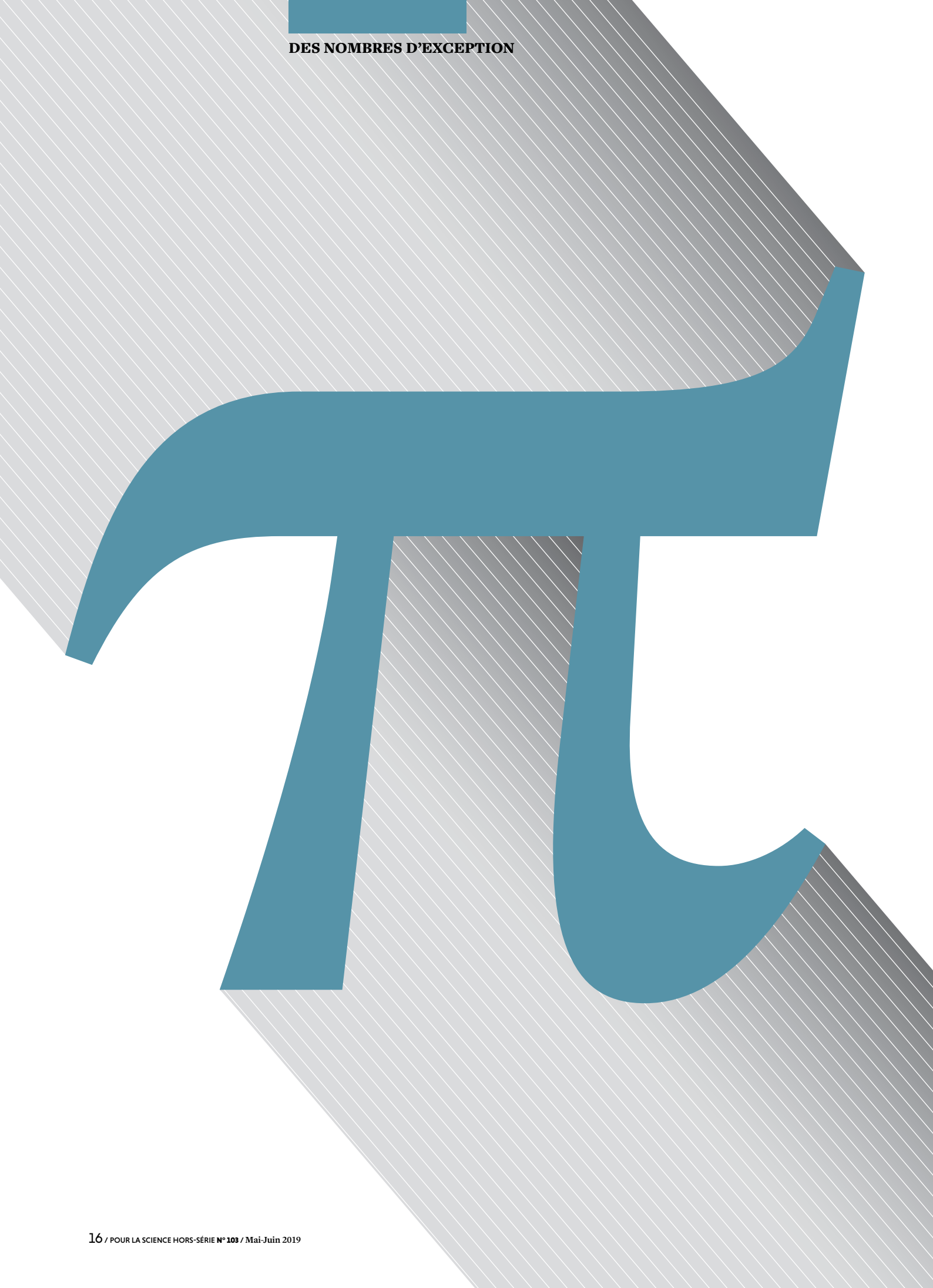
© Patrick Cœuru

DES NOMBRES D'EXCEPTION

Le nombre d'or et π sont parmi les plus célèbres. Connus depuis l'Antiquité, ils n'ont pourtant pas encore révélé tous leurs secrets. D'ailleurs, on découvre qu'ils surgissent où on ne les attend pas : dans les quasi-cristaux, dans du sable jeté sur le sol, dans des fractales... Ces deux stars ne doivent pas occulter la richesse d'autres nombres parés de tout aussi extraordinaires propriétés : les nombres palindromes, ceux de Schur...

Un peu plus de six mille décimales de π sur lesquelles se déploient deux séries de spirales : huit dans un sens et treize dans l'autre. Ces nombres sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, où le rapport de deux termes consécutifs tend vers le nombre d'or.



L'ESSENTIEL

- On sait calculer avec efficacité plusieurs milliards de décimales de π grâce à des formules complexes.
- Des méthodes plus rustiques, et moins performantes, existent aussi, par exemple en jetant du sable sur un carré, ou bien en tirant au fusil sur une cible.
- On a récemment découvert d'autres moyens inattendus. Ainsi, le choc de billes près d'un mur révèle les premières décimales de π.
- Ce nombre se cache aussi dans l'ensemble fractal de Mandelbrot et dans le jeu de la vie de John Conway.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal).

Le nombre π est partout !

L'ubiquité du nombre π ne cesse d'étonner. On peut l'approcher avec du sable, des aiguilles, un fusil… Et récemment encore, il est apparu là où personne ne l'attendait !

Les staphylocoques sont des bactéries ubiquitaires, du microbiote intestinal jusqu'aux sols. Le Bien et le Mal sont ubiquitaires dans la littérature. Certaines roches le sont aussi. L'ubiquité, c'est-à-dire «le fait d'être présent partout à la fois ou en plusieurs lieux en même temps», existe même en mathématiques. Ainsi, parmi les nombres, π est celui qui jouit le plus spectaculairement de cette propriété: on le rencontre sans cesse. L'une des conséquences est qu'on découvre encore de nouvelles façons de calculer π.

Il est devenu difficile de battre les formules qui évaluent très vite ce nombre, parce que les meilleures méthodes connues résultent de recherches approfondies, qu'elles sont d'une grande subtilité, et qu'elles sont d'une époustouflante efficacité. Aujourd'hui, le record de calcul donne 31415 milliards de décimales de π et se fonde sur plusieurs formules, comme celle-ci, due aux frères David et Gregory Chudnovsky («!» se lit factorielle: $n\,! = 1\times2\times\ldots\times n$)

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(6k)!(k!)^3(640320)^{3k+3/2}}$$

Les étranges et nouvelles méthodes de calcul de π ne peuvent rivaliser avec cette extraordinaire formule (en se limitant au terme $k=0$, on trouve $\pi=3{,}1415926535897342\ldots$, ce qui est correct jusqu'au 14e chiffre), mais >

elles valent que l'on s'y intéresse pour le défi, la beauté et même l'amusement.

Certaines méthodes utilisent des procédés physiques (*voir l'encadré ci-dessous*). La méthode de Monte-Carlo pour calculer π se fonde sur un principe simple: la surface d'un disque de rayon r est πr^2. On fait tomber au hasard des grains de sable sur un carré de côté r; si les grains le recouvrent uniformément, la proportion de grains tombés dans le quart de disque de rayon r donne une valeur approchée de $\pi/4$. On obtient ainsi quelques décimales de π par l'expérience.

