

L'étendre à une grande variété de structures dans les espaces hyperboliques de dimension 3 (des espaces de courbure négative généralisant le disque hyperbolique) et au-delà. En construisant le perfectoïde d'un espace hyperbolique de dimension 3, Scholze a découvert une série complètement nouvelle de lois de réciprocités.

«Les travaux de Peter ont complètement transformé ce qui est possible, et ce à quoi nous avons accès», explique Ana Caraiani. Pour Jared Weinstein, les résultats de Peter Scholze montrent que le programme Langlands est «bien plus profond que ce que nous pensions... il est plus systématique et partout présent.»

Discuter de mathématiques avec Peter Scholze, c'est comme consulter un «oracle de la

vérité», selon Jared Weinstein. «S'il dit que quelque chose va marcher, vous pouvez être confiant. S'il dit non, vous devriez abandonner tout de suite; et s'il ne sait pas – ce qui peut arriver –, vous êtes chanceux, car alors, vous avez entre les mains un problème très intéressant.»

Pourtant, collaborer avec lui n'est pas une expérience aussi intense qu'on pourrait le croire, explique Ana Caraiani. Quand elle travaillait avec lui, il n'y avait jamais de précipitation. «J'avais le sentiment qu'on faisait toujours ce qu'il fallait de la bonne façon – nous prouvions les théorèmes les plus généraux possible, le mieux possible, grâce à des constructions qui permettraient d'éclairer les choses.»

MATHS ET PATERNITÉ

Toutefois, en une occasion, Peter Scholze a effectivement travaillé dans la précipitation: en 2013, il essayait de finir un article à temps avant la naissance de sa fille. Pour lui, c'est une bonne chose qu'il se soit dépêché. «Je n'ai pas fait grand-chose après.» Devenir père l'a poussé à se discipliner dans la gestion de son temps, explique-t-il. Mais il n'a pas de problème pour trouver du temps dévolu à la recherche – les mathématiques remplissent simplement tous les moments libres entre ses autres obligations. «Les mathématiques sont ma passion. J'y pense sans cesse.»

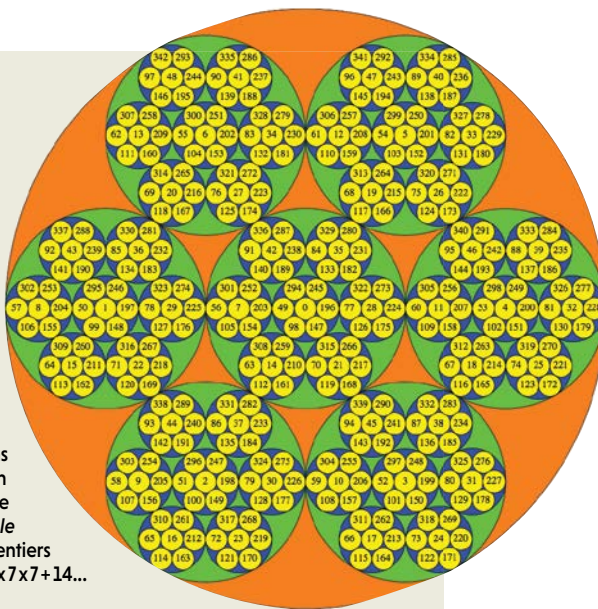
Pour autant, il ne souhaite pas tellement s'étendre sur cette passion. Quand on lui demande s'il était fait pour devenir mathématicien, il dément: «C'est une idée bien trop philosophique.» Plutôt secret, il n'est pas très à l'aise avec sa célébrité. En 2016, il est devenu le plus jeune lauréat du prix Leibniz, la plus haute distinction scientifique en Allemagne, qui s'accompagne d'une bourse de recherche de 2,5 millions d'euros pour les sciences expérimentales, et 900 000 euros pour les théoriciens. «Parfois, c'est un peu accablant», confie-t-il.

Peter Scholze continue d'explorer les espaces perfectoïdes, mais il s'est aussi ouvert à d'autres domaines des mathématiques et touche à la topologie algébrique, qui utilise l'algèbre pour étudier la forme des objets. «L'année dernière, Peter est devenu maître du sujet. Il a changé la façon dont les experts l'abordent», explique Bhargav Bhatt.

