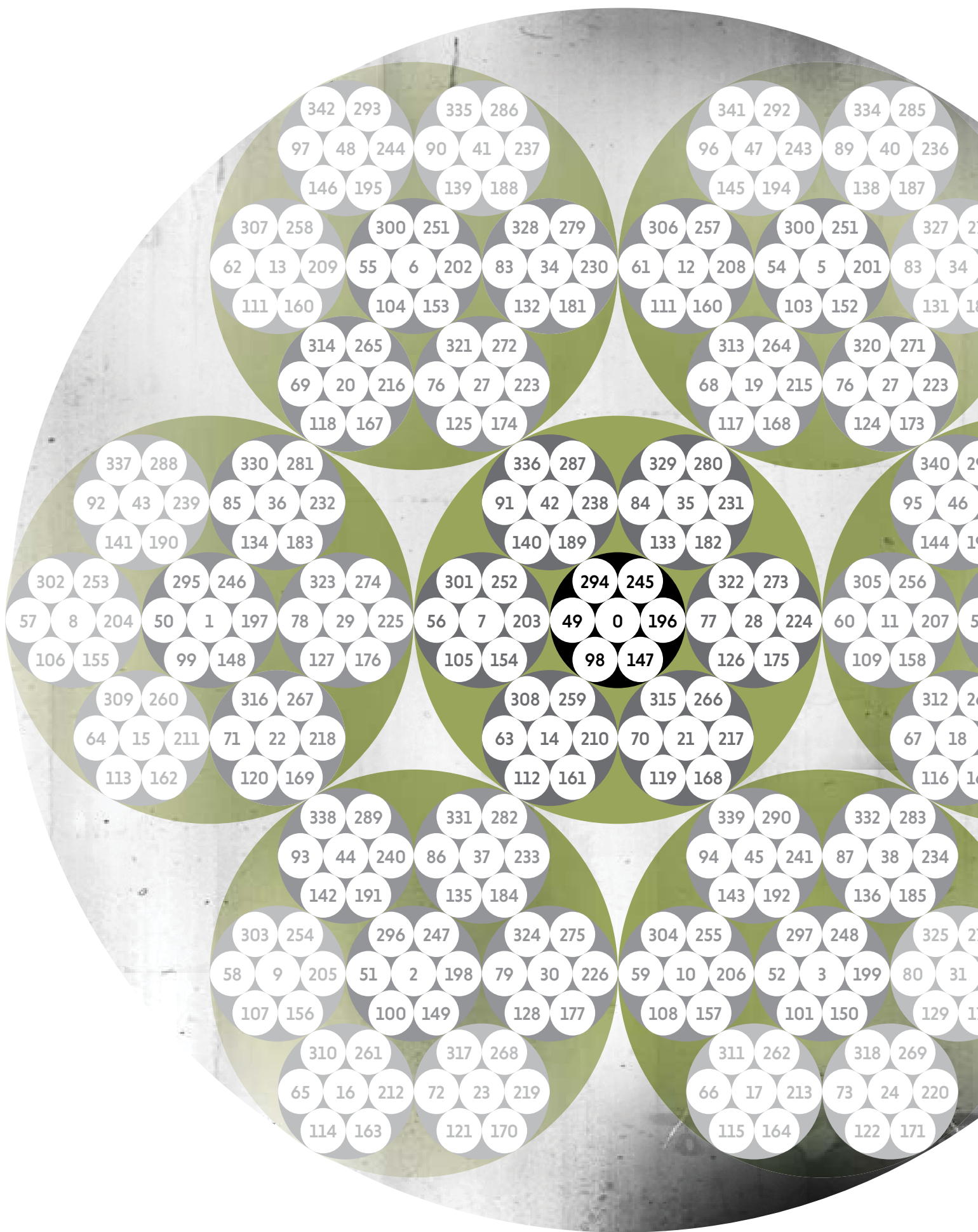






DES HOMMES ET DES NOMBRES

Parmi les résultats les plus importants obtenus en mathématiques ces dernières années, beaucoup concernent la théorie des nombres. Et derrière ces exploits se cachent des mathématiciens aux tempéraments variés, aux approches différentes... Mais tous ont en commun d'avoir pris à bras-le-corps des problèmes ardues et de les avoir explorés de façon nouvelle. Avec à la clé, pour ces hommes de nombres, les récompenses les plus prestigieuses, comme la médaille Fields ou le prix Abel.