TIRER π AU FUSIL

En pratique, cette méthode souffre d'un grave défaut: elle suppose que l'on sache disposer des grains de sable uniformément sur le carré. Or en les lançant vers le centre, par exemple, les grains de sable auront une distribution plus dense vers le centre et plus éparse sur les bords. Le calcul sera faussé!

Des méthodes statistiques corrigent cette non-uniformité. L'une d'elles consiste à compter le nombre de grains P en affectant à chacun un coefficient inversement proportionnel au nombre de grains situés dans un petit cercle autour de lui. Les grains situés dans une zone dense sont ainsi moins comptés, ce qui corrige la non-uniformité.

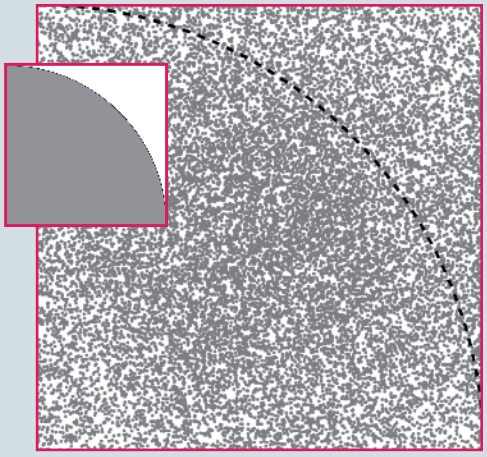
Dans une expérience plus agressive, Vincent Dumoulin et Félix Thouin, de l'université de Montréal, ont utilisé une méthode de ce type en tirant sur une cible distante de 20 mètres avec un fusil. Les expérimentateurs ont ainsi créé 30857 trous dans la cible. Le calcul, avec correction de la non-uniformité, a donné π=3,131, ce qui correspond à une erreur de 0,3 %.

DES AIGUILLES ET DES BILLES

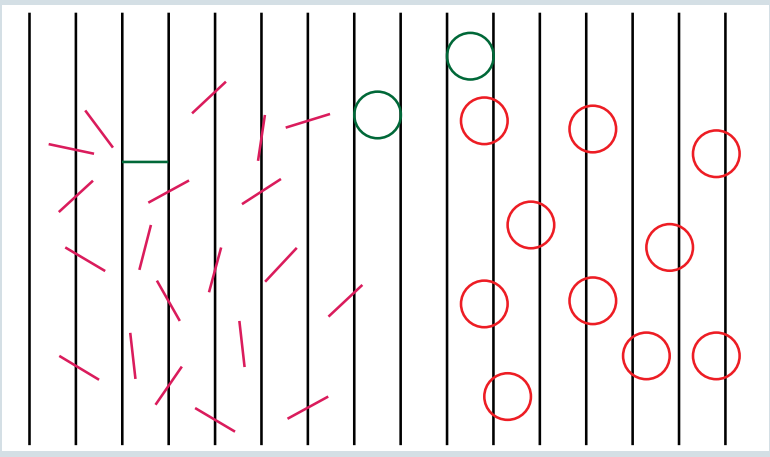
Les aiguilles de Buffon constituent un autre moyen d'approcher π par la physique. On lance n aiguilles de longueur L sur un parquet dont la largeur des lattes est L; on compte le nombre k d'aiguilles coupant les lignes parallèles de jonction entre lattes; le quotient $2n/k$ est une valeur approchée de π. Cette méthode très classique, comme celle des coups de fusil, ne donnera jamais plus de quatre décimales exactes de π.

La méthode proposée par Gregory Galperin, de l'université de l'Illinois, est plus intéressante et surprenante. Elle n'utilise que des chocs entre billes respectant les lois de la physique classique et produisant les décimales de π les unes après les autres. Non seulement le dispositif imaginé

CALCULER π PAR LA PHYSIQUE



En comptant les points ou grains de sable supposés uniformément étalés sur un quart de disque inscrit dans un carré, et en faisant le rapport entre le nombre obtenu et le nombre total de grains de sable dans le carré, on obtient une valeur approchée de $\pi/4$. Lorsque les points sont choisis par des méthodes numériques (par exemple des générateurs de nombres pseudo-aléatoires), on parle de méthode de Monte-Carlo. Si la répartition des points n'est pas uniforme, un ajustement statistique est nécessaire.



La méthode du naturaliste Buffon consiste à lancer aléatoirement une aiguille de longueur L sur un tracé constitué de droites parallèles espacées de la longueur L : la probabilité de l'intersection d'une aiguille avec une droite est $2/\pi$: en lançant beaucoup d'aiguilles et en comptant la proportion d'intersections, on en tire une approximation de π.

Pour comprendre, supposons que, en moyenne, le nombre de points d'intersection d'une courbe quelconque avec les droites soit proportionnel à sa longueur. Pour un cercle de diamètre L, ce nombre est toujours égal à 2 ; alors le nombre de points d'intersection pour l'aiguille sera en moyenne $2L/\pi L = 2/\pi$.

donne π, mais il le donne écrit en base 10, et cela sans qu'aucun calculateur mécanique ou électronique ne soit mêlé à l'affaire.

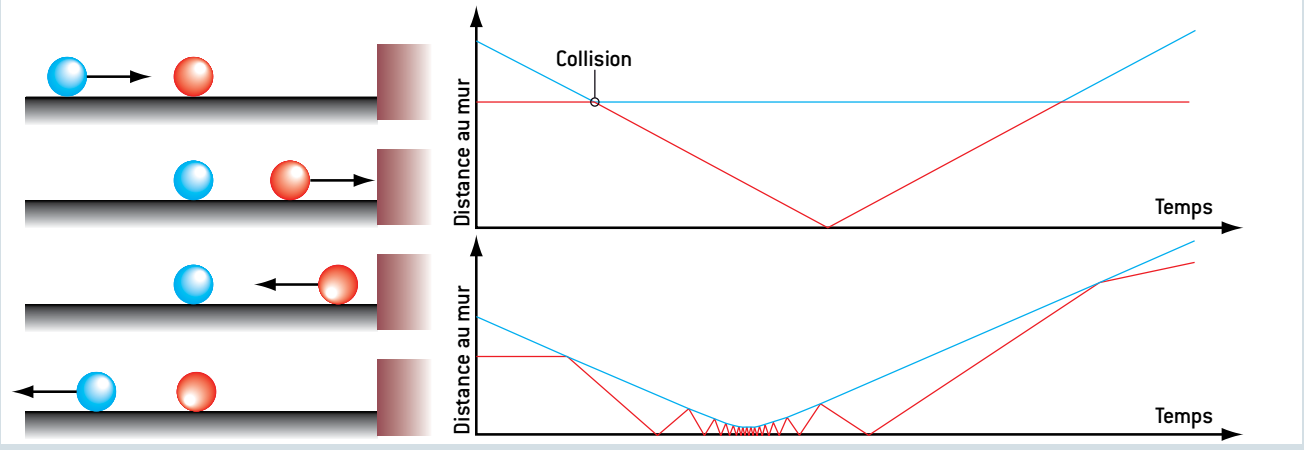
Par rapport à celle de Buffon et du fusil, la méthode de Galperin se dispense de hasard : le procédé déterministe donne donc, non pas une approximation de π, mais exactement les premiers chiffres de π… pour peu que le dispositif matériel soit conforme au modèle théorique.