Selon lui, quand Peter Scholze s'intéresse à leur domaine, cela peut être effrayant, mais aussi excitant pour les autres mathématiciens. «Cela signifie que le sujet va avancer rapidement. Je suis très enthousiaste à l'idée qu'il travaille sur un domaine proche du mien, puisque je peux assister au recul des frontières de nos connaissances.»

Toutefois, pour Peter Scholze, ces travaux jusqu'à maintenant ne sont qu'un échauffement. «Je suis encore dans une phase où j'essaie d'apprendre ce qui existe, en le reformulant à ma manière», se confie-t-il. «Je n'ai pas le sentiment d'avoir vraiment commencé mes recherches.» ■

Les nombres 7-adiques (ici, les $7 \times 7 \times 7 = 343$ premiers) sont arrangés de façon fractale révélant leur proximité (une notion qui a ici un sens différent de celui qu'on lui prête d'habitude). Dans le disque bleu central, on distingue les multiples de $7 \times 7 = 49$, entourés (dans le disque vert central) des entiers de la forme $n \times 7 \times 7 + 7$, $n \times 7 \times 7 + 14 \dots$



Les fonctions de cette classe (dites méromorphes) sont complètement décrites par la suite de leurs coefficients $a_{-n}, a_{-(n-1)}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$

L'addition et la multiplication de telles fonctions peuvent s'exprimer par l'intermédiaire de ces coefficients. En principe, ces coefficients sont des nombres complexes, mais rien n'empêche d'utiliser à leur place des nombres d'un autre corps. Dans le cas qui nous intéresse, le corps s'appelle $\mathbb{F}_p$: il comprend les nombres $0, 1, \dots, p-1$, avec lesquels on calcule «modulo p », c'est-à-dire que l'on commence par les ajouter ou les multiplier de la façon habituelle, puis on prend le reste de leur division euclidienne par p . Les questions de convergence et de différentiabilité, qui jouent un rôle central en analyse complexe, sont devenues sans objet lors du passage vers le corps fini $\mathbb{F}_p$, voire même plus du tout formulables. Mais par les «séries de Laurent formelles sur $\mathbb{F}_p$ », on obtient une nouvelle structure de corps pour le même ensemble, qui formait déjà le corps $\mathbb{Q}_p$.

En interprétant le même objet d'une part comme un élément de l'un des corps, et d'autre part comme un élément de l'autre corps, on aboutit à des résultats de très grande portée. C'est de cette astuce que le concept d'espace perfectoïde développé par Peter Scholze tire toute sa puissance.

CHRISTOPHE PÖPPE (SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT),
TRADUIT PAR NILS BERGLUND, DE L'INSTITUT
DENIS-POISSON, À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

L'ESSENTIEL

- L'Indo-Australien Akshay Venkatesh a reçu en 2018 une médaille Fields.
- Malgré un passé brillant, il ne s'est épanoui dans la recherche en mathématiques que tardivement.
- Il s'est illustré dans l'étude de la subconvexité, un problème

lié aux généralisations de la fonction ζ de Riemann, en inventant des méthodes radicalement nouvelles.

- Il explore aujourd'hui des liens nichés au cœur du programme de Langlands, qui relie théorie des nombres, géométrie et analyse.

L'AUTEURE



ERICA KLARREICH
docteure en mathématiques de l'université Stony Brook, dans l'État de New York. Elle contribue régulièrement au magazine *Quanta*.

Un mathématicien bâtisseur de ponts

Akshay Venkatesh, lauréat en 2018 de la médaille Fields, n'aime rien tant que se perdre dans des contrées mathématiques inexplorées, peu balisées, en quête de liens cachés entre différents domaines. Et il en trouve !



Cet article a d'abord été publié en anglais par *Quanta Magazine*, une publication en ligne indépendante soutenue par la *Simons Foundation* afin de favoriser la diffusion des sciences : <http://bit.ly/QM-Venka>

P

ar un après-midi de mai, sur l'aire de jeu du campus de l'Institut d'études avancées, à Princeton, aux États-Unis, le mathématicien Akshay Venkatesh poussait sa petite fille de 4 ans sur la balançoire (son autre fille, 7 ans, se promenait avec ses amis) tout en méditant sur le mythe du génie.