Les nombres 7-adiques
(ici, les $7 \times 7 \times 7 = 343$ premiers)
sont arrangés de façon fractale
révélant leur proximité (cette notion
prend un sens différent de celui
qu'on lui connaît habituellement).
Dans le disque noir central,
on distingue les multiples
de $7 \times 7 = 49$, puis dans les disques
autour les entiers de la forme
 $n \times 7 \times 7 + 7$, $n \times 7 \times 7 + 14$...



Peter Scholze, avec sa médaille Fields qu'il vient de recevoir.

© Picture Alliance/Getty Images

L'ESSENTIEL

● Peter Scholze, mathématicien allemand d'à peine 30 ans, a reçu la médaille Fields en 2018.

● Il a été récompensé notamment pour

les espaces perfectoïdes, des objets mathématiques construits à partir des nombres p -adiques, une extension abstraite des nombres naturels arithmétiques.

● Ces espaces permettent de transposer des problèmes complexes dans des domaines où l'arithmétique est bien plus simple.

L'AUTEURE



ERICA KLARREICH
docteure en mathématiques de l'université Stony Brook, dans l'État de New York, elle contribue régulièrement au magazine *Quanta*.

L'oracle de l'arithmétique

Peter Scholze fut l'un des quatre lauréats de la médaille Fields en 2018, la plus prestigieuse récompense en mathématiques. Avec le concept de perfectoïde, il a mis au jour des liens profonds entre la théorie des nombres et la géométrie.

avait réussi à contourner l'une des parties les plus compliquées de la démonstration, celle ayant trait à une connexion générale entre la théorie des nombres et la géométrie.

UNE LEÇON D'HUMILITÉ

«C'était incroyable qu'un résultat aussi révolutionnaire vienne de quelqu'un d'aussi jeune, s'enflamme Jared Weinstein, théoricien des nombres à l'université de Boston, âgé de 38 ans. Ce fut une sacrée leçon d'humilité!»

À l'université de Bonn, qui proposa à Peter Scholze un poste de professeur à peine deux ans plus tard, les mathématiciens avaient déjà perçu ses extraordinaires capacités. Après son article sur les travaux de Harris et Taylor, c'est l'ensemble des experts en théorie des nombres et en géométrie qui en fut convaincu.

Depuis, Peter Scholze s'est fait un nom dans la communauté des mathématiciens tout entière. Certains disent déjà de lui qu'il est «un des mathématiciens les plus influents du monde» et «un talent rare qui n'émerge que toutes les quelques décennies». De fait, il a reçu en août 2018 la médaille Fields, la plus prestigieuse récompense en mathématiques, décernée tous les quatre ans lors du Congrès international des mathématiciens.

L'innovation majeure de Peter Scholze – une classe de structures fractales qu'il appelle les espaces perfectoïdes – n'a que quelques années d'existence, mais elle a déjà de vastes ramifications en géométrie arithmétique, un domaine où la théorie des nombres et la géométrie se rejoignent. «Dans ses travaux, Peter Scholze fait preuve de "prescience", admire Jared Weinstein: il peut voir les développements avant même qu'ils ne se produisent.» >



Cet article a d'abord été publié en anglais par *Quanta Magazine*, une publication en ligne indépendante soutenue par la *Simons Foundation* afin de favoriser la diffusion des sciences : <http://bit.ly/QM-Scholze>

E

n 2010, une rumeur étonnante circule au sein de la communauté des théoriciens des nombres. Un étudiant de l'université de Bonn, en Allemagne, aurait publié un article qui redémontrait une conjecture impénétrable en théorie des nombres en seulement 37 pages, là où les deux mathématiciens Michael Harris et Richard Taylor avaient eu besoin de 288 pages. À 22 ans, Peter Scholze, l'étudiant en question,

Face aux découvertes de Peter Scholze, beaucoup de mathématiciens réagissent avec «un mélange d'admiration, de peur et d'euphorie», explique Bhargav Bhatt, de l'université du Michigan. Sa personnalité n'est pas en cause, car il est unanimement reconnu comme quelqu'un de généreux. «Il ne vous prend jamais de haut», confie Eugen Hellmann, à l'université de Bonn.

Le plus déconcertant est sa vision en profondeur de la nature des phénomènes mathématiques. Contrairement à la plupart de ses confrères, il commence rarement à réfléchir à un problème particulier. Il privilégie plutôt des concepts insaisissables qu'il veut comprendre pour ce qu'ils sont. «Mais ensuite, raconte Ana Caraiani, à l'université de Princeton, les structures qu'il crée s'avèrent avoir des applications dans une multitude de directions qui n'avaient pas été anticipées, simplement parce qu'elles étaient le bon objet auquel il fallait réfléchir.»

