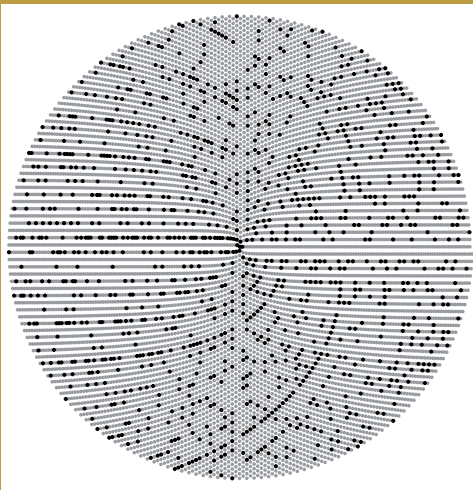




LES PREMIERS DE LA CLASSE

P. 52

Une nouvelle merveille cryptographique !

Jean-Paul Delahaye

Comment confier des calculs à un tiers sans lui dévoiler ni les données ni les résultats ?

P. 60

Des jumeaux, des cousins et... des nombres sexy

Bruno Martin

La conjecture des nombres premiers jumeaux est l'un des problèmes les plus populaires.

P. 68

L'hypothèse qui valait un million

Peter Meier et Jörn Steuding

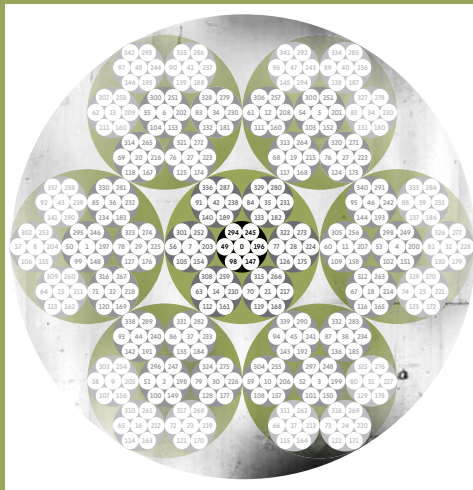
La clé de la répartition des nombres premiers résiste aux assauts des mathématiciens.

P. 76

Un record pour les nombres premiers

Simon Plouffe

En 2019, une formule a généré une séquence de 100 nombres premiers. C'est un record !



DES HOMMES ET DES NOMBRES

P. 84

L'oracle de l'arithmétique

Erica Klarreich

Peter Scholze a mis au jour des liens profonds entre la théorie des nombres et la géométrie.

P. 90

Un mathématicien bâtisseur de ponts

Erica Klarreich

Akshay Venkatesh traque des liens cachés entre différents domaines mathématiques.

P. 96 Entretien

« Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat »

Cédric Villani

P. 98

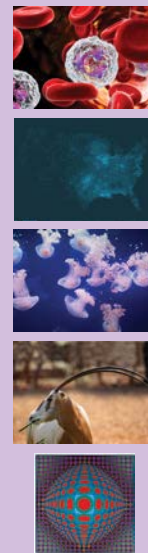
Le tombeur de Fermat

Giulio Giorello et Corrado Sinigaglia

L'épopée du théorème de Fermat, démontré en 1995, fut riche en rebondissements.

P. 108

À lire en plus



RENDEZ-VOUS

par Loïc Mangin

P. 110

Rebondissements

Une restauration rapide, mais dans le désordre • La musique nuit gravement à la créativité • Se coller pour mieux décoller • Un modèle pour la dynamique d'Alzheimer •

P. 114

Données à voir

Où est passé l'Ananas express ?

P. 116

Les incontournables

Des livres, des expositions, des sites internet, des vidéos, des podcasts... à ne pas manquer.

P. 118

Spécimen

L'oryx, bon sang mais c'est bien sûr !