« Ce stéréotype ne rend pas service à la discipline, explique-t-il. Je pense qu'il ne reflète pas les diverses façons par lesquelles on peut contribuer aux mathématiques. »

Venant de l'université Stanford, en Californie, à l'autre bout des États-Unis, Akshay Venkatesh a séjourné pendant un an à Princeton, en tant que professeur visiteur. Depuis août 2018, il y est devenu permanent, ajoutant son nom à une longue liste de résidents prestigieux : Albert Einstein, Kurt Gödel et quelques titulaires de la médaille Fields.

Coincidence. Akshay Venkatesh s'est vu décerner cette médaille, la plus haute distinction en mathématiques. Il est honoré pour ses « contributions majeures à un éventail exceptionnellement vaste de sujets en mathématiques » et



ses «conjectures d'une portée surprenante». Ses idées sont «une vaste expansion de l'imagination», confirme Michael Harris, mathématicien à l'université Columbia.

Akshay Venkatesh, à Princeton.

UN GÉNIE DANS LA TOURMENTE

Toutefois, alors qu'Akshay Venkatesh était encore étudiant, au tournant des années 2000, le mythe du génie a failli faire dérailler sa carrière. Sa précocité (il avait intégré l'université à 13 ans) était pourtant de bon augure. Mais à son arrivée à Princeton à l'âge de 17 ans, en tant qu'étudiant de master, Akshay Venkatesh fut surpris par «le grand nombre de personnes douées pour apprendre ou résoudre des problèmes rapidement, des caractéristiques que l'on attribue d'ordinaire qu'aux seuls mathématiciens».

Avec ses voies sinueuses et ses impasses, la recherche en mathématiques était très différente de ce à quoi excellait l'étudiant Akshay Venkatesh, lorsqu'il s'agissait de s'atteler à des problèmes bien circonscrits et aux conclusions déjà connues. Habitué à faire partie des meilleurs, il trouvait ses travaux médiocres. Discrètement, il a alors commencé à réfléchir à une échappatoire, acceptant même un travail d'été dans la *start-up* de son oncle, spécialisée dans le *machine learning*.

Une proposition exceptionnelle se présente alors : un poste prestigieux d'enseignant «C. L. E. Moore» à l'Institut de technologie du Massachusetts, à Cambridge. De toute évidence, on l'avait fortement recommandé, mais pourquoi ? Alors qu'il l'interrogeait à ce sujet, Jordan Ellenberg, un ami et collègue du mathématicien, >

➤ lui a répondu: «Parfois, les gens voient en toi des choses que tu ne vois pas.» Akshay Venkatesh a été profondément marqué par ces mots.

Aujourd'hui, à 37 ans, Akshay Venkatesh semble avoir oublié ses hésitations et a acquis l'aisance de quelqu'un parfaitement en harmonie avec ses choix de vie. Mais cela lui a pris de nombreuses années pour voir ce que d'autres mathématiciens voyaient en lui depuis longtemps.

La plupart des mathématiciens ont des difficultés à décrire l'éventail complet des contributions mathématiques d'Akshay Venkatesh. Il construit des ponts entre la théorie des nombres et des champs plus éloignés comme la topologie algébrique et les systèmes dynamiques. Il est connu pour arriver dans un domaine, le transformer, puis passer à autre chose.

«On dit toujours qu'il n'y plus de mathématicien universel, parce que ce serait trop difficile», explique Emmanuel Kowalski, de l'École polytechnique fédérale de Zürich, en Suisse. Mais, selon lui, l'esprit d'Akshay Venkatesh «peut réfléchir sur tous les sujets».

UNE LONGUE MATURATION

Akshay Venkatesh est prêt à tout pour cacher son passé de prodige. «Je vous paierai pour ne rien en mentionner, plaisante-t-il. Je laisserais bien volontiers cette histoire derrière moi, c'est un peu comme si j'étais la star d'un spectacle de monstres.»