APPRENDRE L'ARITHMÉTIQUE

Peter Scholze a commencé à apprendre seul les mathématiques de niveau universitaire à l'âge de 14 ans, alors qu'il était au lycée Heinrich-Hertz, à Berlin. Dans cet établissement, «vous n'étiez pas vu comme un marginal si vous vous intéressiez aux mathématiques», confie-t-il.

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, *Perfectoid spaces*, *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 116, pp. 245-313, 2012.

J.-M. FONTAINE, *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze)*, «Séminaire Bourbaki, 64^e année 2011/2012», exposés 1043-1058, vol. 352, *Société mathématique de France*, 2013.

B. BHATT, *What is a perfectoid space ?*, *Notices AMS*, vol. 61(9), octobre 2014.

À 16 ans, il apprend que dix ans plus tôt, en 1995, Andrew Wiles avait prouvé le fameux dernier théorème de Fermat, selon lequel l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière non nulle si n est supérieur à 2 (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68). Peter Scholze se rue sur la preuve, sauf qu'elle fait appel aux mathématiques les plus compliquées. «Je n'y comprenais rien, mais c'était fascinant», dit-il.

Alors il fait marche arrière, essayant de déterminer ce qu'il devait apprendre pour comprendre la preuve de Wiles. «C'est plus ou moins comme ça que j'ai appris jusqu'ici», détaille-t-il. «En fait, je n'ai jamais vraiment appris les choses basiques comme l'algèbre linéaire. Je les ai seulement assimilées en m'intéressant à d'autres notions.»

À mesure qu'il étudiait la preuve de Wiles, Peter Scholze se passionna pour les objets mathématiques utilisés – les formes modulaires et les courbes elliptiques, qui réunissent des domaines disparates de la théorie des nombres, de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse. Comprendre les objets mathématiques en jeu était plus intéressant que le problème lui-même.

Aujourd'hui encore, Peter Scholze travaille sur des problèmes ancrés dans des équations simples impliquant des nombres entiers. De là, même les structures mathématiques les plus ésotériques qui en découlent restent concrètes à ses yeux. «Je m'intéresse surtout à l'arithmétique», explique-t-il. Il se dit très heureux lorsque ses constructions abstraites le conduisent à de petites découvertes sur les nombres entiers.

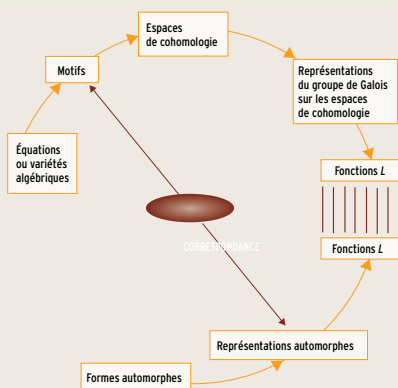
À l'université, Peter Scholze persévère dans la théorie des nombres et la géométrie. Là, son camarade de classe, Eugen Hellmann, se souvient que pendant les cours de mathématiques, Peter ne prenait jamais de notes. Il comprenait le contenu du cours en temps réel. «Mais pas seulement en surface; il comprenait en profondeur, si bien qu'il n'oubliait rien.»

Peter Scholze a commencé ses recherches en géométrie arithmétique, où des outils de géométrie aident à approcher les solutions entières d'équations polynomiales (par exemple, $xy^2 + 3y = 5$), qui n'impliquent que des nombres entiers, des variables et des exposants.

Pour certaines équations de ce type, il est utile de déterminer si elles ont des solutions dans des ensembles de nombres alternatifs dits p -adiques qui, comme les réels, sont construits en «remplissant les intervalles» entre les entiers et les fractions (voir *l'encadré page 88*). Mais ces corps de nombres sont fondés sur des notions non standard d'intervalles et de proximité. Dans un système p -adique, deux nombres sont proches, non pas si leur différence est petite, mais si elle est divisible de nombreuses fois par p (p étant un nombre premier). C'est étrange, mais utile! Ainsi, les nombres 3-adiques offrent un moyen naturel d'étudier

LE PROGRAMME DE LANGLANDS

Une part substantielle des recherches menées ces dernières décennies en théorie des nombres et en géométrie algébrique s'est déroulée sous l'impulsion d'un tissu de conjectures, dont Robert Langlands, de l'Institut des études avancées, à Princeton, aux États-Unis, avait formulé certaines dans une longue lettre adressée à André Weil en 1967. Cet ensemble de conjectures, les unes précises, les autres un peu floues, est surnommé aujourd'hui «programme (ou correspondance) de Langlands». Il dresse des ponts entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes et la théorie de certaines fonctions nommées formes automorphes. Il a été fructueux, dans la mesure où plusieurs résultats importants ont été démontrés au fil des ans: la démonstration du théorème de Fermat, en 1994, en est l'un de ces résultats les plus marquants. Pour autant, l'exploration et la démonstration de cette «correspondance» sont loin d'être achevées: elles représentent toujours, pour les mathématiciens, un défi à relever.