P. 120

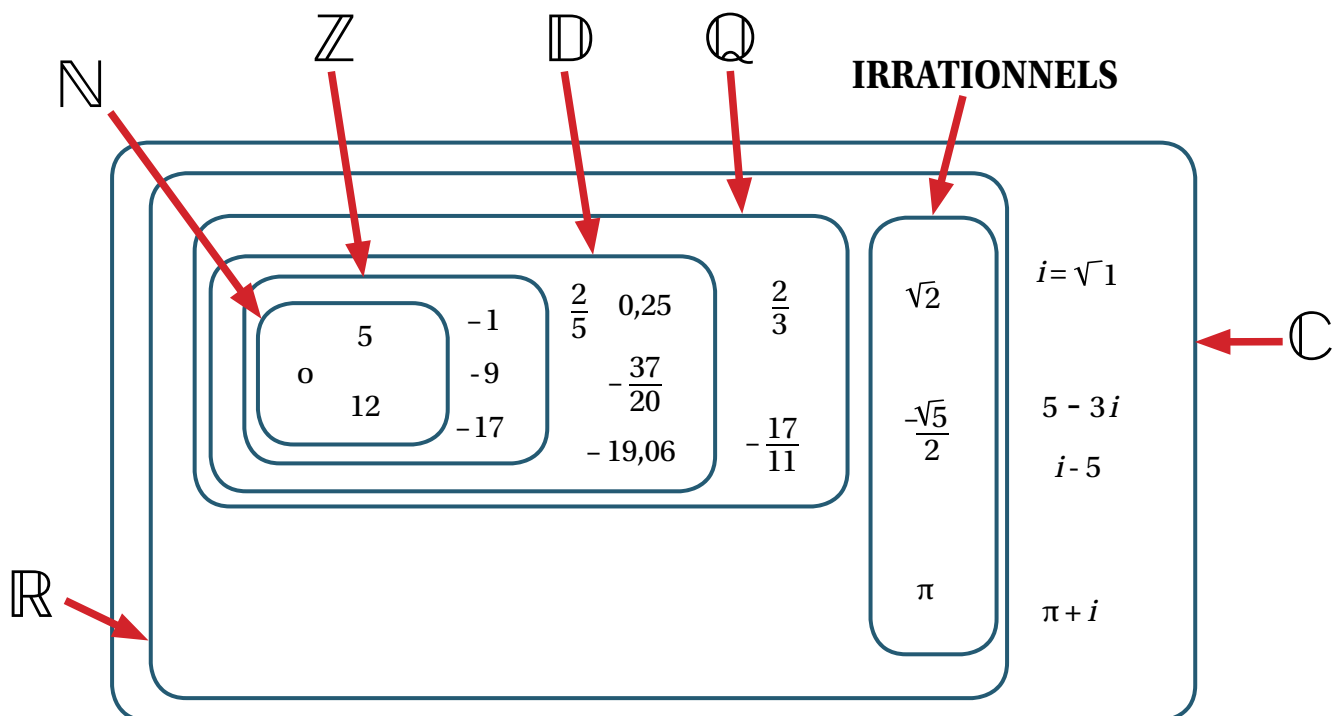
Art & Science

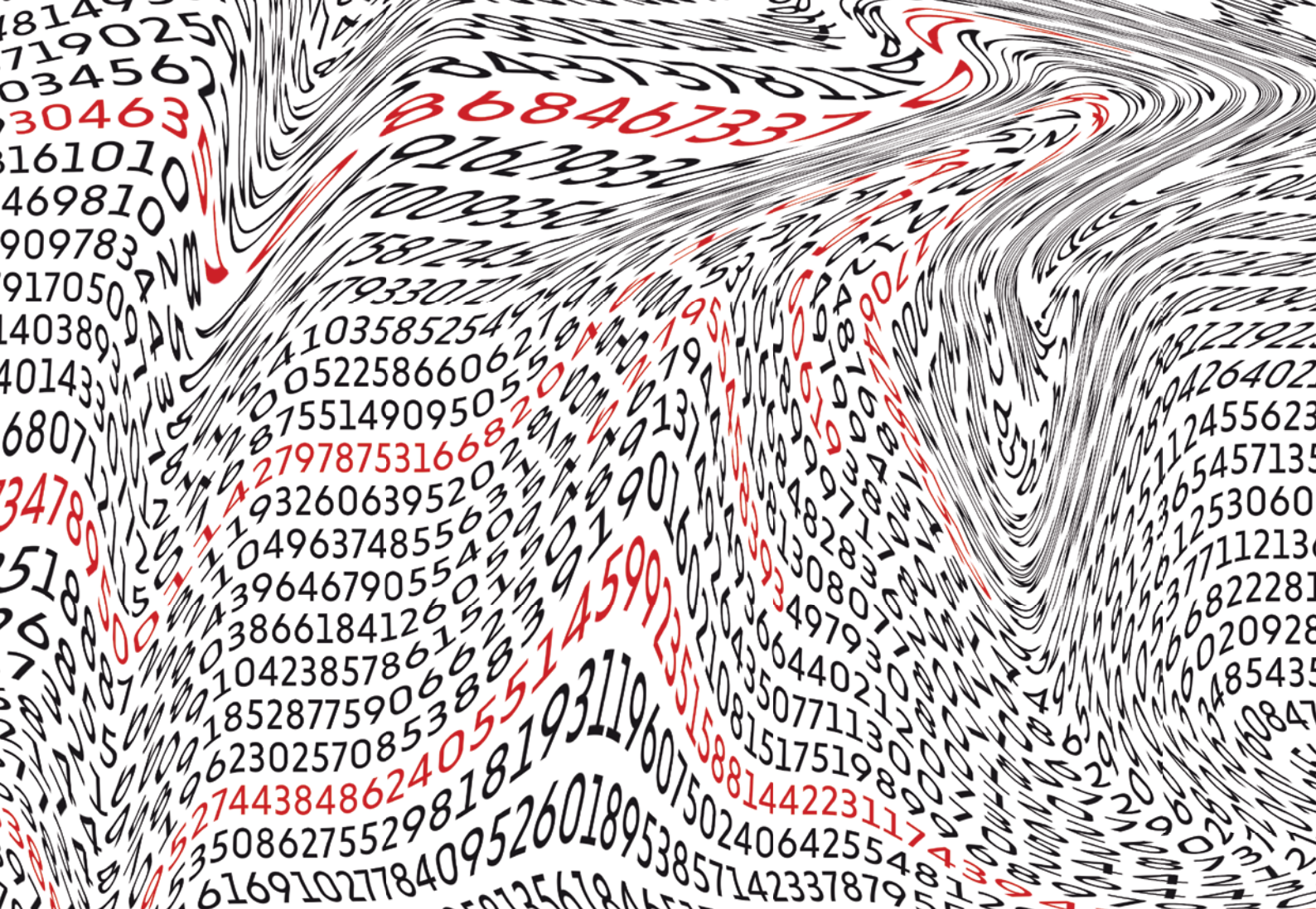
Du petit carré à l'Univers en entier.

Un bon nombre de nombres

Sans nombre, impossible d'évaluer, de comparer, de mesurer, de se localiser, d'ordonner... Le nombre est donc indispensable. Pour pratiquer leur art, et étendre le monde de leurs investigations, les mathématiciens distinguent et même ont créé quantité de types de nombres. Un vrai bestiaire ! Inventaire non exhaustif.

Les poupées russes. Les nombres sont réunis dans des ensembles souvent emboîtés, mais pas toujours.





CHIFFRE OU NOMBRE ?

Les chiffres sont des signes, des éléments d'écriture, utilisés pour représenter les nombres. Notre système décimal est bâti sur les chiffres indo-arabes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9). On connaît aussi les chiffres romains : I, V, X, L, C...

SYSTÈME DÉCIMAL

Ce système de numération en base 10 est fondé sur les chiffres de 0 à 9 dans une notation dite positionnelle. Dans l'écriture d'un nombre, la position d'un chiffre correspond à une puissance de 10 dont le chiffre lui-même est un coefficient multiplicateur : $263 = 2 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. En informatique, on rencontre le système binaire, c'est-à-dire en base 2 (seulement les chiffres 0 et 1), et le système hexadécimal (avec les 16 « chiffres » : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F). Le nombre binaire 1101 est égal en système décimal à $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, soit 13. Le nombre hexadécimal 15AACF7 est égal en système décimal à $1 \times 16^6 + 5 \times 16^5 + 10 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 7 \times 16^0$, soit 22719735.