Toutefois, en grandissant à Perth, en Australie, où ses parents se sont installés après avoir quitté New Delhi quand il avait deux ans, Akshay Venkatesh ne se sentait pas «monstrueux». Il décrit son enfance comme une «vie de banlieue assez normale», remplie de livres (essentiellement de science-fiction) et d'amitié. Il a participé aux Olympiades de mathématiques et de physique – les plus importantes compétitions internationales pour lycéens – et a remporté des médailles dans les deux matières, respectivement à 11 et 12 ans. Mais il accorde plus de valeur aux amitiés forgées à cette époque qu'à ses succès. «Avec du recul, je ne suis pas fan de ces concours, concède-t-il. Je pense que si les mathématiciens ne faisaient vraiment que ça, je n'apprécierai pas d'en être un.»

Les mathématiques sont un domaine relativement simple où l'on peut progresser rapidement, car elles ne nécessitent pas une grande expérience de la vie. Après son diplôme de mathématiques de premier cycle (avec la meilleure mention possible), à l'université d'Australie Occidentale, à Perth, à l'âge de 16 ans, Akshay Venkatesh a poursuivi sur sa lancée en deuxième et troisième cycles sans trop y réfléchir. Mais il

Lorsqu'il se sentait découragé, Akshay Venkatesh se plongeait dans des manuels de mathématiques

ne voit aucune forme de prédestination dans son choix. «J'aurais été tout aussi heureux en faisant autre chose», déclare-t-il.

À l'université de Princeton, tout le monde, excepté lui, s'est rapidement rendu compte de son talent. Tony Wirth, son colocataire de l'époque, se rappelle que, lorsqu'il lui a montré son manuel d'informatique théorique, Akshay Venkatesh en a instantanément compris les concepts fondamentaux. «Vous savez que vous avez à faire à un grand esprit lorsqu'il peut comprendre en profondeur un nouveau domaine en seulement quelques minutes.»

Quand Akshay Venkatesh a rendu visite à son directeur de thèse, Peter Sarnak, pour lui demander des références bibliographiques, ce dernier a décidé de le mettre à l'essai avec un livre sur la théorie de la représentation des groupes semi-simples, un sujet ardu en début de parcours. Peter Sarnak s'attendait à ce que l'adolescent revienne rapidement demander

quelque chose de plus simple. Mais il se rappelle que, un mois plus tard, «il s'est présenté dans mon bureau pour m'expliquer ce qu'il avait lu, et il était clair pour moi que, en plus d'avoir compris son sujet, il en avait une intuition extraordinaire.»

Akshay Venkatesh «a toujours eu des idées remarquables», se rappelle Peter Sarnak, qui travaille désormais lui aussi à l'Institut d'études avancées. «De toute évidence, ce n'était qu'une question de temps avant qu'il se mette à raisonner de manière iconoclaste.»

Intérieurement, toutefois, Akshay Venkatesh luttait. «Je n'ai pas le sentiment d'avoir été heureux lorsque j'étudiais», concède-t-il. Il se sentait troublé, car l'une des idées majeures de sa thèse avait été suggérée par son directeur, Peter Sarnak, même si cela n'était pas rare. «Je n'avais pas l'impression d'avoir apporté quoi que ce soit d'original, se rappelle-t-il. Je pense qu'en sortant de ce cycle d'études, je ne m'estimais pas apte à faire de la recherche.»

Lorsqu'il se sentait découragé, Akshay Venkatesh se plongeait dans des manuels de mathématiques, souvent sur des sujets éloignés de son propre domaine. «C'est ce qui m'a toujours donné la force de continuer, même quand mes propres travaux n'aboutissaient pas. Je lis quelque chose d'inconnu et je me dis "ça, c'est vraiment merveilleux".»

Tout au long de ses années d'études, il a absorbé de grandes quantités de mathématiques. Ce n'était pas une stratégie, mais il en résulte une vue d'ensemble qui lui permet maintenant de découvrir des relations que d'autres mathématiciens ont manquées.