Le programme de Langlands relie deux grands édifices, l'un construit à partir des équations ou variétés algébriques, l'autre à partir de fonctions modulaires ou automorphes. Il conjecture une correspondance entre motifs et représentations automorphes, deux ensembles d'objets auxquels on sait associer des «fonctions L», fonctions qui contiennent des informations de nature arithmétique.

des équations comme $x^2=3y^2$, pour lesquelles les multiples de 3 sont la clé.

Les nombres p -adiques vont «bien au-delà de ce que notre sens commun nous permet de concevoir», explique Peter Scholze. Avec les années, ils lui sont finalement devenus naturels. «Désormais, je trouve les nombres réels bien plus perturbants que les p -adiques!»

Les mathématiciens avaient remarqué dans les années 1970 que beaucoup de problèmes concernant les nombres p -adiques deviennent plus simples si on étend le corps des nombres p -adiques en ajoutant successivement les racines p -ièmes de p , créant ainsi une «tour infinie» de nombres, où chacun englobe les précédents, avec les nombres p -adiques à la base. Au «sommet» de cette tour infinie se trouve un objet fractal qui est l'exemple le plus simple des espaces perfectoides que Peter Scholze a développé par la suite.

Il s'est fixé l'objectif de comprendre pourquoi cette construction enveloppante infinie facilite tant les problèmes mettant en jeu des nombres p -adiques et des équations polynomiales. «J'essayais de comprendre le cœur de ce phénomène», explique-t-il. «Il n'existe aucun formalisme général qui peut expliquer cela.»

Il s'est finalement rendu compte qu'il est possible de construire des espaces perfectoides pour une grande variété de structures mathématiques, et notamment pour les corps de nombres p -adiques et les corps de polynômes. Il a montré que ces espaces permettent de transposer des problèmes liés aux équations polynomiales avec les nombres p -adiques dans des structures basées sur des polynômes, où l'arithmétique est bien plus simple (par exemple, lors d'une addition, les retenues ne sont pas nécessaires). «La propriété la plus étrange des espaces perfectoides est leur capacité à se transposer comme par magie entre les deux systèmes», explique Jared Weinstein.

Avec cette idée, Peter Scholze a prouvé un cas particulier d'une conjecture complexe à propos des solutions p -adiques aux équations polynomiales, émise par le mathématicien Pierre Deligne et appelée la conjecture monodromie-poids, qui a fait l'objet de sa thèse en 2012. Elle «avait des implications si vastes qu'elle est devenue un sujet de groupes d'études à travers le monde», selon Jared Weinstein.

Pour Eugen Hellmann, «Peter Scholze a trouvé précisément le moyen le plus propre et le plus correct d'intégrer tous les travaux précédents avec une formulation élégante, et par conséquent le moyen d'aller bien plus loin que les résultats déjà connus».

Malgré la complexité des espaces perfectoides, Peter Scholze est connu pour la clarté de ses discours et de ses publications. «Je ne

comprends vraiment tout cela que lorsque Peter me l'explique», confie Jared Weinstein.

Pour Ana Caraiani, Peter Scholze met un point d'honneur à essayer d'expliquer ses idées à un niveau d'étudiant de second cycle. «Il a cette attitude d'ouverture et de générosité lorsqu'il s'agit de parler de ses idées», explique-t-elle. «Et il ne le fait pas qu'avec quelques seniors. Il est vraiment très accessible pour beaucoup de jeunes.» Cette attitude fait de lui un chef de file idéal pour le domaine, selon Ana Caraiani. Une fois, alors qu'elle participait à une randonnée difficile avec lui et un groupe de mathématiciens, «il était celui qui allait et venait en s'assurant que tous les autres allaient bien et arrivaient à suivre», raconte-t-elle.

AU-DESSUS DE LA JUNGLE

Pourtant, même avec les explications de Peter Scholze, les espaces perfectoides sont difficiles à appréhender pour beaucoup. Selon

Eugen Hellmann, «si vous vous éloignez un petit peu du chemin, vous vous retrouvez au milieu d'une jungle de notions où il est très difficile de se repérer. Peter, en revanche, ne s'y perd jamais. Il n'essaie pas de se frayer un chemin, il est plutôt à la recherche d'une vue globale de l'ensemble, d'un concept plus clair.»