NOMBRES ENTIERS NATURELS

Des nombres non décimaux (c'est-à-dire sans virgule) et positifs : 10, 159, 132 548 965... L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

NOMBRES ENTIERS RELATIFS

Toujours sans virgule, ces nombres incluent les entiers naturels (donc positifs) et les entiers négatifs : -15, -4 958, 3, 159... L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

NOMBRES ENTIERS DÉCIMAUX

Ces nombres (positifs ou négatifs) incluent les entiers relatifs et ceux qui ont des chiffres après la virgule, mais uniquement une suite finie : $2/5$, $-5/4$, 0,153, $-0,2...$ L'ensemble des entiers décimaux est noté $\mathbb{D}$.

NOMBRES RATIONNELS

Ces nombres incluent les précédents, ainsi que tous ceux qui s'expriment sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers a et b (b est non nul), sans restriction sur le nombre de chiffres après la virgule : $-2/3$, $22/7...$ Ils auraient été conçus la première fois par les Égyptiens. La suite de nombres après la virgule est toujours périodique. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

NOMBRES IRRATIONNELS

Ces nombres, qui cette fois n'incluent pas les précédents, ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction a/b . Les premiers nombres irrationnels (les racines carrées) auraient été découverts par les Grecs entre le V^e et le IV^e siècle avant notre ère, même si l'on en trouve également la trace dans des documents indiens datés du VIII^e au V^e siècle avant notre ère. On distingue plusieurs types d'irrationnels : les **irrationnels constructibles**, les **nombres algébriques**, les **nombres transcendants**...

IRRATIONNELS CONSTRUCTIBLES

Un nombre irrationnel constructible peut s'obtenir avec une règle et un compas. C'est le cas du nombre $\sqrt{2}$ découvert par les Grecs, ainsi que du **nombre d'or**.

NOMBRES ALGÈBRIQUES

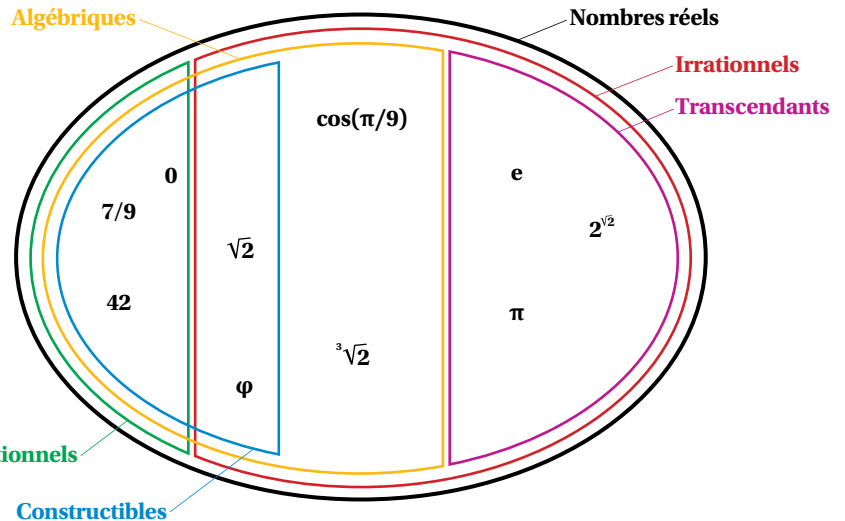
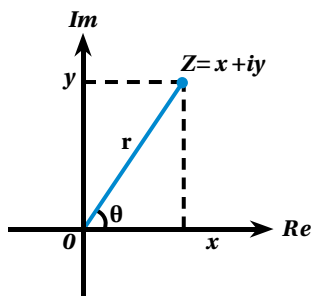
Ces nombres, qui incluent les précédents, sont les solutions des équations polynomiales à coefficients rationnels de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, tous les a_i appartenant à $\mathbb{Q}$. Par exemple, $\sqrt{2}$ (**constructible**) est solution de $x^2 - 2 = 0$. $(\sqrt[3]{2})/2$ est aussi algébrique, **irrationnel**, mais non constructible.

NOMBRES TRANSCENDANTS

Ces nombres irrationnels ne sont pas solutions d'équations polynomiales à coefficients rationnels. Les plus connus de ces nombres sont π et e . Le nombre de Champernowne 0,12345678910111213... est aussi transcendant. L'existence de tels nombres a été prouvée pour la première fois en 1844 par Joseph Liouville.

NOMBRES COMPLEXES

L'ensemble des nombres complexes est une extension de l'ensemble des **nombres réels**, contenant un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$. Le carré de $(-i)$ est aussi égal à -1 : $(-i)^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme $x + iy$ où x et y sont des nombres réels et nommés respectivement « partie réelle » (Re) et « partie imaginaire » (Im). On peut représenter les nombres complexes dans un plan dit complexe avec pour abscisse les parties réelles x et en ordonnées les parties imaginaires y . Un nombre complexe $z = x + iy$ s'écrit aussi sous la forme $z = re^{i\theta}$ ou bien $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où r est le module de z et θ son argument. Un nombre complexe peut être **algébrique**.



NOMBRES RÉELS

Ces nombres englobent l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels. Ils peuvent avoir une liste finie ou infinie de décimales. L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$. En 1874, Georg Cantor démontra que les nombres **algébriques** réels sont dénombrables et les nombres réels sont non dénombrables. Les nombres réels sont des nombres **complexes** dont la partie imaginaire est égale à zéro.