Avec le temps, Akshay Venkatesh a compris que ses difficultés prenaient leurs

racines dans le fait qu'il ignorait quel genre de mathématicien il était. Contrairement à d'autres, qui travaillent intensément sur un projet et le terminent en quelques mois ou en une année, il s'est rendu compte que ses idées se développaient plus lentement, sur de longues durées. «Je me rendais compte que des idées anciennes revenaient après avoir mûri, parce qu'entre-temps j'avais découvert d'autres notions, explique-t-il. Je ne me serais jamais décrit comme une personne patiente, mais c'est ainsi.»

L'ESSENCE DES CHOSES

N'ayant pas encore eu cette prise de conscience à sa sortie de doctorat en 2002, Akshay Venkatesh avait hâte de faire ses preuves. Une collaboration avec Jordan Ellenberg lui en a alors donné l'opportunité. Ensemble, ils se sont mis à compter les «extensions du corps des nombres», la plus simple étant construite par l'addition aux nombres rationnels d'une poignée de nombres irrationnels satisfaisant certaines équations polynomiales. Ces systèmes de nombres «deviennent un peu irrationnels, mais pas trop», explique Jordan Ellenberg, désormais professeur à l'université du Wisconsin, à Madison.

Il existe une infinité d'extensions du corps des nombres, mais il y a un moyen naturel de mesurer la complexité de chacune d'elles, et

il s'agit alors de compter combien de ces extensions se trouvent en dessous de chaque niveau de complexité. Akshay Venkatesh et Jordan Ellenberg ont déterminé une nouvelle limite supérieure à ces chiffres, laquelle a amélioré considérablement la technique, qui n'avait pas changé depuis des décennies. Selon Akshay Venkatesh, ce projet «était psychologiquement très important». «On s'est attaqué à ce problème par nous-mêmes et nous avons beaucoup progressé.»

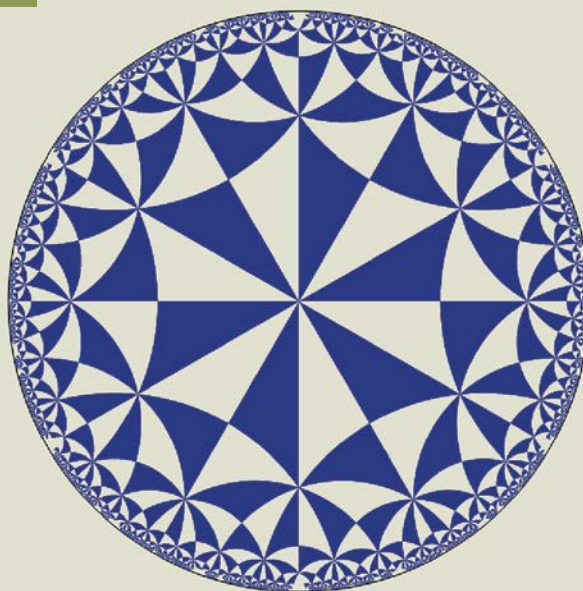
À l'origine, les deux amis se sont intéressés au problème en utilisant de nouveaux outils mathématiques dont ils avaient entendu parler lors d'une conférence. Mais, tandis qu'ils travaillaient à améliorer leur preuve, ils se sont rendu compte qu'ils avaient simplifié tous les nouveaux outils.

«Cela correspond tout à fait à ce que je reconnais aujourd'hui comme étant très caractéristique d'Akshay», explique Jordan Ellenberg. La première version, plus technique, de leur article a permis de prouver leur théorème. Mais pour Akshay Venkatesh, «la question n'est pas tant de savoir si vous avez répondu à la question ou prouvé le théorème. Il s'agit de savoir si on a vraiment compris de quoi il retourne».