Peter Scholze évite le chaos luxuriant de la jungle de l'arithmétique en la survolant. À l'université, il préférerait travailler sans rien écrire. Ce qui signifie qu'il devait formuler ses idées le plus clairement possible. «Nos capacités cérébrales sont d'une certaine façon limitées, donc on ne peut pas faire de choses trop compliquées», explique Scholze.

Alors que d'autres mathématiciens commencent à s'approprier les espaces perfectoides, certaines des découvertes les plus fondamentales à leur sujet viennent, sans surprise, de Peter Scholze et de ses collaborateurs. En 2013, un résultat publié en ligne «a stupéfié la communauté», d'après Jared Weinstein. «Nous n'imaginions pas qu'un tel théorème soit envisageable.»

Le résultat de Scholze a étendu la portée des relations qu'on appelle lois de réciprocité. Elles gouvernent le comportement d'équations polynomiales qui font appel à l'arithmétique modulaire. Cette arithmétique (dont une illustration simple est le compte «modulo 12» des heures sur une horloge, où 8 heures + 5 heures = 1 heure, par exemple) est le système de nombres finis le plus naturel et le plus étudié.

Les lois de réciprocité sont une généralisation de la loi de réciprocité quadratique, une pierre angulaire de la théorie des nombres démontrée par Gauss en 1801 et l'un des théorèmes préférés de Peter Scholze. La loi de réciprocité quadratique stipule que lorsqu'on a deux nombres premiers p et q , dans la plupart des cas, p est un carré

**JE N'AI JAMAIS
VRAIMENT APPRIS
LES CHOSES
BASIQUES.
JE LES AI
ASSIMILÉES EN
M'INTÉRESSANT
À D'AUTRES
NOTIONS**

- modulo q si q est un carré modulo p sur une horloge ayant p heures. Par exemple, 5 est un carré parfait modulo 11, puisque $5=16=4^2$ et 11 est un carré modulo 5, puisque $11=1=1^2$.

«Je trouve cela très surprenant», confie Peter Scholze. «À première vue, ces deux choses n'ont rien en commun.» «Vous pouvez interpréter beaucoup de théories algébriques modernes comme de simples tentatives de généraliser cette loi», explique Jared Weinstein.

Au milieu du xx^e siècle, les mathématiciens ont découvert un lien étonnant entre les lois de réciprocité et ce qui avait l'air d'être un sujet totalement différent: la géométrie hyperbolique (un exemple de modèle d'espace hyperbolique est le pavage «Anges et démons», d'Escher). Ce

lien fait partie intégrante du programme de Langlands (voir l'encadré page 86), une série de conjectures et de théorèmes interconnectés portant sur les relations entre la théorie des nombres, la géométrie et l'analyse. Quand ces conjectures sont prouvées, elles se révèlent souvent extrêmement puissantes. Par exemple, la preuve du dernier théorème de Fermat a consisté à résoudre une petite – mais loin d'être triviale – partie du programme Langlands.

Les mathématiciens ont progressivement pris conscience que ce programme s'étend bien au-delà du cas du disque hyperbolique: il peut aussi être étudié dans des espaces hyperboliques de dimension supérieure et d'autres contextes variés. Peter Scholze a montré comment

L'ÉTRANGE MONDE P -ADIQUE

Notre manière habituelle (décimale) d'écrire des nombres consiste à les représenter comme une somme de puissances de dix avec des facteurs (des coefficients) compris entre 0 et 9. Ainsi, 347 est une forme abrégée de $3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.

En fait, on peut identifier tout nombre réel avec la suite de ses chiffres: $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$ est essentiellement identique à: $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} \dots a_1 \times 10 + a_0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + a_{-3} \times 10^{-3} \dots$ les chiffres a_i étant compris entre 0 et 9. Dans ce contexte, les séquences à l'infini de chiffres 0,999... et 1,000... représentent le même nombre.

De manière générale, en mathématiques, une suite est un ensemble de quantités, par exemple de nombres, dont les éléments sont pourvus de numéros (des indices): a_n désigne l'élément de rang n d'une suite, du coefficient de 10^n dans l'exemple précédent.