π (PI)

Ce nombre a été initialement défini comme le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. Sa valeur approchée est 3,141592653... Il est connu depuis l'Antiquité : dès 2000 avant notre ère, les Babyloniens avaient obtenu pour π une valeur de 3,125. L'ubiquité de π en fait l'une des plus importantes constantes en mathématiques. La **transcendance** de π (qui est par définition non constructible) a permis la prouver l'impossibilité de résoudre la quadrature du cercle.

e

Le nombre e (nommé nombre d'Euler ou constante de Néper) est la base des logarithmes népériens (noté $\ln$), c'est-à-dire le nombre défini par $\ln(e) = 1$, ce qui en fait la base de la fonction exponentielle e^x . Euler a défini e comme : $1 + 1/1 + 1/(1 \times 2) + 1/(1 \times 2 \times 3) + 1/(1 \times 2 \times 3 \times 4) \dots$. En 1873, Charles Hermite a montré que le nombre e est **transcendant**.

NOMBRES P-ADIQUES

Ces nombres ont été inventés par Kurt Hensel en 1897 pour mieux comprendre les nombres habituels. Ils sont définis sur la base d'un nombre premier p . Par construction, ils peuvent avoir un nombre infini de chiffres à gauche de la virgule.

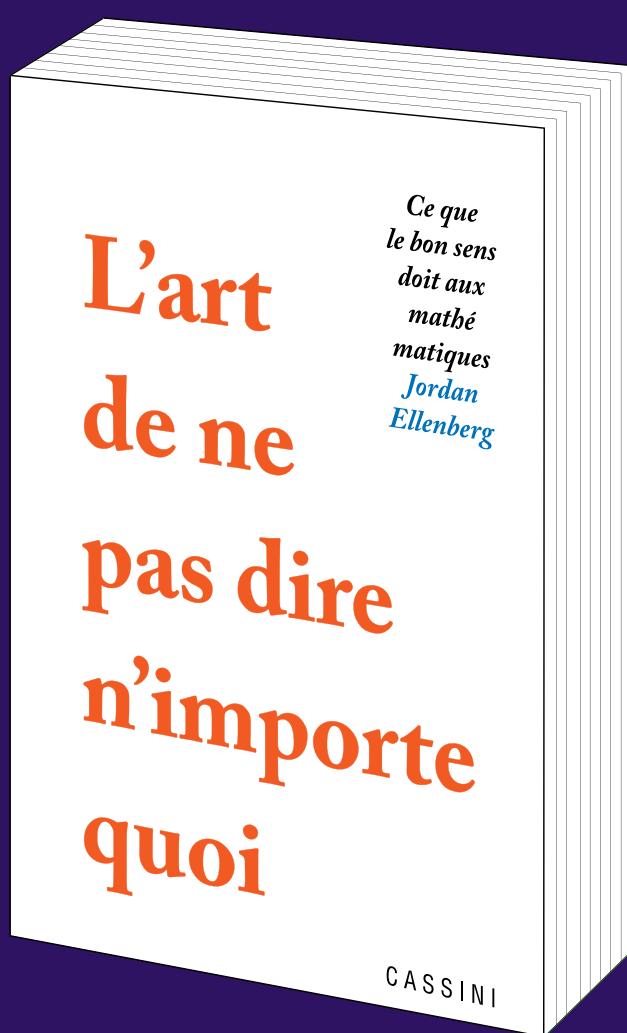
NOMBRES PREMIERS

Un tel nombre est un entier qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37... Ce sont les nombres élémentaires à partir desquels on peut fabriquer tous les autres entiers (en les additionnant ou en les multipliant). Ils sont utiles en cryptographie, car il est très difficile de trouver les facteurs premiers d'un nombre très grand. Le plus grand nombre premier connu est $2^{77232917} - 1$, qui comporte plus de 23 millions de chiffres en écriture décimale. C'est un nombre de Mersenne, car il est de la forme $2^p - 1$, où p est premier. Beaucoup de conjectures portent sur les nombres premiers.

NOMBRE D'OR (ϕ)

Le nombre d'or (noté ϕ), aussi nommé section dorée, proportion dorée et divine proportion, a été défini comme l'unique rapport a/b entre deux longueurs a et b telles que $(a+b)/a = a/b$. Ce nombre **irrationnel** est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Il vaut environ 1,618... On le retrouve dans la suite de Fibonacci, les pavages quasi-périodiques. Il était probablement connu dès l'Antiquité, en particulier par les pythagoriciens, et on le retrouve dans les *Éléments* d'Euclide.

Facile, intelligent, drôle, voici un livre que les amoureux des mathématiques dévoreront, et qui apportera une agréable surprise à ceux qui les ont en horreur. Il vous fera mieux comprendre le monde qui vous entoure, et vous aidera, n'en doutez pas, à ne plus dire n'importe quoi.



« Ce livre est une merveille, un des meilleurs livres de vulgarisation des mathématiques. Je ne trouve pas de mots assez forts pour exprimer ma reconnaissance à l'auteur. »

Philippe Boulanger,
Pour la science, avril 2018.

L'art de ne pas dire n'importe quoi
a reçu le Prix Tangente 2018.

Jordan Ellenberg

L'art de ne pas dire n'importe quoi
Ce que le bon sens doit aux mathématiques
534 p., 24 €

Retrouvez nos autres publications sur www.cassini.fr



CASSINI

ÉTIENNE GHYS



« Les mathématiques sont jubilatoires quand des branches indépendantes se rencontrent pour en faire une nouvelle »

Quelle place tient le nombre dans les mathématiques ?

Étienne Ghys : De façon caricaturale, on distingue en général la géométrie d'une part et l'algèbre d'autre part, dédié aux nombres. Ils représenteraient donc la moitié des mathématiques ! À la vérité, les nombres et la géométrie jouent au chat et à la souris depuis plus de trois mille ans. Même si je n'aime pas trop dissocier l'algèbre de la géométrie, personnellement les nombres m'intéressent plus sous leur aspect géométrique.

De fait, beaucoup de grandes avancées, parfois récompensées par des prix prestigieux, ne résultent-elles pas de liens tissés entre différents domaines ?