Pour comprendre, commençons par le cas le plus simple (*voir l'encadré ci-dessous*). On considère deux billes A et B de masse identique (en fait, des masses ponctuelles, la rondeur des billes ne joue aucun rôle). La bille A est immobile à une distance L d'un mur plat M. On lance la bille B perpendiculairement au mur M dans la direction de A. Elle cogne la bille A de façon parfaitement élastique (conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement). La bille B s'immobilise donc, et A part vers le mur M avec la vitesse qu'avait B et qu'elle lui a transmise. La bille A cogne le mur, rebondit (le choc est toujours parfaitement élastique) et repart vers B, toujours avec la même vitesse. La bille A cogne B, A s'immobilise et B repart en s'éloignant du mur. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Il y a eu trois chocs: deux entre les billes A et B et un entre la bille A et le mur. Le chiffre 3 est le premier de π. Ce n'est pas un hasard !

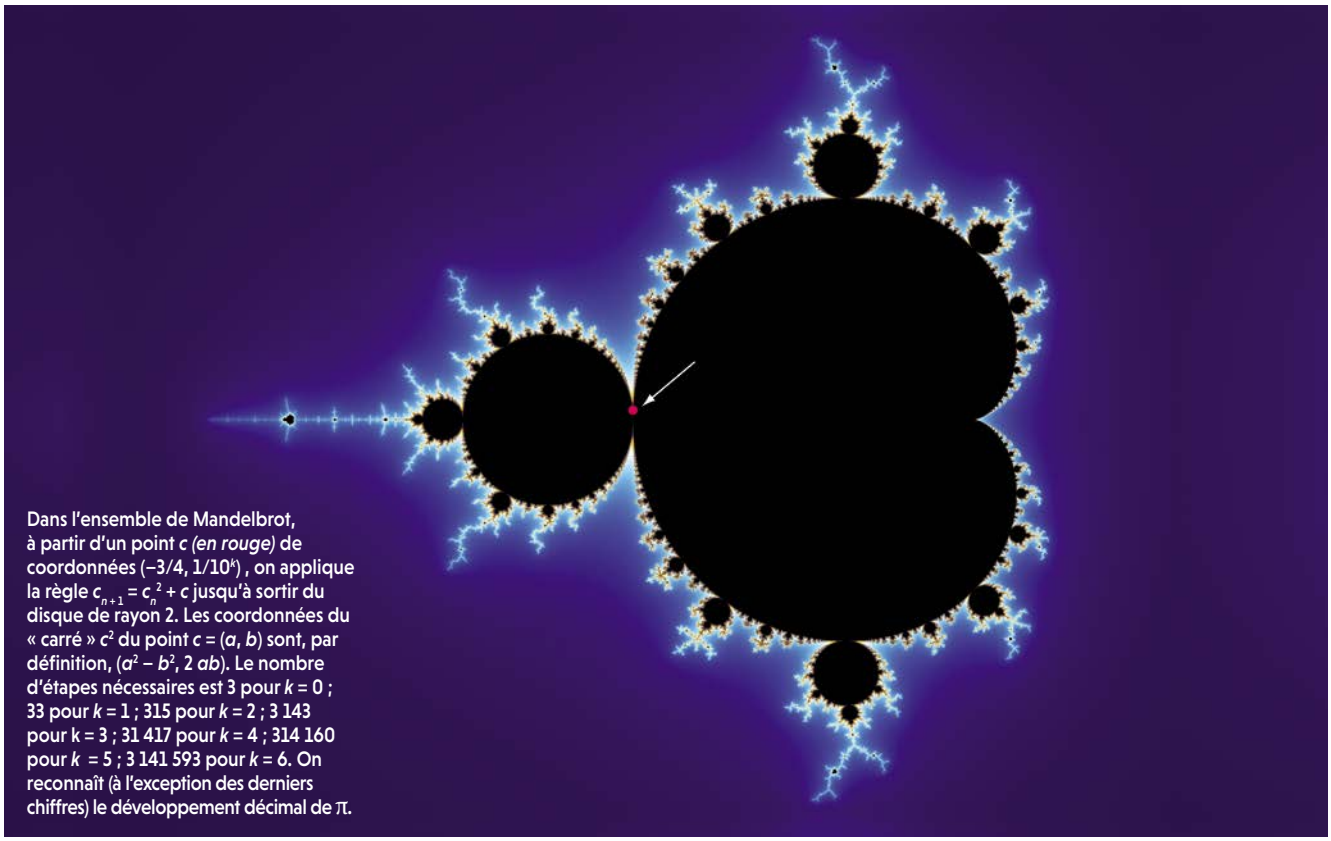
Si maintenant on refait l'expérience avec une bille B dont la masse est 100 fois celle de A, le schéma des collisions est plus compliqué. Avant que B et A ne se séparent définitivement, le nombre de chocs entre A et B et de la bille A avec le mur est 31. Ce sont les deux premiers chiffres décimaux de π. Plus généralement, si le rapport des masses entre B et A est 10^{2n}, alors le nombre de chocs donnera exactement les $n+1$ premiers chiffres décimaux de π. Ainsi, pour un rapport de masse de 10000, il y a 314 chocs; pour un rapport 1000000, il y a 3141 chocs; etc.

UNE BELLE MÉTHODE, MAIS…

Pour les premières valeurs de n, on peut écrire de petits programmes qui confirment les affirmations indiquées. Le résultat général est cependant démontré de manière parfaitement rigoureuse. Il nécessite juste une petite hypothèse : les $2n$ premiers chiffres de π ne doivent pas se terminer par $n-1$ fois le chiffre 9. On sait que c'est vrai pour n plus petit que 6650000000000, puisqu'on connaît explicitement les décimales de π, mais pour n tendant vers l'infini, nul ne sait le démontrer. Cette >



Des chocs entre billes π peut aussi surgir. Prenons une bille bleue et une bille rouge de même masse. La bille rouge est immobile *(a gauche)*. La bille bleue la frappe selon un choc élastique. La bille bleue s'immobilise et la bille rouge se précipite sur un mur où elle rebondit et repart vers la bille bleue. Après le choc, la bille rouge est à nouveau immobile et la bille bleue s'éloigne indéfiniment. Il y a eu 3 chocs *(à droite, en haut)*: 3 est le premier chiffre de π. Avec des masses dans un rapport 100, il y a non plus 3, mais 31 chocs *(à droite, en bas)*. Plus généralement, si le rapport des masses est 100^n, alors le nombre de chocs reste fini, et c'est l'entier correspondant aux $n+1$ premières décimales de π. Ainsi, pour $n = 5$, on aura 314 159 chocs : ce sont les 6 premiers chiffres de π.



Dans l'ensemble de Mandelbrot, à partir d'un point *c (en rouge)* de coordonnées $(-3/4, 1/10^k)$, on applique la règle $c_{n+1} = c_n^2 + c$ jusqu'à sortir du disque de rayon 2. Les coordonnées du « carré » c^2 du point $c = (a, b)$ sont, par définition, $(a^2 - b^2, 2ab)$. Le nombre d'étapes nécessaires est 3 pour $k = 0$; 33 pour $k = 1$; 315 pour $k = 2$; 3 143 pour $k = 3$; 31 417 pour $k = 4$; 314 160 pour $k = 5$; 3 141 593 pour $k = 6$. On reconnaît (à l'exception des derniers chiffres) le développement décimal de π.

