

L'ESSENTIEL

● L'énoncé est simple: «Quand on part d'un entier positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par $3n+1$ s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1.»

● Pourtant, cette conjecture dite de Syracuse, ou $3n+1$, n'a toujours pas été démontrée. Mais elle a été vérifiée jusqu'à $n = 5 \times 10^{18}$.

● De nombreux travaux portent sur des variantes du problème ou sur certaines parties, notamment sur la longueur des cycles dans les valeurs rencontrées.

● La longueur d'un tel cycle est soit 3 soit supérieure à $17\,026679261$! La démonstration de ce résultat est déjà une prouesse.

L'AUTEUR



SHALOM ELIAHOU est professeur à l'université du Littoral Côte d'Opale, à Calais.

26

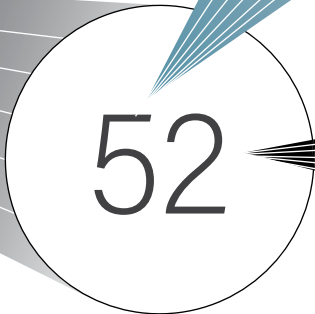
13

40

Prenez un nombre quelconque. S'il est pair, divisez-le par 2, sinon multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Puis recommencez avec le nouveau nombre obtenu. Vous tomberez toujours sur 1. Enfin, on le suppose, car on n'a jamais su le démontrer...

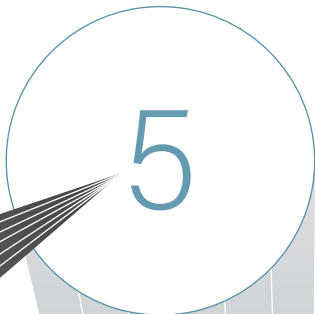
10

20



52

Élémentaire, mais redoutable



5

Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, quel est celui dont l'énoncé est le plus élémentaire ? C'est peut-être bien la conjecture de Syracuse : accessible à tous dans son énoncé, elle défie les chercheurs depuis des décennies.

D

ans les années 1960, une conjecture a occupé tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, certains y ont vu une conspiration soviétique destinée à détourner les esprits américains. Cette conjecture a reçu les noms Collatz, Kakutani, $3n+1$, Syracuse... Et c'est sous ce dernier qu'elle est la plus connue, car l'université de Syracuse (rien à voir avec la Sicile), aux États-Unis, a joué un rôle important dans la popularisation du problème.

Pourquoi est-il si célèbre ? Sans doute parce que le problème $3n+1$ offre un contraste saisissant : il est d'un côté extrêmement simple à énoncer et de l'autre, particulièrement difficile à résoudre. De quoi s'agit-il ? On définit la règle de transformation sur les nombres entiers 1, 2, 3... suivante : étant donné un entier naturel n non-nul quelconque, si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3n+1$). Par exemple, avec le nombre 14, cette transformation donne 7 ; et appliquée à 7 elle donne 22. On écrira $14 \rightarrow 7 \rightarrow 22$, et plus généralement $n \rightarrow m$ si appliquée à n elle donne m . La transformation est dite de Collatz, du nom de son inventeur, dans les années 1930 semble-t-il.

Le problème $3n+1$ se pose en ces termes : partons d'un nombre entier positif quelconque, et appliquons-lui cette transformation de façon répétée (on parle de trajectoire). ➤

➤ Est-il vrai que l'on finira tôt ou tard par tomber sur 1 ? Tous les calculs faits à ce jour confirment cette prédiction. Mais voilà, personne jusqu'à présent ne sait comment la démontrer, et ce n'est pas faute d'avoir essayé. D'ailleurs, selon le grand Paul Erdős, les mathématiques ne seraient pas encore assez mûres pour espérer résoudre cet innocent petit problème. En 1995, en Hongrie, j'ai essayé d'engager une discussion avec lui sur ce problème. Sa réaction fut sans appel : « C'est sans espoir ».

Quelques exemples s'imposent. Partons d'abord de 1 lui-même. Sa trajectoire est :

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

On obtient un cycle de longueur 3 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) qui se répète. Ce cycle est dit trivial.