Étienne Ghys : Cette dichotomie entre algèbre et géométrie était pratique par le passé, mais elle a perdu de son sens. Le mathématicien américain Dennis Sullivan utilise une analogie. Il pense aux

BIO EXPRESS

1954
Naissance à Lille.

1988
Directeur de recherche au CNRS, à l'École normale supérieure de Lyon.

2009
Rédacteur en chef d'*Images des Mathématiques*.

2019
Secrétaire perpétuel pour la première division de l'Académie des sciences.

mathématiques comme à une tapisserie à laquelle on ajoute sans cesse de nouvelles pièces. Les mathématiques ne se développent pas, comme on pourrait le penser, sous forme arborescente où les ramifications se succèdent. Le modèle de l'arbre est un peu triste, car les branches qui se séparent ne se rencontrent plus par la suite.

Les mathématiques sont jubilatoires, on peut employer ce mot-là, précisément, quand des branches se rencontrent pour en faire une nouvelle, insoupçonnée auparavant. L'image qui me vient est celle de ces arbres touffus et denses où l'on ne sait plus où sont les branches, où sont les racines.

Et quand deux branches indépendantes depuis longtemps fusionnent, on assiste à un grand moment. C'est arrivé à l'algèbre et à la géométrie à l'occasion d'événements historiques.

Selon moi, le premier de ces moments forts a été l'invention par Descartes de ses fameuses coordonnées cartésiennes. Grâce à lui, avec son livre *La Géométrie*, on

comprend que l'on peut traiter de géométrie à partir des coordonnées (des nombres donc) et qu'à l'inverse, on peut étudier des courbes (de la géométrie) à partir de leurs équations. La géométrie devient en quelque sorte la même chose que l'algèbre!

Un deuxième grand moment, inverse, a eu lieu dans la deuxième moitié du xx^e siècle. Au lieu d'expliquer la géométrie par l'algèbre, au lieu de décrire un cercle par son équation $x^2 + y^2 = 1$ (c'est l'approche cartésienne), Alexandre Grothendieck, et bien d'autres, ont expliqué les nombres par la géométrie. Les nombres entiers forment des espaces sur lesquels on peut faire de la géométrie! Sans cette vision géométrique de l'arithmétique, par exemple, on ne serait jamais arrivé à démontrer le théorème de Fermat.

En construisant sans cesse ces passerelles, ne va-t-on pas aboutir à une sorte d'unité globale?

Étienne Ghys: J'aime les mathématiques sans aucun doute à cause de cette unité. Les mathématiques explosent en quantité, les connaissances augmentent de façon exponentielle (ce que l'on sait aujourd'hui est sans commune mesure avec ce que l'on connaissait il y a seulement cent ans), mais elles conservent une cohérence indiscutable. Les mathématiques ont réussi à croître non pas comme un arbre, mais plutôt comme une nébuleuse connexe: il y a des passerelles dans tous les sens, je trouve ça vraiment remarquable. La structure des mathématiques évoque un graphe expenseur, un sujet mathématique aujourd'hui très à la mode.

De quoi s'agit-il?

Étienne Ghys: Lors du dernier congrès international de mathématiques, plusieurs conférences plénières en parlaient. Imaginons un graphe en forme d'arbre. En retirant un sommet à l'intérieur, on obtient deux morceaux, deux graphes plus petits. Les graphes expenseurs sont à l'opposé: on a du mal à les couper en deux morceaux de taille significative. On a beau retirer des sommets, le graphe reste d'un seul tenant. Les graphes expenseurs ont une propriété d'hyperconnectivité. Internet, un graphe d'environ 10 milliards de sommets, est un exemple. Le nombre de pages Internet qu'il faudrait fermer pour couper le monde en deux parties de grande taille qui ne communiqueraient plus est très grand.

Le mathématicien russe Gregori Margulis, aujourd'hui à l'université Yale, aux États-Unis, en a construit

dans les années 1980. C'est un sujet vraiment intéressant et qui, en passant, est relié à l'arithmétique.

De quelle façon?

Étienne Ghys: Au début, dans les années 1970, on avait démontré l'existence de tels graphes par des moyens probabilistes, mais on n'en connaissait aucun que l'on pouvait décrire de façon explicite. Finalement, Gregori Margulis y est parvenu en utilisant les nombres premiers et des graphes dits de Cayley (qui encodent la structure d'un groupe). En d'autres termes, aujourd'hui on peut construire explicitement de grands graphes expenseurs grâce aux nombres premiers.

Gregori Margulis est un grand mathématicien. Médaille Fields en 1978, il n'a pas pu venir chercher sa récompense à Helsinki, parce que l'Union soviétique ne l'a pas autorisé à sortir de son pays. Il a donc envoyé sa conférence par la poste et c'est Jacques Tits, Prix Abel en 2008, qui l'a lue. Elle annonçait la démonstration du théorème d'arithméticité, un résultat absolument extraordinaire. Il continue à travailler aujourd'hui, sur de nombreux sujets.

Est-ce que les nombres ont leur place dans votre spécialité, la géométrie et les systèmes dynamiques?

Étienne Ghys: Et comment! C'est justement un de ces nombreux exemples de connexion entre des domaines qu'on pensait indépendants. Dans ce cas précis, les systèmes dynamiques ont remis de l'ordre dans les nombres.

Il s'agit d'une question d'approximation diophantienne. L'idée est d'approcher un nombre irrationnel et de s'intéresser à la qualité de l'approximation. Par exemple, je peux approcher le nombre π par $22/7$, mais aussi par $355/113$. Quel est le lien entre l'erreur commise et la taille du numérateur et du dénominateur du nombre rationnel? Cette question est un sujet majeur.

Les mathématiques explosent en quantité, le savoir augmente de façon exponentielle

Certains nombres, dits de Liouville, sont très bien approchés par des nombres rationnels. Pourquoi? Par exemple, construisons le nombre suivant: un «0», une virgule, un «1», 10 000 «0», un «1», un million de «0», un «1», un milliard de «0», un «1», un milliard de milliards de milliards de milliards de «0», encore un «1»... Dans son écriture décimale, ce nombre est essentiellement constitué de «0», avec de temps en temps, et de plus en plus rarement un «1». Il est bien sûr irrationnel, car les décimales ne sont pas périodiques, mais il est extrêmement bien approché par un nombre rationnel puisque si je m'arrête par exemple au dix millièmes «1», les «0» qui suivent sont tellement nombreux que l'erreur commise en le tronquant à ce niveau est microscopique. Ce nombre est *presque* rationnel. Or un très ancien théorème de Liouville, de la fin xix^e siècle, affirme qu'un tel nombre est nécessairement transcendant. C'était la première fois que l'on mettait en évidence cette propriété!