> propriété est jugée plus que probable, mais elle reste inaccessible à nos techniques de preuve.

La méthode est magnifique et a étonné les spécialistes des systèmes dynamiques. En revanche, sur le plan pratique, la méthode est d'un intérêt limité. Comment ajuster les masses de A et de B avec la précision exigée? On ne peut espérer faire beaucoup plus que le nombre d'Avogadro, soit environ 10^{24}, ce qui ne donnera que 12 décimales, et les autres mesures sont à l'avenant. Comment être certain de lancer les billes perpendiculairement au mur avec toute l'exactitude nécessaire? Comment s'assurer que les chocs soient parfaitement élastiques et qu'il n'y ait aucun frottement?

Pas plus que la méthode de Buffon ou du fusil, on ne tirera de celle de Galperin un grand nombre de chiffres de π. Si l'on veut s'en tenir à des méthodes physiques, le mieux est peut-être simplement de mesurer avec soin le périmètre et le diamètre d'un cercle assez grand et de faire le quotient. En réalité, rien ne vaut les calculs purs ne s'appuyant pas sur des hypothèses et des mesures physiques qu'on ne parvient jamais à mener avec plus de quelques chiffres significatifs. Venons-en donc aux méthodes mathématiques.

Archimède est né, a vécu et est mort à Syracuse, en Sicile. Il fut le premier à proposer une méthode mathématique permettant de calculer les chiffres du nombre π aussi loin qu'on le souhaite. En mathématiques, Syracuse est aussi le nom d'une conjecture qui intéresse beaucoup de monde à cause de sa simplicité.

J'AIMERAIS TANT VOIR SYRACUSE

Cette «conjecture de Syracuse» ou «conjecture de Collatz» propose de partir d'un entier positif quelconque n: s'il est pair, on le divise par 2; s'il est impair, on le remplace par $3n+1$. Et on recommence. La conjecture affirme que quel que soit l'entier initial n, on finit toujours par arriver à 1 (*voir Élémentaire, mais redoutable, par S. Eliahou, page 30*). Personne n'a su la démontrer. Expérimentalement, elle a été vérifiée jusqu'à 10^{20}. *À priori,* elle n'a rien à voir avec π, malgré son nom qui semble faire écho à Archimède. La Syracuse de la conjecture est en fait la ville américaine de Syracuse, dans l'État de New York, dont l'université a joué un rôle important dans la diffusion de la conjecture au monde entier.

Aucun lien avec π ? Pourtant, le Français Roland Yéléhada a mis au point une méthode de calcul de π à partir de la conjecture de Syracuse. Le principe est le suivant. On calcule la suite de Syracuse pour tous les nombres jusqu'à une certaine borne n, par exemple 100. Pour chacune des suites calculées, par exemple [13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], on évalue la longueur, ici 10, et la somme des éléments de la suite, ici 119. On teste si les deux nombres obtenus (10 et 119) ont un

SUR LE WEB

Animation montrant les 31 chocs de deux billes dont le rapport des masses est 100 : https://youtu.be/4UhPTrHIprk

Expérience en ligne sur les aiguilles de Buffon : experiences.math.cnrs.fr/Calcul-de-Pi-avec-des-aiguilles-et.html

diviseur commun plus grand que 1 ; ce n'est pas le cas ici. On prend alors le nombre a de fois où la réponse a été NON, puis on divise a par n, ce qui donne un nombre b. La racine carrée c de $6/b$ est une valeur approchée de π !

La méthode ne donne pas très rapidement les chiffres de π, mais on a des raisons de croire qu'elle converge vers π, car la longueur et la somme d'une suite de Syracuse, à cause de comportements imprévisibles des suites, sont comme deux nombres entiers tirés au hasard. Or on sait, d'après un résultat de 1881 démontré par Ernesto Cesaro, que la probabilité que deux entiers tirés au hasard n'aient pas de diviseur commun supérieur à 1 est $6/\pi^2$. Bien qu'aujourd'hui aucune preuve mathématique rigoureuse n'ait été donnée du résultat quand n tend vers l'infini, les expériences effectuées en écrivant de petits programmes confirment qu'il s'agit bien d'une méthode de calcul de π. Pour n=100, on obtient a=66, b=0,66, c=3,01511... Pour n=1000, on obtient a=606, b=0,606, c=3,146583...

Bien évidemment, il s'agit d'un jeu et pour disposer de beaucoup de décimales de π, ce procédé n'est pas plus recommandable que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin. Une méthode toute aussi étonnante peut-elle faire mieux ? Oui, et elle est plus simple encore à mettre en œuvre.

π CACHÉ DANS UNE FRACTALE

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (*voir la figure page ci-contre*). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite c_0=0, c_1=c, c_2=c_1^2+c,..., c_{n+1}=c_n^2+c,... reste dans une partie bornée du plan ; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du « plan complexe », il suffit, pour comprendre tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe c=a+ib) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2-b^2, 2ab)$.

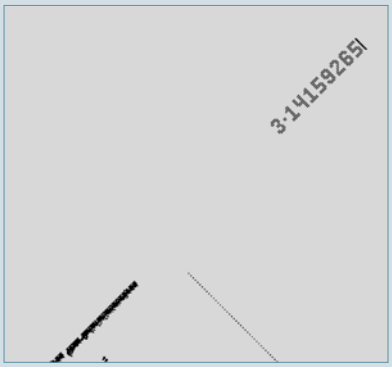
LA PROBABILITÉ QUE DEUX ENTIERS TIRÉS AU HASARD N'AIENT PAS DE DIVISEUR COMMUN SUPÉRIEUR À 1 EST $6/\pi^2$

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point c = (−3/4, 0) de la partie qui se trouve à sa gauche (*en rouge sur la figure page ci-contre*). Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point c et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ c=(−3/4, 1) et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie c=(−3/4, 1/10), il en faut maintenant 33. Avec c=(−3/4, 1/100), il en faut 315. Avec c=(−3/4, 1/1000), il en faut 3143. Avec c=(−3/4, 1/10000), il en faut 31417. Avec c=(−3/4, 1/100000), il en faut 314160. Avec c=(−3/4, 1/1000000), il en faut 3141593... Stupéfaction ! Les chiffres des >

La naissance de π



Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle calcule π. Bien mieux, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π. La configuration initiale est téléchargeable ici : http://bit.ly/1S7PwJw Et pour la faire fonctionner, le logiciel gratuit Golly est disponible ici : http://golly.sourceforge.net

> nombres calculés sont, à l'exception des derniers, ceux de π écrit en base 10 : 314159… Les calculs à programmer pour le vérifier sont particulièrement simples (*voir ci-contre*).

David Boll découvre aussi que, partant de $(1/4+c, 0)$ et en prenant des valeurs de c de plus en plus petites (cette fois, il commence par $c = 1/100$ et divise par 100 à chaque nouvel essai), on tombe sur les entiers suivants : 30, 312, 3140, 31414, 314157, etc. À nouveau, c'est π !