Second exemple, en partant de $n = 3$, on retrouve le même cycle :

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Enfin, avec $n = 7$, on obtient :

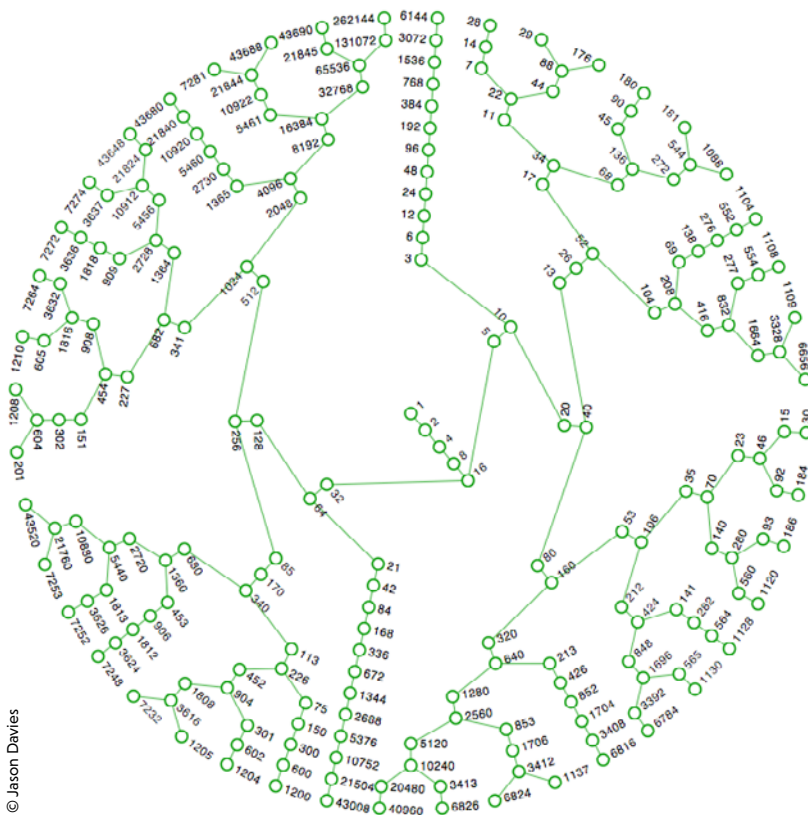
$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Encore 1 !

Certaines trajectoires sont spectaculaires et valent le détour. Celle de $n = 27$, par exemple, est une montagne russe qui monte vers des hauteurs inattendues (jusqu'à 9232). Mais rien n'y fait, après 111 étapes (c'est la durée de vol), elle retombe sur 1. Vous pouvez expérimenter ici : <http://l.pellegrino.free.fr/syracuse/index.php>

Depuis 2009, Tomás Oliveira e Silva, de l'université d'Aveiro, au Portugal, détient le

Cet arbre relie les nombres qui, par la transformation de Collatz, aboutissent à 1 via des trajectoires inférieures à 20 étapes.



© Jason Davies

record de vérification du problème $3n+1$ par ordinateur. Il a vérifié qu'effectivement, la trajectoire de tout nombre entier positif inférieur à $1,003 \times 10^{20}$ retombe bel et bien sur 1.

Le profil type du problème $3n+1$ est celui d'une fonction simple à définir (l'énoncé est accessible à un enfant de 8 ans), mais dont le comportement devient difficile à prédire lorsqu'on l'itère, c'est-à-dire lorsqu'on l'applique de façon répétée. C'est un système dynamique discret. Des centaines de chercheurs, depuis des décennies, tentent encore de résoudre ce problème. Il en a résulté un grand nombre de publications scientifiques, avec des résultats partiels et des études de problèmes analogues. Mais toujours pas de solution... C'est vexant...

DEUX SOUS-PROBLÈMES

Le problème $3n+1$ est un pari sur le comportement à long terme des trajectoires des entiers positifs pour la transformation de Collatz, à savoir que toute trajectoire finit par atteindre 1. En amont de ce pari spécifique, il est naturel de se demander, en toute généralité, quels sont les comportements possibles à long terme d'une trajectoire quelconque. Eh bien, il n'y a ici que deux possibilités : ou bien la trajectoire considérée est plafonnée, ou bien elle ne l'est pas.

Dire qu'elle est plafonnée signifie qu'aussi loin qu'on la parcourt, ses termes restent toujours en dessous d'un certain plafond. C'est le cas par exemple pour la trajectoire de 3, qui reste indéfiniment en dessous de 16. De même, la trajectoire de 7 est plafonnée par 52. Notons qu'une trajectoire plafonnée contiendra forcément, tôt ou tard, des répétitions. Dans ce cas, la trajectoire finit par s'enrouler dans un cycle. Nous avons rencontré le cycle ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$), mais y en a-t-il d'autres ?