Habituellement, les indices vont de 1 à l'infini: $a_1, a_2, a_3 \dots$. C'est différent avec les nombres réels qui peuvent nécessiter une infinité de coefficients à indice négatif. Par exemple, $\pi = 3,14159$ s'écrit: $3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5} \dots$

où $a_0 = 3, a_{-1} = 1, a_{-2} = 4, a_{-3} = 1, a_{-4} = 5, a_{-5} = 9 \dots$

Le fait que la base soit 10 n'a aucune signification mathématique. Dans ce qui suit, il sera même plus intéressant de choisir pour base un nombre premier p . Un nombre réel écrit en base p est donc une suite de chiffres entre 0 et $p-1$, qui peut en contenir un nombre infini d'éléments d'indice négatif (après la virgule), mais seulement un nombre fini d'indice positif. Peut-on imaginer l'inverse? Quels seraient les nombres obtenus en autorisant une infinité de termes à gauche de la virgule, mais seulement un nombre fini de termes à sa droite?

Ces nombres sont dits p -adiques. Leur comportement déconcerte et réclame du temps pour s'y s'habituer. Et contrairement aux nombres réels, ils sont complètement inadaptés pour décrire les processus naturels. Néanmoins, on peut calculer avec eux presque comme on a l'habitude de le faire depuis l'école primaire. Ainsi, pour les nombres 5-adiques, comme pour les nombres habituels en base 5, on a $4+1=10$. Cependant, on a aussi $\dots 4444+1=0$, car il y a une retenue à chaque addition, qui se propage à l'infini vers la gauche. La division doit également être effectuée dans l'ordre inverse de celui de la méthode scolaire.

Les nombres p -adiques forment un corps, c'est-à-dire un ensemble où les quatre opérations arithmétiques de base peuvent être effectuées sans restriction – sauf la division

par zéro. On désigne ce corps par le symbole $\mathbb{Q}_p$.

Quand dit-on de deux nombres réels qu'ils sont proches?

Lorsque leur différence a un zéro avant la virgule et beaucoup de zéros après. La question est plus complexe avec deux nombres p -adiques: ils sont proches quand leur différence a beaucoup de zéros avant la virgule (et seulement des zéros derrière) ou, ce qui revient au même, est divisible par une puissance élevée de p . Le fait qu'il existe encore une infinité de chiffres plus à gauche est sans importance. Avec cette définition de la proximité, on peut définir des suites de nombres p -adiques ainsi que leurs limites. Toutefois, on ne peut pas ordonner les nombres p -adiques sur une ligne aussi facilement que les nombres réels.

Le calcul de puissances, définies par multiplication répétée d'un nombre, compte parmi les opérations qui sont toujours possibles dans un corps. Ce n'est pas le cas des racines. Parmi les nombres réels, il n'existe pas de x ayant la propriété $x^2 = -1$. Les mathématiciens remédient à ce défaut en ajoutant, quasiment par décret, un nouveau nombre appelé i , dont ils ne demandent rien d'autre que la propriété $i^2 = -1$ (ils «ajoutent au corps des nombres réels une racine de -1 »). Ainsi, ils construisent à partir des nombres réels les nombres complexes. Un procédé similaire est possible avec les nombres p -adiques. On ajoute de préférence au corps $\mathbb{Q}_p$ une racine p -ième de p . Cependant, contrairement au cas des nombres complexes, ceci ne résout pas une fois pour toutes le problème du calcul de racines. Il s'avère nécessaire d'ajouter également la p -ième racine de la p -ième racine, la p^2 -ième racine de ce nombre, et ainsi de suite. Cela conduit à l'extension de corps infinie de $\mathbb{Q}_p$, la «tour infinie» évoquée dans le texte principal.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p -adiques a une autre propriété remarquable: on peut pourvoir ses éléments (des suites de chiffres entre 0 et $p-1$, dont une infinité à un indice positif, mais seulement un nombre fini à indice négatif sont non nuls) de nouvelles règles de calcul, ce qui conduit à un corps complètement différent.

Ces nouvelles règles de calcul viennent de la théorie de l'analyse complexe (la théorie des fonctions). On y étudie de préférence des fonctions représentables par des séries entières, c'est-à-dire des sommes infinies de la forme $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \dots$

Si l'on ne veut pas exclure des fonctions telles que $1/z$ ou $2/z^3 + 3z^2$, on doit étendre les sommes à des «séries de Laurent», où des coefficients d'indice négatif peuvent apparaître. Pour $1/z$, on a alors $a_{-1} = 1$, et pour $2/z^3 + 3z^2$, $a_{-3} = 2$ et $a_2 = 3$.