Notons que rien, dans la définition de l'ensemble de Mandelbrot, n'a de rapport avec la géométrie du cercle. Pourtant, une simple itération partant d'un nombre choisi de plus en plus petit donne assez rapidement les décimales de π.

Notons aussi que, par cette méthode, calculer 20 décimales de π demanderait plus de 10^{20} itérations, ce qui est la limite de ce qu'on peut espérer faire aujourd'hui, même en mobilisant les plus puissants ordinateurs. Cette méthode, aussi simple et élégante qu'elle soit, ne peut donc pas rivaliser avec les meilleures méthodes connues de calcul de π, qui sont plus compliquées, mais beaucoup plus efficaces.

LE JEU DE LA VIE ÉCRIT π

Un exploit de calcul d'une autre nature concernant π est lié au célèbre « jeu de la vie » de John Conway. Ce réseau d'automates cellulaires est l'un des moyens les plus élémentaires de mener des calculs. Chaque case du plan infini, muni d'un quadrillage, est occupée par un microcalculateur confronté à une seule alternative :

– Si, à l'instant t, une case est dans l'état *mort* (de couleur blanche), alors le microcalculateur examine ses 8 voisines ; si 3 exactement sont vivantes, la case passe à l'état *vivant* (en noir) à l'instant $t+1$; sinon, elle reste dans l'état *mort*.

– Si, à l'instant t, une case est dans l'état *vivant*, alors le microcalculateur examine ses 8 voisins ; si 2 ou 3 sont dans l'état *vivant*, la case reste dans l'état *vivant* à l'instant $t+1$; sinon, elle meurt. En résumé : « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 ».

Le pouvoir de calcul d'un tel réseau est bien supérieur à ce que l'on peut imaginer, et d'ailleurs John Conway a montré qu'on pouvait calculer avec cet automate cellulaire tout ce qui est calculable par algorithme. Pour cela, il faut la bonne configuration initiale et ne pas être pressé !

En 2010, Adam Goucher, prenant au sérieux le résultat théorique de John Conway, a conçu une configuration du jeu de la vie comportant 1389325 cases vivantes. En évoluant génération après génération, la configuration calcule les chiffres de π écrit en base 10 et, c'est le plus étonnant, va les écrire en diagonale à l'aide de cases vivantes déposées qui dessinent les chiffres en écriture habituelle (*voir l'encadré page précédente*) !

UN PROGRAMME POUR DÉBUSQUER Π

Pour chaque entier *k* à partir de zéro, définissez la suite de couples de nombres réels (a_n, b_n) : $a_0=0$, $b_0=0$, $a_1=-3/4$, $b_1=1/10^k$, $a_{n+1}=a_n^2-b_n^2-3/4$, $b_{n+1}=2a_n b_n+1/10^k$ et déterminez le premier *n* tel que $a_n^2 + b_n^2$ soit supérieur à 4. Les nombres *n* calculés seront les nombres 3, 33, 315, 3143, 31417, 314160, 3141593…

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. DELAHAYE, Le fascinant nombre Pi, *Belin*, 2e éd., 2018.

V. DUMOULIN ET F. THOUIN, A ballistic Monte Carlo approximation of π, 2014. *arxiv.org/pdf/1404.1499.pdf*

G. GALPERIN, Playing pool with π (the number π from a billiard point of view), *Regular and Chaotic Dynamics, vol. 8(4), pp. 375-394*, 2003.

A. KLEBANOFF, π in the Mandelbrot set, *Fractals, vol. 9(4), pp. 393-402*, 2001.

H.-H. STØLUM, River meandering as a self-organization process, *Science, vol. 271, pp. 1710-1713*, 1996.

L'exploit est inouï, mais, une fois encore, c'est un jeu : au bout de plusieurs heures de fonctionnement avec mon ordinateur, la configuration d'Adam Goucher a réussi à écrire 3,14159265. L'obtention d'autres décimales demanderait des jours ou des semaines. Le calcul utilise un produit infini et progresse en $O(n^6)$, ce qui veut dire que s'il faut k heures de calcul pour avoir n décimales, en avoir le double demandera $2^6=64$ fois plus de temps, à supposer que la mémoire disponible sur l'ordinateur ne fasse pas défaut.

π NE COULE PAS DE SOURCE !

Pour terminer, signalons deux méthodes illusoires de calcul de π, parfois présentées comme sérieuses, mais qui en réalité ne vous donneront jamais rien.

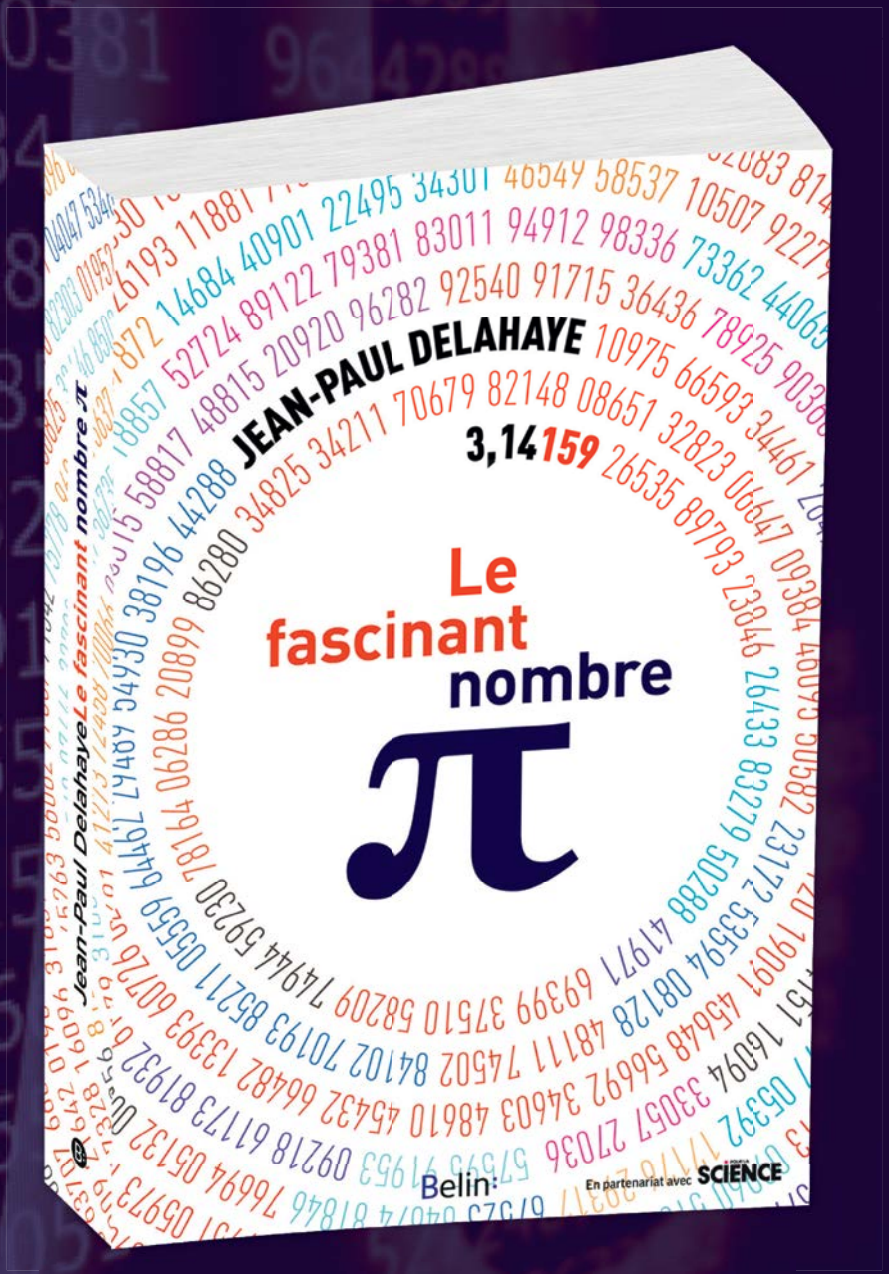
La première pourrait être qualifiée de géographique. Dans un article publié dans la revue *Science* en mars 1996, Hans-Henrik Stølum, de l'université de Cambridge, décrit un modèle d'écoulement des cours d'eau. Il tire de son modèle l'affirmation qu'en moyenne, le rapport entre la longueur d'un fleuve et la distance à vol d'oiseau entre la source et l'endroit où le fleuve se jette à la mer est le nombre π. En se fondant sur ce résultat, on pourrait donc tenter de calculer π en prenant un grand nombre de fleuves, et en calculant la moyenne des rapports entre leur longueur et la distance parcourue à vol d'oiseau entre la source et l'embouchure.