À l'inverse, une trajectoire non plafonnée file inexorablement vers l'infini, malgré un inévitable parcours en dents de scie. En d'autres termes, en cheminant loin dans la trajectoire, on trouvera forcément un terme supérieur à 100, puis plus loin, un autre supérieur à 1000, puis plus loin encore, un autre supérieur à 10000... Techniquement parlant, on dit qu'une telle trajectoire diverge.

Le problème $3n+1$ se réduit donc à deux sous-problèmes : est-il vrai que le seul cycle est ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) ? Est-il vrai qu'il n'y a aucune trajectoire divergente ? On ne sait résoudre aucun de ces deux sous-problèmes. La solution de l'un ou l'autre serait d'ailleurs considérée, à juste titre, comme un progrès majeur. Illustrons cette situation dans des contextes légèrement différents.

Les règles définissant la transformation de Collatz, selon la parité du nombre considéré, gardent tout leur sens avec des nombres entiers négatifs. Par exemple, -1 est impair, et va donc

sur $3 \times (-1) + 1 = -2$ par la transformation de Collatz. De même, on a $-2 \rightarrow -1$. On observe ainsi, sur les entiers négatifs, un cycle de longueur 2. Or là, surprise, ce n'est pas le seul ! On en connaît même deux autres :

La trajectoire de -5 est un cycle de longueur 5 : $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5 \dots$ Quant à -17 , il donne un cycle de longueur 18 (voir la figure ci-contre). Cette présence de trois cycles différents sur les entiers négatifs (on pense que ce sont les seuls) rend d'autant plus intéressante la prédiction selon laquelle il n'y aurait qu'un seul cycle sur les entiers positifs.

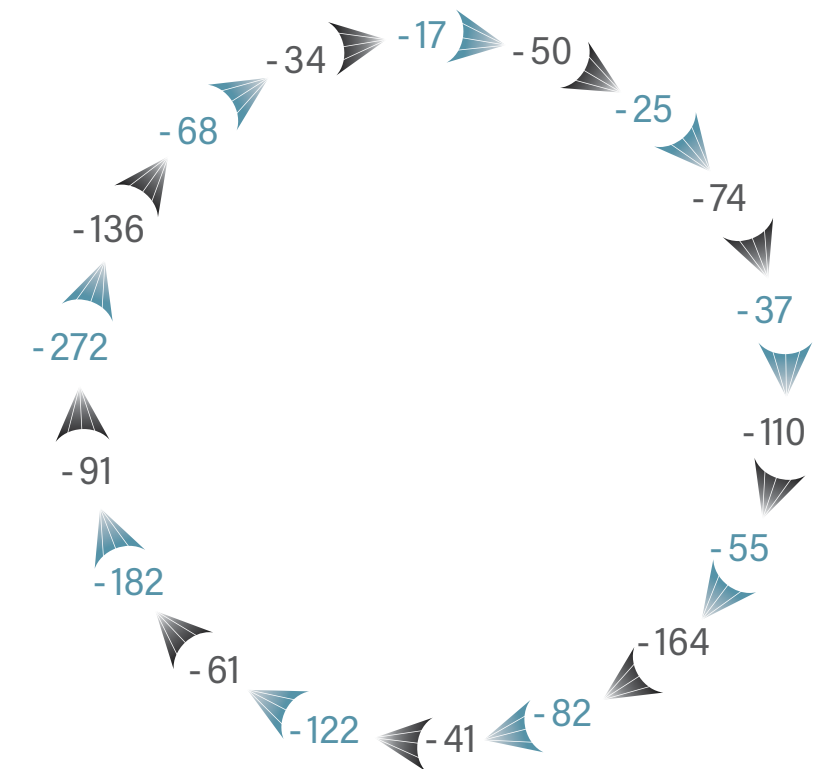
DIVERGENTE OU NON ?

Une variante de la transformation de Collatz, où l'on remplace $3n+1$ par $5n+1$, illustre simultanément les deux sous-problèmes (voir l'encadré ci-dessous). La différence est légère... et pourtant !

Pourquoi semble-t-il y avoir des trajectoires divergentes avec $(5n+1)/2$, mais pas avec $3n+1$ ni avec, ce qui revient au même, $(3n+1)/2$? Ce ne sont encore que des observations empiriques qui demandent à être formellement prouvées ; mais d'où peut bien venir cette différence de comportement ?