Outre Jordan Ellenberg, de nombreux mathématiciens sont frappés par la capacité d'Akshay Venkatesh à distiller les idées jusqu'à ➤

LA SUBCONVEXITÉ

En 1859, le mathématicien Allemand Bernhard Riemann a défini la fonction *zêta* (une fonction de nombres complexes s de la forme $a + bi$, où $i^2 = -1$) qui s'exprime ainsi : $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s \dots$. Selon lui, tous ces «zéros non triviaux» de cette fonction (les valeurs qui annulent la fonction) sont placés le long d'une droite (une ligne critique) correspondant aux nombres complexes pour lesquels $\sigma = 1/2$. Les fonctions L sont des généralisations de la fonction *zêta* de Riemann où les numérateurs 1 sont remplacés par une séquence de nombres complexes. La subconvexité est liée à la taille de ces fonctions L , plus précisément à la limite supérieure de cette taille le long d'une ligne critique. Akshay Venkatesh explique avoir compris les fonctions L grâce à la géométrie hyperbolique dont un modèle en deux dimensions est le disque de Poincaré (voir la figure ci-contre), sources d'inspiration de l'artiste néerlandais Maurits Cornelis Escher. On observe que la somme des angles des triangles qui pavent le plan est, en géométrie hyperbolique, inférieure à 180° . Akshay Venkatesh étudie ces pavés grâce aux formes automorphes, des versions généralisées de fonctions périodiques, par exemple sinusoïdales. Elles relèvent de l'analyse harmonique où l'on s'intéresse, entre autres, aux... billards parfaits. En s'intéressant à la trajectoire d'une boule sur un billard ayant la forme d'un triangle hyperbolique, on tisse des liens inattendus entre géométrie et théorie des nombres. Ce sont ces liens que Akshay Venkatesh explore.



Le disque de Poincaré est une représentation en deux dimensions de la géométrie hyperbolique. La somme des angles d'un triangle y est inférieure à 180° .

> leur essence. «Lorsqu'il a terminé, sa preuve se retrouve souvent dans tous les manuels», explique Peter Sarnak.

«Il n'est pas rare, en mathématiques, que des personnes viennent m'expliquer la bonne façon de raisonner à propos d'une notion, explique Frank Calegari, de l'université de Chicago. Mais Akshay est l'une des seules personnes à l'avoir fait pour mes propres travaux.»

Peu après ses résultats sur les extensions du corps des nombres, Akshay Venkatesh a obtenu son premier «fait d'armes», le problème de la subconvexité (voir l'encadré page précédente). Il concerne les généralisations de la fonction zêta de Riemann (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68), nommées fonctions L. En 1859, Bernhard Riemann a proposé que les valeurs pour lesquelles une certaine fonction zêta s'annule aideraient à comprendre la répartition des nombres premiers. Mais personne n'est parvenu à le prouver. L'hypothèse de Riemann, qui a des centaines d'implications en dehors de la distribution des nombres premiers, est l'un des problèmes les plus importants en mathématiques.

Chaque fonction L a sa propre version de l'hypothèse de Riemann, toutes aussi difficiles à prouver que la version princeps. Pendant des décennies, les mathématiciens ont donc cherché à les contourner pour prouver directement certaines de leurs conséquences. L'une des plus importantes a trait à la subconvexité, un problème lié à la taille des fonctions L. À la clé, des informations sur les nombres entiers, par exemple sur les façons dont un grand nombre donné peut être écrit sous la forme de la somme de trois carrés parfaits.

Avant que Akshay Venkatesh ne se tourne vers les fonctions L, les solutions de subconvexité relevaient du cas par cas et faisaient souvent l'objet de longs articles techniques, explique Emmanuel Kowalski. Mais en 2004, Akshay Venkatesh a envoyé le premier jet d'un long papier à Philippe Michel, un spécialiste de la subconvexité aujourd'hui à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Dans son article, Akshay Venkatesh utilise des idées issues des systèmes dynamiques pour résoudre le problème de la subconvexité de façon bien plus générale que ce qui avait été accompli auparavant. «La méthode était complètement nouvelle, explique Philippe Michel. Ce fut un choc.»

Akshay Venkatesh et Philippe Michel ont fait équipe à l'occasion d'une seconde publication, basée sur cette nouvelle approche. Les deux papiers, avec d'autres, «ont fait de lui l'un des leaders mondiaux en théorie et en dynamique des nombres», estime Peter Sarnak.

Collaborer avec Akshay Venkatesh pourrait paraître intimidant, étant donné sa grande connaissance et la profondeur de ses idées. Ce

n'est pas le cas. «Il est très fort techniquement, mais on n'est pas écrasé en discutant avec lui, déclare Yiannis Sakellaridis, de l'Université Rutgers, à Newark. On parle simplement de l'essence des choses.»