Malheureusement, tous ceux qui, à partir de bases de données géographiques ont essayé, arrivent à des valeurs sensiblement plus petites que π. Il semble bien que le modèle théorique soit inexact.

L'autre méthode illusoire est celle liée à la théorie économique de Martin Armstrong. Cet Américain est l'auteur d'une théorie (*Economic Confidence Model*) selon laquelle l'économie est soumise à des ondes cycliques tous les 8,6 ans et que les prendre en compte permet de prévoir les crises. La durée de 8,6 ans correspond à 3141 jours, soit 1000 π. On a du mal à comprendre ce que π, avec une précision de 4 chiffres, vient faire dans les cycles économiques, mais Martin Armstrong prétend avoir annoncé, grâce à sa théorie, la crise de 1987 au jour près.

Plus récemment, Martin Armstrong avait annoncé une nouvelle crise pour le 1er octobre 2015. Elle ne s'est pas produite ! Tout cela ne semble pas très sérieux et, si les mathématiciens sont bien persuadés de l'importance et de l'ubiquité de π, ils n'ont pas la naïveté de croire en de telles théories dont, d'ailleurs, aucune justification n'est présentée. C'est un plaisir de jouer avec π et de le découvrir partout, mais c'est avant tout un amusement qu'il est sage de ne pas transformer en superstition numérologique. ■

LA STAR
DES MATHÉMATIQUES ET DE LA PHYSIQUE



belin-editeur.com

Belin

Jouons avec les palindromes

121, 404, 123 454 321… faciles à identifier, les nombres palindromes offrent des problèmes de tous niveaux et quelques défis ardus.

L'ESSENTIEL

- Les nombres palindromes sont une infinité et on sait parfaitement les dénombrer.
- On connaît des formules qui engendrent une infinité de nombres palindromes.
- Les nombres premiers palindromes sont probablement une infinité, mais on ne sait pas les dénombrer.
- Le plus beau résultat récemment établi au sujet des nombres palindromes est que tout entier est la somme de trois nombres palindromes.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal).

Les mots «gag», «elle», «rotor» sont des palindromes: ils se lisent de droite à gauche aussi bien que de gauche à droite. «Ressasser» et «rotavator» sont les plus longs mots palindromes en français. Allons plus loin. En négligeant les espaces, les accents, les majuscules et la ponctuation, on sait composer des phrases et même des textes palindromes: *Élu par cette crapule* (Hippolyte Laverdan); *Rue Verlaine gela le génial rêveur* (Jacques Perry-Salkow); *Éric notre valet alla te laver ton ciré* (Maître Capelo qui ajoutait que Luc pouvait remplacer Éric)…

Georges Perec a composé un texte palindromique de 1247 mots. Plus récemment, Frédéric Schmitter et Jacques Perry-Salkow ont écrit un récit palindromique, *Sorel Éros*, qui comporte 10001 lettres. Romain Seignovert a trouvé des palindromes pour toutes les langues européennes (*voir figure ci-dessous*).

Jolis exploits mais qui ne concernent guère le mathématicien. Ce dernier préfère envisager les nombres palindromes. En trouver est facile, puisque toute suite de chiffres ne commençant pas par 0 est un nombre et qu'on peut donc sans difficulté en écrire qui soient des palindromes: 242, 10001 ou 12321. Leur liste, bien sûr infinie, se programme aisément. C'est la suite A002113 de l'encyclopédie en ligne des suites numériques OEIS (https://oeis.org/A002113) l'encyclopédie des suites de nombres entiers. En voici le début: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343...

Les jeux et problèmes que les mathématiciens envisagent à propos des nombres palindromes sont aussi variés et difficiles que ceux d'autres pans de la discipline... et certains restent irrésolus.

COMBIEN SONT-ILS ?

Commençons par des questions faciles. Combien existe-t-il de nombres palindromes en base 10 composés de n chiffres ? Si n est pair, pour avoir un nombre palindrome à n chiffres décimaux, il suffit de choisir comme on le veut ses $n/2$ premiers chiffres en imposant que le premier ne soit pas 0, et de les répéter en ordre inverse. Pour $n = 6$, on choisit par exemple 247, qui donne 247742. On en déduit que le nombre de palindromes à n chiffres, n pair, est exactement $9\times10^{n/2-1}$, soit 900 pour $n = 6$.

Pour $n = 1$, il y a 10 nombres palindromes: 0, 1..., 9. Si n est impair supérieur à 1, en raisonnant comme dans le cas pair, on trouve que le nombre de palindromes à n chiffres est $9\times10^{(n-1)/2}$. On en tire que le nombre de nombres palindromes inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4$... est, respectivement: 10, 19, 109, 199, 1099, 1999, 10999, 19999... (ce qui est toujours supérieur à $10^{n/2}$).

Leur densité (leur fréquence) devient nulle à l'infini et elle est sensiblement inférieure à celle des nombres premiers, ce que l'on démontre ou que l'on constate en examinant le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4$, ..., qui est 4, 25, 168, 1229, >

L'Europe des palindromes. Romain Seignovert, fervent défenseur de l'idée d'une Europe unie, propose cette carte où chaque pays porte un palindrome dans sa langue.

> 9592, 78498, 664579, 5761455... (en ordre de grandeur : $10^n/n$). La série des inverses des nombres palindromes converge vers la limite 3,37018..., alors que la série des inverses des nombres premiers a une somme infinie, marque d'une densité assez forte.

Autre propriété élémentaire : si un nombre palindrome est formé d'un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11, et n'est donc pas un nombre premier (sauf 11 lui-même). Pour le démontrer, on applique le critère de divisibilité par 11 : « Un entier est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11 » (par exemple, 915123 est un multiple de 11 puisque (9+5+2) − (1+1+3) = 11). Pour un nombre palindrome N ayant un nombre pair de chiffres, les deux sommes en question sont égales ; leur différence est nulle, donc N est multiple de 11.