Voici une explication intuitive possible, fondée sur quelques approximations, une hypothèse osée mais plausible et, en fin de compte, sur le fait que $5/4$ est supérieur à 1 alors que $3/4$ ne l'est pas.

Cheminons le long de la trajectoire de 7 par exemple, d'abord pour la transformation $>$. Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie par $1/2$ s'il est pair, ou par environ $5/2$ s'il



Avec des nombres négatifs, la transformation de Collatz peut créer des cycles, ici de longueur 18.

est impair. Admettons que, lors de ce cheminement, on rencontre à peu près autant de pairs que d'impairs (c'est l'hypothèse osée !). Alors, si l'on marche jusqu'au 21 millionième terme par exemple, celui-ci devrait valoir environ : $7 \times (1/2)^{10500000} \times (5/2)^{10500000}$, soit $7 \times (5/4)^{10500000}$.

Or $5/4$ étant plus grand que 1, ses puissances successives grandissent sans limites. Le nombre ci-dessus compte d'ailleurs 1017556 chiffres avant la virgule, ce qui en fait une assez bonne approximation du vrai 21 millionième terme de la trajectoire de 7 avec ses 1016568 chiffres.

En revanche, le même raisonnement avec la transformation $\rightarrow$ ferait intervenir une grosse puissance de $3/4$. Celui-ci étant inférieur à 1, ses puissances successives tendent vers 0. C'est cela qui semble empêcher l'existence de trajectoires divergentes pour la transformation de Collatz.

Parmi les résultats partiels connus sur le problème $3n+1$, l'un affirme que si, contre toute attente, il existait un cycle autre que $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$, de longueur 3, alors il serait forcément gigantesque. Un théorème précise les choses : la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et environ 17000000000.

Comment prouver une telle affirmation ? D'abord, en montrant qu'il n'existe aucun cycle de longueur 5 pour la transformation de Collatz sur les entiers positifs. L'intérêt de cette preuve est d'être assez élémentaire, tout en contenant déjà l'idée essentielle pour la suite : la mise en évidence d'une équation très contraignante associée à un cycle. Pour la longueur 5, >

LA VARIANTE $5n+1$

Pour étudier les cycles et la divergence du problème $3n+1$, on peut s'intéresser à une variante : $5n+1$. En fait, pour accélérer un peu le cheminement dans les trajectoires, on remplace $5n+1$ par $(5n+1)/2$ plutôt que par $5n+1$. Les règles deviennent : si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on l'envoie sur $(5n+1)/2$. On utilisera le symbole $>$ pour dénoter cette nouvelle transformation. Voici par exemple la trajectoire de 1 : $1 > 3 > 8 > 4 > 2 > 1 \dots$ Un beau cycle de longueur 5.

Voici un autre cycle, cette fois de longueur 7 :

$13 > 33 > 83 > 208 > 104 > 52 > 26 > 13 \dots$ Partons maintenant de $n = 7$.

Là, un nouveau phénomène se manifeste. En effet, les 16 premiers termes de la trajectoire sont :

$7 > 18 > 9 > 23 > 58 > 29 > 73 > 183 > 458 > 229 > 573 > 1433 >$

$3583 > 8958 > 4479 > 1198$. Cela grimpe vite.

Allons un peu plus loin. Le 1000^e terme de cette trajectoire est :

6857007305798959806990948240228589098703203749.

Un nombre à 46 chiffres ! On continue ? Jonathan Chappelon a bien voulu pousser le calcul de cette trajectoire jusqu'à son 21 millionième terme.

Le nombre obtenu n'est même plus montrable : il a plus d'un million de chiffres (exactement 1016568) ! Il y a donc une très forte présomption que la trajectoire de 7 diverge ; mais personne à ce jour ne sait le démontrer. Pire : on pense que la plupart des trajectoires de cette transformation sont divergentes, mais personne ne sait prouver qu'il en existe au moins une qui le soit vraiment.

- procédons par l'absurde, et supposons qu'un tel cycle existe. En le manipulant, on révélera une équation qui lui est associée et l'on constatera que cette équation est insoluble.