Elle signifie que le nombre en question ne peut pas être solution d'une équation à coefficients entiers. C'est le cas de π , de e ... Mais à cette époque, on l'ignorait.

Maintenant, à l'opposé, on trouve... le nombre d'or. Le nombre d'or est irrationnel, Platon le savait, Euclide en parle... Et il est très mal approché par des rationnels. On parle alors de nombres diophantiens.

Un autre théorème du début du xx^e siècle va nous conduire à la dynamique. Il stipule que le nombre d'or (ainsi que quelques autres qui lui sont très reliés) est le pire de ces nombres diophantiens: aucun autre nombre n'est aussi loin des rationnels. L'image est saisissante!

À cette aune, quel nombre suit le nombre d'or? C'est le nombre d'argent, qui correspond à $\sqrt{2}$. Il est très mal approché par les nombres rationnels, mais l'est un peu mieux que le nombre d'or. Viennent >

➤ ensuite le nombre de bronze, et d'autres encore. Ils forment ensemble la suite de Markov et convergent vers une limite. Ils constituent tout un domaine d'étude, qu'on appelle le spectre de Markov et de Lagrange.

J'en viens au rapport avec la dynamique. Les tout derniers théorèmes qui décrivent la nature de ces nombres mal approchés par des rationnels sont le fait de l'école brésilienne. Leurs énoncés parlent de nombres, mais dès la première ligne de démonstration, on parle de systèmes dynamiques, d'orbites qui convergent, ou pas... Ce courant a été initié pour l'essentiel par Gregori Margulis, encore lui, dans les années 1980. Marina Ratner, décédée il y a peu, a également joué un rôle important.

Ce lien entre différents domaines, et tous les autres, que disent-ils de la nature des mathématiques ?

Étienne Ghys : Difficile de répondre... Ces multiples connexions disent peut-être que les mathématiques sont importantes. Elles refusent d'être coupées en morceaux, alors que depuis trois mille ans, beaucoup ont cherché à le faire.

La distinction fréquente entre les mathématiques pures et appliquées en est une bonne illustration. À certaines périodes de l'histoire, cette différence ne faisait aucun sens. Carl Friedrich Gauss par exemple, était-il théoricien ou non ? Astronome ou mathématicien ? Impossible de trancher. Le génie des *Disquisitiones Arithmeticae* (un texte fondamental de théorie des nombres), l'inventeur du théorème de représentation conforme et l'arpenteur du royaume de Hanovre sont un seul et même Gauss. Dans son esprit, il n'y a ni mathématiques pures ni appliquées.

À d'autres moments, la situation change. Ainsi, je pense qu'Henri Poincaré faisait une différence entre les deux, même s'il s'est illustré dans les deux registres. Ensuite, une bonne partie des mathématiques françaises du xx^e siècle ont séparé le pur et l'appliqué, ce qui a d'ailleurs eu un certain nombre d'avantages pendant un temps.

Du point de vue de la politique scientifique, le CNRS a un temps envisagé de scinder en deux la section de mathématiques. Cela ne s'est heureusement pas fait, et aujourd'hui, plus personne n'y pense. Mais on peut encore repérer quelques réminiscences de ce débat. Ce modèle s'applique même à la science tout entière, où l'on essaie d'opposer la recherche fondamentale et la recherche appliquée.

Si les mathématiques se dispersaient dans tous les sens et perdaient leur cohésion, alors on en déduirait que l'objet central situé derrière n'existe pas. J'ai plutôt le sentiment que la cohérence, confirmée depuis des siècles, prouve que l'on parle de quelque chose d'unique, que l'on appelle « mathématique ».

En tant qu'adepte de la diffusion, le nombre a-t-il un statut particulier lorsqu'il s'agit de partager les mathématiques avec le grand public ?

Étienne Ghys : Première remarque, nous manipulons des nombres tous les jours, à peu près correctement. Ensuite, tout le monde croit savoir ce qu'est un nombre (pourant, rien n'est moins sûr), mais presque personne ne s'est jamais vraiment posé la question. Pour ces raisons, les nombres ont en effet un rôle important dans la diffusion des sciences et des mathématiques en particulier : ce sont des objets à la fois familiers et méconnus.

Par exemple, sur le site *Images des mathématiques*, que j'ai contribué à créer en 2009, l'article le plus lu, et de très loin, est consacré aux... tables de multiplication ! Ça fait réfléchir. Pourquoi celui-là ? En regardant de plus près la fréquentation, on observe un pic à chaque rentrée scolaire. C'est passionnant. Les parents se posent des questions pour leurs enfants. Il y a une demande dans nos rapports aux nombres.

d'un grand nombre de mathématiciens pendant plusieurs siècles. Je crois qu'il faudrait commencer par dire ça aux enfants : ils sont les héritiers d'un passé très riche.

Jusqu'au Moyen Âge, les additions étaient faisables, mais les multiplications restaient très compliquées, même avec le système décimal. Dans une lettre, un riche marchand allemand demande conseil à un universitaire pour orienter son fils. L'universitaire répond que s'il s'agit pour son fils de ne faire que des additions, alors une université allemande devrait suffire. Mais s'il faut multiplier, le fils doit partir étudier en Italie. Des techniques se développaient donc, progressivement.

Pour résumer, le nombre est essentiel pour la diffusion car les gens sont intéressés. Les enfants adorent qu'on leur explique comment multiplier facilement avec les doigts. Et l'on peut s'adapter à tous les auditoires. Pour un public plus averti, on peut par exemple aborder la cryptographie, les nombres premiers... Le nombre sert en toute occasion !

Parmi les grands problèmes qui restent à résoudre en théorie des nombres, lesquels vous semblent être une sorte de graal ?

Étienne Ghys : Je ne vais pas être très original, mais il y a bien sûr l'hypothèse de Riemann sur les nombres premiers qui reste centrale depuis très longtemps.