L'étendre à une grande variété de structures dans les espaces hyperboliques de dimension 3 (des espaces de courbure négative généralisant le disque hyperbolique) et au-delà. En construisant le perfectoïde d'un espace hyperbolique de dimension 3, Scholze a découvert une série complètement nouvelle de lois de réciprocités.

«Les travaux de Peter ont complètement transformé ce qui est possible, et ce à quoi nous avons accès», explique Ana Caraiani. Pour Jared Weinstein, les résultats de Peter Scholze montrent que le programme Langlands est «bien plus profond que ce que nous pensions... il est plus systématique et partout présent.»

Discuter de mathématiques avec Peter Scholze, c'est comme consulter un «oracle de la

vérité», selon Jared Weinstein. «S'il dit que quelque chose va marcher, vous pouvez être confiant. S'il dit non, vous devriez abandonner tout de suite; et s'il ne sait pas – ce qui peut arriver –, vous êtes chanceux, car alors, vous avez entre les mains un problème très intéressant.»

Pourtant, collaborer avec lui n'est pas une expérience aussi intense qu'on pourrait le croire, explique Ana Caraiani. Quand elle travaillait avec lui, il n'y avait jamais de précipitation. «J'avais le sentiment qu'on faisait toujours ce qu'il fallait de la bonne façon – nous prouvions les théorèmes les plus généraux possible, le mieux possible, grâce à des constructions qui permettraient d'éclairer les choses.»

MATHS ET PATERNITÉ

Toutefois, en une occasion, Peter Scholze a effectivement travaillé dans la précipitation: en 2013, il essayait de finir un article à temps avant la naissance de sa fille. Pour lui, c'est une bonne chose qu'il se soit dépêché. «Je n'ai pas fait grand-chose après.» Devenir père l'a poussé à se discipliner dans la gestion de son temps, explique-t-il. Mais il n'a pas de problème pour trouver du temps dévolu à la recherche – les mathématiques remplissent simplement tous les moments libres entre ses autres obligations. «Les mathématiques sont ma passion. J'y pense sans cesse.»

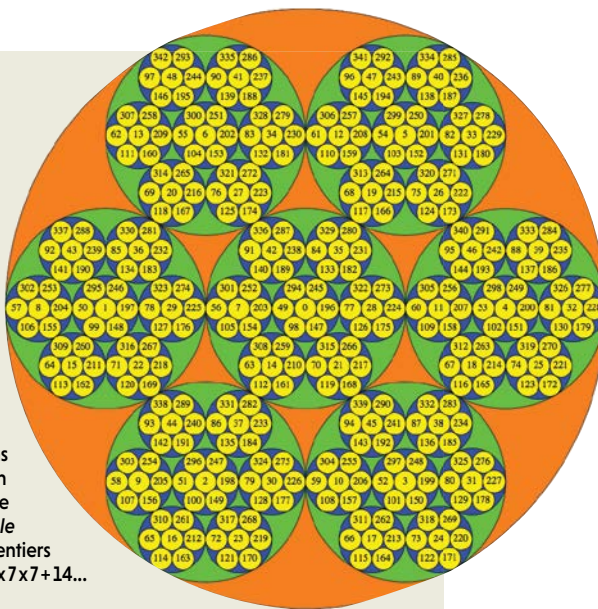
Pour autant, il ne souhaite pas tellement s'étendre sur cette passion. Quand on lui demande s'il était fait pour devenir mathématicien, il dément: «C'est une idée bien trop philosophique.» Plutôt secret, il n'est pas très à l'aise avec sa célébrité. En 2016, il est devenu le plus jeune lauréat du prix Leibniz, la plus haute distinction scientifique en Allemagne, qui s'accompagne d'une bourse de recherche de 2,5 millions d'euros pour les sciences expérimentales, et 900 000 euros pour les théoriciens. «Parfois, c'est un peu accablant», confie-t-il.

Peter Scholze continue d'explorer les espaces perfectoïdes, mais il s'est aussi ouvert à d'autres domaines des mathématiques et touche à la topologie algébrique, qui utilise l'algèbre pour étudier la forme des objets. «L'année dernière, Peter est devenu maître du sujet. Il a changé la façon dont les experts l'abordent», explique Bhargav Bhatt.

Selon lui, quand Peter Scholze s'intéresse à leur domaine, cela peut être effrayant, mais aussi excitant pour les autres mathématiciens. «Cela signifie que le sujet va avancer rapidement. Je suis très enthousiaste à l'idée qu'il travaille sur un domaine proche du mien, puisque je peux assister au recul des frontières de nos connaissances.»