Lorsque j'ai rencontré Akshay Venkatesh, nous nous sommes promenés de son bureau jusqu'au jardin d'enfants de l'institut pour récupérer sa plus jeune fille, Tuli, puis nous nous sommes rendus à leur appartement. Tara, l'aînée, nous a rejoints peu après. Il était seul à la maison, car sa femme, Sarah Paden, qui termine sa thèse en musicologie à l'université de Princeton, était à une réunion.

Akshay Venkatesh est toujours un grand lecteur. Ces temps-ci, il relit *Guerre et Paix*. L'écriture est aussi exceptionnelle que dans son souvenir, mais elle «est parsemée de passages didactiques que je trouve plus ennuyeux maintenant», dit-il.

DU CAFÉ, MAIS PAS TROP

Sarah Paden décrit son mari comme quelqu'un de casanier: «La routine, les habitudes et son foyer sont des réconforts pour lui». Ils lui offrent la liberté dont il a besoin, estime-t-elle, pour être plus audacieux dans le monde des mathématiques. «J'ai le sentiment qu'il n'est pas le même dans son travail qu'à la maison.»

La simplicité de la vie à Princeton en fait un environnement idéal pour Akshay Venkatesh. Il y a du café – l'un de ses petits plaisirs – au bout du couloir et à la cafétéria. Cependant, il s'astreint à ne pas en abuser. Son bureau dispose d'un luxe rare: un deuxième tableau noir, couvert de pense-bêtes («visa pour le Brésil», «chapitre XIII») et de formules mathématiques.

Akshay Venkatesh est à la fois surpris d'avoir remporté la médaille Fields et anxieux quant à l'exposition subite de sa carrière qu'elle implique. Étudiant, il s'était penché sur les travaux de nombreux lauréats qui l'ont précédé, se rappelle-t-il. «C'est difficile d'imaginer que j'en fais désormais partie.» Il ne sait pas quoi penser des prix en général, puisqu'ils contribuent à renforcer le mythe du génie solitaire. «Et j'en ai sûrement reçu plus que nécessaire», estime-t-il.

Il était particulièrement surpris de remporter la médaille Fields parce qu'une grande partie de ses travaux récents ne sont que des conjectures. Or la récompense est habituellement décernée à des personnes qui ont résolu de grands problèmes. «Mon travail n'est pas de cette nature», explique-t-il.

Ce sont ses travaux récents et hautement spéculatifs qui le rendent le plus heureux. Ils concernent le programme de Langlands, un vaste réseau de connexions entre théorie des nombres, géométrie et analyse. Au cœur de ce programme se trouve un lien – encore flou – entre des formes qui apparaissent dans deux contextes différents. D'un côté, on trouve

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, *Annals of Mathematics*, vol. 182, pp. 945-1066, 2015.

A. VENKATESH, *Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity*, *Annals of Mathematics*, vol. 172, pp. 989-1094, 2010.

P. MICHEL ET A. VENKATESH, *The subconvexity problem for GL_2* , *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 111, pp. 171-271, 2010.



© Sasha Maslov/Quanta magazine

des « motifs », des formes reliées aux ensembles de solutions des équations polynomiales (de la même façon qu'un cercle représente les solutions à l'équation $x^2 + y^2 = 1$).

PAVÉS ET TORSION

De l'autre, des formes obtenues par le collage des côtés d'un « pavé », comme le tore l'est à partir d'un carré. Cependant, les « pavés » requis par le programme de Langlands sont moins simples et évoquent plus les compositions d'Escher. L'une des correspondances de ce type est au cœur de la preuve du dernier théorème de Fermat, fournie en 1994 par Andrew Wiles (voir *Le tombeur de Fermat*, par G. Giorrello, page 98).

Parfois, les pavés collés ont subi une torsion indétectable par les méthodes classiques du programme de Langlands. Quand Akshay Venkatesh entend parler de cette torsion, il est « convaincu qu'il y a quelque chose d'important à découvrir ». En 2009, Akshay Venkatesh et Nicolas Bergeron de l'université Pierre-et-Marie-Curie, à Paris, ont montré que la torsion est fréquente dans les pavés collés prévus dans les correspondances de Langlands.