Tout le monde croit savoir ce qu'est un nombre, mais qui s'est vraiment posé la question ?

Dans cet article, j'explique des choses très simples, comme les méthodes employées à l'école primaire pour les additions et les multiplications. Et je commence par une question : « Comment les Romains pouvaient-ils multiplier CXXIV par XXIX ? » C'est impossible.

À l'école, un enfant apprend des algorithmes, pas très compliqués, pour faire des opérations. Il bénéficie des progrès conceptuels gigantesques dus au travail

Intrinsèquement, pour quelles raisons est-elle si importante ?

Étienne Ghys : Parce que les nombres premiers sont les briques élémentaires de l'arithmétique, c'est-à-dire, on l'a dit, de la moitié des mathématiques. La distribution asymptotique des nombres premiers parmi les nombres entiers, c'est vraiment la base. Tous les nombres entiers sont fabriqués à partir de ces nombres premiers. On comprend alors

que l'on veuille les compter, ça me paraît indiscutable.

En ce moment, nous fêtons les 150 ans du tableau périodique des éléments de Mendeleïev, une classification de tous les atomes existants sur la base de leurs constituants et qui sous-tend leurs propriétés chimiques. L'hypothèse de Riemann est du même niveau: elle mettrait de l'ordre dans les «atomes des nombres». Aucun doute, c'est une question centrale, qui dépasse même le cadre de la théorie des nombres. D'ailleurs, il est possible de la reformuler en termes de systèmes dynamiques.

Quel autre grand problème peut-on citer ?

Étienne Ghys : J'aime bien ce problème $3n+1$, ou conjecture de Syracuse: à partir d'un nombre entier strictement positif, on le divise par 2 s'il est pair, sinon, on le multiplie par 3 et on ajoute 1, et on recommence avec le résultat. Arrivera-t-on toujours à 1 ?

Je n'ai aucune idée de sa place dans le paysage mathématique (en fait, je ne vois pas très bien en quoi il est important), mais il se prête volontiers à la diffusion: on peut tout à fait en parler avec n'importe qui, évoquer ce problème en tant que tel, son histoire, les progrès quant à sa résolution... Au passage, on balaie une idée reçue selon laquelle tous les problèmes mathématiques ont été résolus par les Grecs. Non, il existe bel et bien des problèmes encore non résolus !

Cette conjecture offre également l'occasion, lors d'une conférence ou en discutant plus simplement, de mettre en évidence de vrais liens structurels entre mathématiques et informatique.

Avec le problème $3n+1$, on multiplie par trois, on divise par 2, on ajoute 1... et l'on se demande si l'on peut arriver à la case 1. De même, lorsqu'un mathématicien raisonne, il met bout à bout un certain nombre de raisonnements élémentaires, des syllogismes, et regarde où ils le mènent, l'objectif étant d'arriver à l'équivalent d'une case 1, en l'occurrence une case «Oui, c'est démontré».

Syracuse permet d'illustrer des questions sur ce que peut être un algorithme qui ne finit jamais, un problème fondamental en informatique, un domaine dans lequel justement, on doit prouver qu'un algorithme, comme Parcours Sup, conduit à une conclusion dans tous les cas.

Pour cela, le problème $3n+1$ a des vertus pédagogiques que je trouve

vraiment intéressantes. On peut expliquer ce que sont les mathématiques, un algorithme, et même qu'il existe des énoncés pour lesquels on a beau développer tous les syllogismes que l'on veut, on n'arrivera jamais à dire s'ils

Suite au discours d'Édouard Philippe, un comité se réunit à l'Académie et transmettra aux autorités différentes recommandations. Par le passé, l'Académie s'est souvent exprimée sur des sujets divers, comme les enfants et les écrans, les

Aujourd'hui, les enfants sont les héritiers d'un passé mathématique très riche

sont vrais ou faux. Ils sont indécidables. C'est le fameux théorème de Gödel.

Le problème $3n+1$ permet d'aller très loin, et en cela, c'est un outil de choix pour transmettre les mathématiques. Et cet aspect est très important pour moi.

Depuis janvier 2019, vous êtes secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Quel est votre rôle ?

Étienne Ghys : L'Académie des sciences, créée en 1666 par Colbert, est investie de plusieurs missions: parmi elles, on peut citer diffuser la science, conseiller le gouvernement, favoriser l'enseignement des sciences... La vie de l'Académie est organisée par un bureau constitué d'un président (aujourd'hui Pierre Corvol), d'un vice-président (Patrick Flandrin) et de deux secrétaires perpétuels. Je suis l'un d'eux (l'autre est Pascale Cossart). En quelques mots, mon rôle est simplement d'orienter l'action de cette académie.

Par exemple, le Premier ministre a récemment prononcé un discours annonçant un plan pluriannuel pour la science. Or dans notre académie, un grand nombre de scientifiques réfléchissent au fonctionnement de la science, au rôle du programme d'investissements d'avenir, de l'Agence nationale de la recherche (ANR), du CNRS dont on fête les quatre-vingts ans cette année... Ces structures doivent être repensées régulièrement. Par exemple comment harmoniser les rôles des chercheurs CNRS et des enseignants-chercheurs universitaires ?

mathématiques à l'école primaire, la réforme du baccalauréat...

Êtes-vous en lien avec en lien avec l'Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques (OPECST) ?

Étienne Ghys : Oui, avec cette instance présidée par Gérard Longuet et dont Cédric Villani est le premier vice-président, nous organisons des petits-déjeuners mensuels qui réunissent parlementaires et scientifiques autour d'un thème particulier. Le prochain traitera de la cybersécurité.

Par ailleurs l'Académie organise nombre de colloques, parfois importants notamment celui à venir sur les insectes. Certaines de ses manifestations sont destinées au grand public, comme les «5 à 7» dont je m'occupe particulièrement. À chaque fois, la grande salle de séances où ils se déroulent est pleine à craquer. Le dernier était dédié aux femmes de science oubliées, comme Alicia Boole, une mathématicienne britannique du xx^e siècle que personne ne connaît.