Quittons les rivages de la facilité... Qu'en est-il des nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres ? Peuvent-ils être des nombres premiers ? Plus généralement, qu'en est-il des diviseurs des nombres palindromes ?

Voici d'abord le début de la suite des nombres premiers palindromes (https://oeis.org/A002385) : 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341... Le plus grand nombre premier palindrome connu aujourd'hui est $10^{474500}+999\times10^{237249}+1$, qui est formé de 474 501 chiffres.

On cherche à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers palindromes. Cela semble probable, car les deux propriétés « être un nombre premier » et « être un palindrome », au moins pour les nombres composés d'un nombre impair de chiffres, semblent indépendantes. Cependant, cette intuition un peu vague n'a pas pu être confirmée par une démonstration et donc l'affirmation « Il existe une infinité de nombres premiers palindromes » reste une conjecture.

Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

$1\times1=1$
$11\times11=121$
$111\times111=12321$
$1111\times1111=1234321$
$11111\times11111=123454321$
$111111\times111111=12345654321$
$1111111\times1111111=1234567654321$
$11111111\times11111111=$
$\qquad 123456787654321$
$111111111\times111111111=$
$\qquad 12345678987654321$

Malheureusement, la méthode ne fonctionne plus au-delà, car $1111111111\times1111111111 = 1234567900987654321$

Le sixième des nombres de cette série est vraisemblablement le premier palindrome à avoir attiré l'attention d'un mathématicien. En effet, il est mentionné par Mahāvīra, un mathématicien indien du IXe siècle. Dans son ouvrage en sanskrit *Ganita-sāra-sangraha*, il évoque ce carré parfait en le décrivant comme un nombre « commençant par 1 et allant jusqu'à 6, puis décroissant en ordre inverse ».

Une série de formules donnent, elles, une infinité de nombres palindromes composés :

$11\times11\times11 = 1331$
$11\times11\times111 = 13431$
$11\times11\times1111 = 134431$
$11\times11\times11111 = 1344431$
$11\times11\times111111 = 13444431$
...

Ajoutons encore deux séries infinies :
$11\times111\times(11...11) = 13566...66531$
et $111\times111\times(11...11) = 136899...9998631$

FACTEURS ET NOMBRES PREMIERS

William Banks a démontré que des nombres palindromes ont un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Des nombres palindromes ont donc, par exemple, plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi que des nombres palindromes ont des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire ; ainsi, des nombres palindromes ont un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sakata, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les

LES NON-PALINDROMES

Les nombres strictement non palindromes sont, par définition, les entiers n qui ne sont palindromes dans aucune base b avec $2\le b\le n-2$. On impose la limite $n-2$ car, en base $n-1$, le nombre n s'écrit 11 et est donc toujours palindrome. La suite des nombres strictement non palindromes commence par : 0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 19, 47, 53, 79, 103, 137, 139, 149, 163, 167, 179, 223, 263, 269, 283, 293... qui est la suite A016038 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane.
Une propriété intéressante des nombres strictement non palindromes est que ce sont tous des nombres premiers, à l'exception de 4 et 6.
En voici la démonstration.
On se donne un nombre composé quelconque $n>6$ et on montre que n est palindrome dans une base bien choisie.
• Si n est pair, n s'écrit 22 dans la base $b = n/2-1$, car $n = 2(n/2-1)+2$.
• Si n est impair, on écrit $n = pm$, où p est le plus petit facteur premier de n. Nécessairement, $p\le m$.
• Si $p = m = 3$, alors $n = 9$ s'écrit 1001 en base $b = 2$.
• Si $p = m > 3$, alors n s'écrit 121 en base $b = p-1$, car $121_{p-1} = 1+2(p-1)+(p-1)^2 = 1+2p-2+p^2-2p+1 = p^2 = n$
• Le cas $p = m-1$ est impossible, car p et m sont impairs.
• Si $p<m-1$, alors n est le palindrome pp en base $b = m-1$, car $p(m-1)+p = pm$.
On contrôle à chaque fois que la base proposée vérifie $2\le b\le n-2$ et que les chiffres du palindrome proposé sont des nombres entiers entre 0 et $b-1$.

b \ a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	6 643																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	154											
10	33	121	55	88	55	121	121	191										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	232									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	181	277								
13	313	28	42	98	14	235	154	70	222	84	326							
14	15	1 210	15	408	135	135	45	30	323	60	253	379						
15	693	16	1 265	1 612	80	16	316	80	828	48	241	112	436					
16	17	68	17	119	385	85	170	136	353	221	1 172	170	337	497				
17	341	784	341	18	1 211	307	18	528	252	36	290	126	90	144	562			
18	325	1 733	38	57	209	57	325	209	171	133	1 462	209	323	361	433	631		
19	381	20	514	428	80	40	260	20	666	60	362	140	60	80	514	180	704	
20	21	1 604	21	126	21	1 944	63	273	252	84	761	42	105	421	273	126	541	781

Voici les plus petits entiers palindromes dans deux bases *a* et *b* à la fois, *a* et *b* variant de 2 à 20 ($a<b$). Ce tableau a été établi par Erich Friedman. Ainsi, pour *a* = 2 et *b* = 3, il faut aller jusqu'à 6 643 pour trouver un nombre qui convient : $6643_{10} = 1100111110011_2 = 100010001_3$.

n premiers nombres palindromes tend vers 0 quand n croît. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$, où $\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x. On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes : la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev : les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les huit premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer « nombre premier triplement palindrome » un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres ; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

CHANGEONS LES BASES

Les calculs du nombre de palindromes faits pour la base 10 se généralisent à toute base $b>1$. La propriété « Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11 » devient : « Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321_5 est divisible par 6 : $123321_5 = 5^5+2\times5^4+3\times5^3+3\times5^2+2\times5^1+1 = 4836 = 806\times6$. >

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9+2	11
3	7×7×7	343
4	9×(9×9+2)	747
5	9×9×9×9−5	6 556
6	3×7×7×8×8×8	65 856
7	8×8×8×8×9×(9+2)	405 504
8	8×9×9×9×9×9×9−4	4 251 524
9	8×8×(5×6×8×8×8×9+2)	8 847 488
10	7×7×7×8×(7×8×8×8×9−4)	88 499 488
11	6×8×8×8×9×(6×7×9×9×9+8)	846 747 648
12	7×8×8×8×8×9×(4×7×7×9×9−3)	4 095 995 904
13	9×9×9×9×9×9×(6×7×7×7×7×9−8)	68 899 199 886
14	(9×9×9×9×9×5+4)×(8×8×8×8×9×9−5)	97 955 055 979
15	7×8×(5×9×9×9×9×9×9−7)×(8×9×9×9×9×9−7)	867 685 586 768

À VOS CRAYONS !

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule 9 × (9 × 9 + 2) donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés. Le Français Marc Lapierre a mené les calculs pour les trois dernières lignes.

> Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24 : $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit : « Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois ? » Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile ! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient : « Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$? » Une petite exploration montre aisément que oui. Un bel exemple est 105. En effet : $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$. Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Il est aussi intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls : encore une conjecture !

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est la « conjecture faible de Goldbach », qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach qui, elle, attend toujours une démonstration.

LES SOMMES DE PALINDROMES

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes ? Donnent-elles tous les entiers ? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas ? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers (la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane) qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes : 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083...