Remarquons que pour un hypothétique cycle de la transformation de Collatz sur les entiers positifs, le plus petit élément est forcément impair. En effet, notons C ce cycle et m son plus petit élément. Bien sûr, C est la trajectoire de m . Notons maintenant m' le nombre obtenu à partir de m par transformation de Collatz. Alors m' est lui aussi dans C , puisque C est la trajectoire de m , et il est plus grand que m , puisque m est minimal dans C . Or si m était pair, on aurait $m' = m/2$ qui est plus petit que m : cette contradiction montre bien que m est impair.

LE CAS DE LONGUEUR 5

L'hypothétique cycle de longueur 5 serait de la forme: $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$. Quitte à renommer les indices, on peut supposer que le plus petit est a_1 , forcément impair, nous l'avons vu, et différent de 1, puisque la trajectoire de 1 donne un cycle de longueur 3. En fin de compte, a_1 est supérieur ou égal à 3.

La transformation de Collatz appliquée aux éléments du cycle a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 donne la même liste décalée d'un cran (puisque c'est un cycle): a_2, a_3, a_4, a_5 et a_1 . Ce cycle est ainsi stable par transformation de Collatz. C'est évident, mais crucial pour la suite.

Pour savoir concrètement comment la transformation de Collatz agit sur $a_1 \dots a_5$, on doit savoir lesquels sont pairs et lesquels sont impairs. On sait déjà que a_1 est impair. Qu'en est-il des autres termes?

Puisque a_1 est impair, $a_2 = 3a_1 + 1$ est pair. Se pourrait-il que $a_3 = a_2/2 = (3a_1 + 1)/2$ soit pair? Si c'était le cas, on aurait alors $a_4 = a_3/2$. En enchaînant avec ce que l'on sait sur a_2 et a_1 , on obtiendrait: $a_4 = a_3/2 = a_2/4 = (3a_1 + 1)/4$. Le terme a_4 vaudrait donc environ les trois quarts de a_1 : il serait donc plus petit que a_1 (puisque celui-ci est supérieur ou égal à 3). C'est en contradiction avec la minimalité de a_1 . On conclut que a_3 est forcément impair.

En conséquence, $a_4 = 3a_3 + 1$ et il est donc pair. Et $a_5 = a_4/2$? Il est pair. En effet, a_5 doit être plus grand que a_1 . La seule possibilité est donc que a_5 soit pair et donc que $a_1 = a_5/2$. Car dans le cas contraire $(3a_5 + 1) = a_1$ serait plus grand que a_5 , ce qui est exclu. Nous connaissons maintenant l'exakte répartition des pairs et des impairs du cycle: a_1 et a_3 sont impairs; a_2, a_4 et a_5 sont pairs.

Résumons les formules obtenues en chemin, exprimant chaque terme du cycle en fonction du précédent: $a_1 = a_5/2$; $a_2 = 3a_1 + 1$; $a_3 = a_2/2$; $a_4 = 3a_3 + 1$; $a_5 = a_4/2$.

L'étape suivante consiste à prendre le produit P de ces 5 termes: $P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$. Avec les formules précédentes, on obtient: $P = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2)$.

À partir de ces deux expressions différentes de P , on parvient à l'équation annoncée. La voici dans une première version brute:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2).$$

Cette équation contient des informations intéressantes, mais pour les révéler, quelques manipulations algébriques s'imposent, au terme desquelles on obtient:

$$8 = (3 + 1/a_1)(3 + 1/a_3)$$

C'est l'équation annoncée, sous sa forme épurée, associée à n'importe quel hypothétique cycle de longueur 5. Nous pouvons maintenant conclure: a_1 et a_3 étant supposés positifs, l'équation ci-dessus est impossible à satisfaire, puisqu'à droite on obtient un nombre supérieur à 9, alors qu'à gauche on n'a que 8. On vient de prouver que la transformation de Collatz n'admet aucun cycle de longueur 5 sur les entiers positifs.

Une bizarrerie reste à comprendre: le développement ci-dessus reste valable sur les entiers négatifs, à condition de remplacer les

**La conjecture
a occupé tant
de mathématiciens
américains que
certains y ont vu...
une conspiration
soviétique**

comparaisons de grandeur par des comparaisons de grandeur *en valeur absolue*. Comment se fait-il que, malgré cela, il existe bien un cycle de longueur 5 dans les entiers négatifs?

La solution de cette apparente contradiction tient à l'ultime argument de la preuve: bien qu'insoluble dans les entiers positifs, l'équation associée admet quand même des solutions dans les entiers négatifs! En effet, posons $a_1 = -5$ et $a_3 = -7$. Un calcul montre qu'on a bien $8 = (3 + 1/(-5))(3 + 1/(-7))$. Et

l'on retrouve bien le cycle que nous avons vu auparavant: $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5$.