Nous nous préparons aussi à commémorer les cinq cents ans de la mort de Léonard de Vinci, en mettant à l'honneur douze de ses codex dont l'Institut est propriétaire.

Une dernière chose. L'Académie des sciences décerne chaque année des dizaines de prix, généralement bien dotés. La sélection des lauréats est un travail gigantesque. ■

Propos recueillis par Loïc Mangin

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280
08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54
34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72
20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 5
61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 860
21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778
40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47
99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881 71
32083 81420 61717 76691 47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 1712
95909 21642 01989 38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952 03530 18529 68995 77362 23
13151 55748 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983 81754 63746 49393 19255 06040 09277 01
16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744 94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 23
52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511 25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279 67
21992 45863 15030 28618 29745 55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955 32116 53449 87
98818 34797 75356 63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 8000 81647 06001 61452 49192 173
68548 16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333 62416 86251 89835 69485 56209 921
67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383 82796 79181 81454 10095 38837 86360 95068 00342 2
84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863 07124 27862 20391 9445 04712 37137 86960 95636 43719 17287 46
32645 99581 33904 78027 59009 94657 64078 9426 94683 9835 99570 98258 22620 52248 94077 26719 47826 84
36394 43745 53050 68203 49625 24517 49399 67843 14298 0911 65925 09372 2169 92387 41059 78
92846 81382 68683 86894 27741 55991 85592 51559 53959 4311 99725 24680 92718 72736 44695 84865 38367 36
43904 51244 13654 97627 80797 71569 14359 9110 12961 6081 41694 8681 38484 06353 42207 22258 28488 64
27394 52267 46767 88952 52138 52254 99546 6611 82398 6456 96116 3513 62305 77456 49803 55936 34568 174
96596 09402 52288 79710 89314 56691 36867 2211 89405 6011 50330 9179 28680 92087 47609 17824 93858 9
65549 78189 31297 84821 68299 89487 22658 8048 5640 1427 17755 1323 79641 9111 97462 34364 54285 844
73573 95231 13427 16610 21359 69575 23144 29524 8117 18711 0117 1103 99344 0371 9731 05785 390
33214 45713 86875 19435 06430 2181 31910 48481 0031 4146 8111 81911 97939 95206 1111 63428 75
98391 01591 95618 14675 14269 1239 8940 90718 64942 3111 95146 55022 52316 0381 93014 20
08303 90697 92077 34672 21825 62599 1150 14215 03068 03844 7111 0266 46659 25201 49744 1507 3
04863 31734 64965 14539 05796 26856 1011 98106 65879 6981 35175 38 40525 1159 10371 20628 0190 3
99360 07230 55876 31763 59421 87312 51471 2051 9112 86125 1732 791 98414 382 91644 70609 575
91098 16909 15280 17350 67127 48583 22287 18352 09353 96572 5121 38579 36 98820 9144 21006 75103 346
85163 98315 01970 16515 11685 17143 76576 18351 55650 88490 9913 59982 734 55283 3115 50764 79185 358
98570 64204 67525 90709 15481 41654 98594 61637 18027 09810 1309 9244 19575 71282 8159 23233 26097 29
91193 25974 63667 30583 60414 28138 83032 03824 90375 8911 43744 17029 176 56180 9311 44403 07074 692
11011 00449 29321 51608 42444 85963 7111 38952 2811 38312 35526 58215 1495 76857 2613 34418 93039 68
73189 15441 10104 46823 25271 62010 52652 27211 10803 96665 57309 25477 19557 85376 34613 20653 10989 652
35662 01855 81007 29360 65987 64861 17910 45334 88503 46113 65768 6711 49441 66803 1265 79787 71855 60
34443 18586 76975 14566 14068 00700 23787 76591 34401 71274 94704 21132 23053 89945 61314 07112 70004 07
58807 97270 82668 30634 32858 78569 83052 35808 93306 57574 0676 3716 37752 54202 11495 57615 81400 250
79259 23099 07965 47376 12551 76567 51357 51782 96664 54779 1111 11299 61489 03046 39947 13296 21073 404
97131 11790 42978 28564 75032 03198 69151 40287 08085 99048 01094 12147 22131 79476 47772 62241 42548 545
75850 43063 32175 18297 98662 23717 21591 60771 66925 47487 38986 65494 94501 14654 06284 33663 93790 03
96571 20918 07638 32716 64162 74888 80078 69256 02902 28472 10403 17211 86082 04190 00422 96617 11963 77
96318 62947 26547 36425 23081 77036 75159 06735 02350 72835 40567 04038 67435 13622 22477 15891 50495 309
32599 39780 54193 41447 37744 18426 31298 60809 98886 87413 26047 21569 51623 96586 45730 21631 59819 31
67242 29246 54366 80098 06769 28238 28068 99640 04824 35403 70141 63149 65897 94092 43237 89690 70697
38379 86230 01593 77647 16512 28935 78601 58816 17557 82973 52334 46042 81512 62720 37343 14653 19777 74160
33441 95215 41341 89948 54447 34567 38316 24993 41913 18148 09277 77103 86387 73431 77207 54565 45322 07770
09263 60197 59882 81613 32316 66365 28619 32668 63360 62735 67630 35447 76280 35045 07772 35547 10585 954
80624 64362 67945 61275 31813 40783 30336 25423 27839 44975 38243 72058 35311 47711 99260 63813 34677 6879
87040 85913 37464 14428 22772 63465 94704 74587 84778 72019 27715 28073 17679 07707 15721 34447 30605 70073
63128 40425 12192 56517 98069 41135 28013 14701 30478 16437 88518 52909 28545 20116 58393 41965 62134 914
90496 52098 58033 85072 24264 82939 72858 47831 63057 77756 06888 76446 24824 68579 26039 53527 73480 30
09164 39613 62676 04492 56274 20420 83208 56611 90625 45433 72131 53595 84506 87724 60290 16187 66795 24
91930 64553 77991 40373 40432 87526 28889 63995 87947 57291 74642 63574 55254 07909 14513 57111 36941 091