Comment le vérifier ? On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

Joseph DeVincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue : en effectuant la somme de deux nombres palindromes, on n'obtient qu'une petite partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent, mais lui aussi tout aussi définitif : « Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus. » Le nombre 2000, par exemple, est la somme de 616, 383 et 1001. Le résultat a été obtenu en deux temps. D'abord, en 2015, William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où, progressivement, on remplacerait 49 par des entiers de plus en plus petits.

En fait, l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup. Javier Cilleruelo, de l'université

de Madrid, et Florian Luca, mathématicien roumain aujourd'hui à l'université de Witwatersrand, à Johannesburg (Afrique du Sud), ont en effet démontré en 2016 dans un article de 39 pages que : « Dans toute base $b \geq 5$, tout entier s'écrit comme une somme d'au plus trois nombres palindromes. » La démonstration est constructive, puisqu'elle décrit un algorithme qui conduit, pour tout entier donné, à la somme recherchée. Cette prouesse rappelle la démonstration de Gauss en 1796 établissant que tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$).

L'article revient aussi sur les sommes de deux palindromes et montre que les entiers qui ne sont pas somme de deux palindromes sont très nombreux dans le sens suivant : pour chaque base $b \geq 2$, il existe une constante strictement positive c telle que les nombres qui ne sont pas somme de deux palindromes représentent une proportion des nombres entiers supérieure à c. Javier Cilleruelo et Florian Luca conjecturent, sans toutefois réussir à la démontrer, une propriété analogue pour les nombres entiers qui sont la somme de deux palindromes.

INFINIMENT PALINDROME

Terminons par un remarquable résultat sur les palindromes infinis. De quoi s'agit-il ? Considérons la suite de symboles composée uniquement de a et de b définie en partant de ab et en ajoutant son complément ba (chaque a est remplacé par b et chaque b par a), ce qui donne $abba$, puis en recommençant en ajoutant le complément de ce qu'on vient d'obtenir, ce qui donne $abbabaab$, et en recommençant indéfiniment : $abbabaabbbaabbabba$, $abbabaabbbaababbabaababbaabbabaab$...

On obtient une suite infinie de a et de b dont les 4 premiers symboles sont un palindrome, de même que les 16 premiers symboles, de même que les 64 premiers symboles... On dit que c'est un mot « infiniment palindrome » : ses débuts sont une infinité de fois des palindromes.

Quand on dispose d'une suite infinie d'entiers positifs $a_0, a_1, a_2, \ldots$ il est usuel en arithmétique de considérer le nombre réel suivant dénommé fraction continue associée à la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Un extraordinaire résultat de Boris Adamczewski et Yann Bugeaud établit que si la suite de nombres entiers est infiniment palindrome, alors le nombre réel défini par la fraction continue associée est soit un nombre quadratique, soit un nombre transcendant, c'est-à-dire que soit il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré 2 au plus, soit il n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dit encore autrement, les nombres réels définis par des fractions continues infiniment palindromes sont élémentaires ou alors aussi compliqués que les nombres π ou e (qui sont transcendants). C'est un moyen nouveau de définir des nombres transcendants. En particulier, le nombre x obtenu en prenant $a = 1$ et $b = 2$ dans le mot infiniment palindrome indiqué plus haut et en écrivant la fraction continue associée est transcendant :

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}}$$

On aimerait avoir un résultat analogue concernant les nombres dont l'écriture en base B est une suite infiniment palindrome. Mais pour l'instant, les techniques disponibles achoppent et à nouveau on est réduits à des conjectures.

Amusements sans prétention ou résultats profonds et difficiles, voire seulement conjecturés, les palindromes occupent passionnément les mathématiciens qui y découvrent mille merveilles insoupçonnées. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. CILLERUELO ET F. LUCA, Every positive integer is a sum of three palindromes : arXiv:1602.06208, 2016.

A. BÉRCZES ET V. ZIEGLER, On simultaneous palindromes, J. Comb. *Number Theory*, vol. 6, pp. 37-49, 2014.

Y. BUGEAUD, Automatic continued fractions are transcendental or quadratic : arXiv:1012.1709, 2010.

B. ADAMCZEWSKI ET Y. BUGEAUD, Palindromic continued fractions, *Annales de l'institut Fourier*, vol. 57(5), pp. 1557-1574, 2007.

G. L. HONAKER ET C. CALDWELL, Palindromic prime pyramids, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000.

E. FRIEDMAN, Problem of the Month, juin 1999 : www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html

PYRAMIDES

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-dessus sont possibles.
En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes).
La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de l'une d'elles étant :
131892729933733012747515193894339011971272339635702075369332721791109334989151574721033733992729813 1.
Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28.
En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.
Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres premiers.
On trouvera des compléments à leur article de 2000 sur : www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html et sur : www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/

L'ESSENTIEL

- L'énoncé est simple: « Quand on part d'un entier positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par $3n+1$ s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1. »
- Pourtant, cette conjecture dite de Syracuse, ou $3n+1$, n'a toujours pas été démontrée. Mais elle a été vérifiée jusqu'à $n = 5 \times 10^{18}$.
- De nombreux travaux portent sur des variantes du problème ou sur certaines parties, notamment sur la longueur des cycles dans les valeurs rencontrées.
- La longueur d'un tel cycle est soit 3 soit supérieure à 17 026679261 ! La démonstration de ce résultat est déjà une prouesse.

L'AUTEUR

SHALOM ELIAHOU est professeur à l'université du Littoral Côte d'Opale, à Calais.

Prenez un nombre quelconque. S'il est pair, divisez-le par 2, sinon multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Puis recommencez avec le nouveau nombre obtenu. Vous tomberez toujours sur 1. Enfin, on le suppose, car on n'a jamais su le démontrer...

52

Élémentaire, mais redoutable

5

Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, quel est celui dont l'énoncé est le plus élémentaire ? C'est peut-être bien la conjecture de Syracuse : accessible à tous dans son énoncé, elle défie les chercheurs depuis des décennies.

Dans les années 1960, une conjecture a occupé tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, certains y ont vu une conspiration soviétique destinée à détourner les esprits américains. Cette conjecture a reçu les noms Collatz, Kakutani, $3n+1$, Syracuse… Et c'est sous ce dernier qu'elle est la plus connue, car l'université de Syracuse (rien à voir avec la Sicile), aux États-Unis, a joué un rôle important dans la popularisation du problème.

Pourquoi est-il si célèbre ? Sans doute parce que le problème $3n+1$ offre un contraste saisissant : il est d'un côté extrêmement simple à énoncer et de l'autre, particulièrement difficile à résoudre. De quoi s'agit-il ? On définit la règle de transformation sur les nombres entiers 1,2,3… suivante : étant donné un entier naturel n non-nul quelconque, si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3n+1$). Par exemple, avec le nombre 14, cette transformation donne 7 ; et appliquée à 7 elle donne 22. On écrira $14 \rightarrow 7 \rightarrow 22$, et plus généralement $n \rightarrow m$ si appliquée à n elle donne m. La transformation est dite de Collatz, du nom de son inventeur, dans les années 1930 semble-t-il.

Le problème $3n+1$ se pose en ces termes : partons d'un nombre entier positif quelconque, et appliquons-lui cette transformation de façon répétée (on parle de trajectoire). >