Étonnamment, un des principaux résultats de Peter Scholze, autre médaillé Fields de la même « promotion » que Akshay Venkatesh (voir *L'oracle de l'arithmétique*, par E. Klarreich, page 84), a été de montrer que des classes de telles torsions sont justement associées à des « motifs », au sens décrit précédemment.

Akshay Venkatesh, dans le parc de l'Institut d'études avancées, à Princeton, avec un café, son pêché mignon.

Ces dernières années, avec des collègues, Akshay Venkatesh a exploré d'autres caractéristiques de ces torsions, « mathématiquement plus profondes, mais moins visibles ». « Le programme de Langlands fourni une sorte de dictionnaire pour passer d'un objet à l'autre, déclare Frank Calegari. Akshay nous dit qu'il y a quelque chose d'encore plus précis. » Pour le moment, Akshay Venkatesh n'a prouvé qu'une infime partie de ses conjectures globales. « Mais au moins j'arrive à mieux voir ce qui devrait être vrai », dit-il.

Ce genre d'investigation, qui s'apparente à l'exploration d'un paysage flou, constitue ce qui lui convient le mieux. Plus tôt dans sa carrière, lorsqu'il ressentait le besoin d'impressionner les autres, il travaillait sur des problèmes déjà balisés, le laissant en partie insatisfait. Il a depuis découvert la sensation d'être sur la piste de « quelque chose d'intéressant qui n'a pas encore été exploré, ou quelque chose d'anormal qui n'a pas beaucoup de sens ».

À Princeton, Akshay Venkatesh et Yiannis Sakellaridis ont travaillé sur deux problématiques distinctes : l'une concernant les fonctions L et l'autre étant une extension des travaux récents d'Akshay Venkatesh sur le programme de Langlands. Étrangement, ces deux thèmes semblent converger vers une même question. « C'est un très bon signe estime-t-il. Je ne sais pas exactement où cela va nous mener. Mais quelque chose nous attend au bout de ce chemin, c'est certain. » À suivre donc! ■

CÉDRIC
VILLANI

© Marie-Lan Nguyen / Wikimedia Commons / CC-BY 3.0

« Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat »

Pourquoi l'énoncé de Fermat, qui est simple et anodin en apparence, a-t-il acquis une telle célébrité ?

Cédric Villani : Il y a tout d'abord le contraste entre le côté élémentaire de cet énoncé du XVII^e siècle et la difficulté extrême de sa preuve que moi-même, par exemple, serais incapable de comprendre en détail sans avoir fait trois ou quatre années d'études préalables. L'énoncé de Fermat (quel que soit l'entier n supérieur à 2, il n'existe pas d'entiers positifs a , b et c tels que $a^n + b^n = c^n$) a attiré une multitude de mathématiciens amateurs, qui rêvaient de pouvoir entrer dans l'histoire en trouvant, un peu sur un coup de chance, une preuve. C'est encore le cas aujourd'hui, avec des gens persuadés qu'il existe une démonstration beaucoup plus simple que celle d'Andrew Wiles. Et au fil des siècles, plusieurs mathématiciens éminents ont, au détour de

BIO EXPRESS

1973

Naissance à Brive-la-Gaillarde, en Corrèze.

2009

Directeur de l'institut Henri-Poincaré.

2010

Lauréat de la médaille Fields.

2017

Député (LREM) de l'Essonne.

leurs travaux, prouvé le théorème de Fermat pour des valeurs particulières de l'exposant n . Un autre élément d'attrait est l'anecdote historique avec, en particulier, l'erreur ou le bluff de Fermat qui, dans la marge d'un livre, a écrit avoir découvert une démonstration merveilleuse, mais trop longue pour figurer dans cette marge. Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat, et il est haut en couleur !

Le « grand théorème de Fermat » est-il important pour la théorie des nombres ?

Cédric Villani : En soi, non. Ce théorème a ici et là quelques conséquences, mais les méthodes développées pour le démontrer sont de loin plus importantes