens.

L

ors du deuxième Congrès international des mathématiciens, à Paris, en août 1900, le mathématicien David Hilbert dresse une liste de vingt-trois problèmes alors irrésolus. Selon lui, ils montraient la voie vers le xx^e siècle. Où en est-on aujourd'hui? Quelques-uns, environ une dizaine, ont été résolus,

parfois assez rapidement. D'autres ne le sont que partiellement. D'autres encore continuent de résister aux assauts des plus grands mathématiciens. Il en est ainsi du huitième problème qui rassemble trois conjectures portant sur les nombres premiers. L'une d'elles est l'hypothèse de Riemann, et elle semble si difficile qu'elle figure désormais parmi les sept défis mathématiques réputés insurmontables, posés par l'institut de mathématiques Clay en 2000 (un seul a été relevé depuis): chacun est doté d'un prix de un million de dollars pour qui en apportera la preuve... En quoi consiste cette hypothèse?

LE PRINCE IMPRESSIONNÉ

Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) accomplit durant sa courte vie une multitude de prouesses. Il impressionna même le «prince des mathématiques», Carl Friedrich Gauss, par les nouvelles méthodes de nature topologique qu'il introduisit en analyse complexe et par la

La fonction *zêta* de Riemann, ζ , est calculée pour les points du plan complexe $s=x+iy$. Dans le domaine présenté, x varie entre -10 et $+20$ et y entre -15 et $+15$. La valeur $\zeta(s)$ est aussi un nombre complexe de module ρ et d'argument τ : $\zeta(s)=\{\rho, \tau\}$. L'ensemble des valeurs calculées $\zeta(s)$ est représenté comme une surface vue de dessus, chaque point (x, y) ayant comme élévation le module ρ et comme couleur une fonction de l'argument τ . Les zéros (triviaux et non triviaux) sont les creux dans la surface ($\rho=0$) où «convergent» toutes les couleurs (τ est indéterminé).