Toutefois, pour Peter Scholze, ces travaux jusqu'à maintenant ne sont qu'un échauffement. «Je suis encore dans une phase où j'essaie d'apprendre ce qui existe, en le reformulant à ma manière», se confie-t-il. «Je n'ai pas le sentiment d'avoir vraiment commencé mes recherches.» ■

Les nombres 7-adiques (ici, les $7 \times 7 \times 7 = 343$ premiers) sont arrangés de façon fractale révélant leur proximité (une notion qui a ici un sens différent de celui qu'on lui prête d'habitude). Dans le disque bleu central, on distingue les multiples de $7 \times 7 = 49$, entourés (dans le disque vert central) des entiers de la forme $n \times 7 \times 7 + 7$, $n \times 7 \times 7 + 14 \dots$



Les fonctions de cette classe (dites méromorphes) sont complètement décrites par la suite de leurs coefficients $a_{-n}, a_{-(n-1)}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$

L'addition et la multiplication de telles fonctions peuvent s'exprimer par l'intermédiaire de ces coefficients. En principe, ces coefficients sont des nombres complexes, mais rien n'empêche d'utiliser à leur place des nombres d'un autre corps. Dans le cas qui nous intéresse, le corps s'appelle $\mathbb{F}_p$: il comprend les nombres $0, 1, \dots, p-1$, avec lesquels on calcule «modulo p », c'est-à-dire que l'on commence par les ajouter ou les multiplier de la façon habituelle, puis on prend le reste de leur division euclidienne par p . Les questions de convergence et de différentiabilité, qui jouent un rôle central en analyse complexe, sont devenues sans objet lors du passage vers le corps fini $\mathbb{F}_p$, voire même plus du tout formulables. Mais par les «séries de Laurent formelles sur $\mathbb{F}_p$ », on obtient une nouvelle structure de corps pour le même ensemble, qui formait déjà le corps $\mathbb{Q}_p$.

En interprétant le même objet d'une part comme un élément de l'un des corps, et d'autre part comme un élément de l'autre corps, on aboutit à des résultats de très grande portée. C'est de cette astuce que le concept d'espace perfectoïde développé par Peter Scholze tire toute sa puissance.

CHRISTOPHE PÖPPE (SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT),
TRADUIT PAR NILS BERGLUND, DE L'INSTITUT
DENIS-POISSON, À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

L'ESSENTIEL

- L'Indo-Australien Akshay Venkatesh a reçu en 2018 une médaille Fields.
- Malgré un passé brillant, il ne s'est épanoui dans la recherche en mathématiques que tardivement.
- Il s'est illustré dans l'étude de la subconvexité, un problème

lié aux généralisations de la fonction ζ de Riemann, en inventant des méthodes radicalement nouvelles.

- Il explore aujourd'hui des liens nichés au cœur du programme de Langlands, qui relie théorie des nombres, géométrie et analyse.

L'AUTEURE



ERICA KLARREICH
docteure en mathématiques de l'université Stony Brook, dans l'État de New York. Elle contribue régulièrement au magazine *Quanta*.

Un mathématicien bâtisseur de ponts

Akshay Venkatesh, lauréat en 2018 de la médaille Fields, n'aime rien tant que se perdre dans des contrées mathématiques inexplorées, peu balisées, en quête de liens cachés entre différents domaines. Et il en trouve !



Cet article a d'abord été publié en anglais par *Quanta Magazine*, une publication en ligne indépendante soutenue par la *Simons Foundation* afin de favoriser la diffusion des sciences : <http://bit.ly/QM-Venka>

P

ar un après-midi de mai, sur l'aire de jeu du campus de l'Institut d'études avancées, à Princeton, aux États-Unis, le mathématicien Akshay Venkatesh poussait sa petite fille de 4 ans sur la balançoire (son autre fille, 7 ans, se promenait avec ses amis) tout en méditant sur le mythe du génie.

« Ce stéréotype ne rend pas service à la discipline, explique-t-il. Je pense qu'il ne reflète pas les diverses façons par lesquelles on peut contribuer aux mathématiques. »

Venant de l'université Stanford, en Californie, à l'autre bout des États-Unis, Akshay Venkatesh a séjourné pendant un an à Princeton, en tant que professeur visiteur. Depuis août 2018, il y est devenu permanent, ajoutant son nom à une longue liste de résidents prestigieux : Albert Einstein, Kurt Gödel et quelques titulaires de la médaille Fields.

Coincidence. Akshay Venkatesh s'est vu décerner cette médaille, la plus haute distinction en mathématiques. Il est honoré pour ses « contributions majeures à un éventail exceptionnellement vaste de sujets en mathématiques » et