À part les trajectoires de -1 et de -5 , on connaît encore un autre cycle pour la transformation de Collatz sur les entiers négatifs. C'est la trajectoire de -17 , qui est de longueur 18.

Revenons aux entiers positifs pour lesquels on ne connaît de cycle que le trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Nous sommes désormais armés pour le théorème: la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et 17 000 000 000, et plus précisément 17 026 679 261!

DE 5 À 17 026 679 261...

Notre preuve d'exclusion de la longueur 5 pour les cycles de Collatz dans les entiers positifs repose sur deux piliers: la stabilité du cycle présumé sous l'action de la transformation de Collatz; une équation très contraignante associée à ce cycle.

Pour exclure de plus grandes longueurs de cycles, le premier ingrédient se généralise facilement. En revanche, le second avait découlé d'une description précise de la répartition des pairs et des impairs dans le cycle. Or il est illusoire d'espérer obtenir une telle description en longueur supérieure, pour des raisons d'explosion combinatoire. Comment surmonter cet obstacle? Grâce à un petit saut dans l'abstraction, en acceptant d'introduire une notation spécifique distinguant les pairs des impairs dans le cycle présumé.

Pour un hypothétique cycle de Collatz C ($a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots a_N \rightarrow a_1$) dans les entiers positifs de longueur N , on notera p le nombre d'éléments pairs et q le nombre de ses éléments impairs. On ignore tout *a priori* de p et q , si ce n'est qu'ils satisfont l'égalité $p + q = N$. Poursuivant sur notre lancée, on notera $b_1 \dots b_p$ la liste des éléments pairs de C , et $c_1 \dots c_q$ celle de ses éléments impairs. Enfin, m sera le plus petit élément de C . Forcément impair, ce nombre jouera un rôle particulier. Que deviennent dans ce cadre plus général, les deux piliers de la preuve?

Le premier est la stabilité. Si l'on applique la transformation de Collatz à la liste des éléments du cycle C , on retombe sur la liste d'origine, juste décalée cycliquement d'un cran. Le cycle C est donc bien stable par transformation de Collatz.

Le second ingrédient est l'équation associée au cycle C . On ignore comment se répartissent les termes pairs $b_1 \dots b_p$ et impairs $c_1 \dots c_q$ dans C . Mais, en les agrégeant, la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$ obtenue n'est rien d'autre qu'un réarrangement de la liste des éléments de C . Or, celle-ci est globalement stable par transformation de Collatz. De plus, on sait exactement ce que donne cette transformation sur chacun des termes b_i et c_j , puisqu'on connaît leur parité! Faisons-le. En appliquant la transformation de Collatz à la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$, on obtient $b_1/2 \dots b_p/2, 3c_1 + 1 \dots 3c_q + 1$.

Ces deux listes contiennent exactement les mêmes éléments à l'ordre près, ceux de C .

Pour l'équation, comme pour le cycle de longueur 5, prenons le produit P des termes de C . En utilisant chacune des deux listes ci-dessus représentant C , on obtient à nouveau deux expressions de P : $P = b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q$ et $P = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$. De cette double expression, on déduit l'équation associée à C , dans sa version brute: $b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$.

Après quelques manipulations algébriques, l'équation devient, sous une forme épurée :

$$2^p = (3 + 1/c_1) (3 + 1/c_2) \dots (3 + 1/c_q).$$

Pour $N = 3$, on a le cycle trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). On voit que $p = 2$ et $q = 1$, la liste des impairs se réduisant à $c_1 = 1$. On vérifie que $2^2 = (3 + 1/1)$.

Pour $N = 5$, en supposant que le minimum du cycle est a_1 , on avait trouvé trois pairs (a_2, a_4 et a_5) et deux impairs (a_1 et a_3), donnant donc $p = 3$ et $q = 2$. On retrouve l'équation $8 = (3 + 1/a_1) (3 + 1/a_3)$ avec laquelle on avait exclu les cycles de Collatz de longueur 5 dans les entiers positifs.

L'équation en question fournit un encadrement de 2^p très contraignant. Avec $c_1 \dots c_q$ les éléments impairs de C et m son minimum, on a donc $c_i \geq m$, pour tout indice i entre 1 et q . En inversant, puis en ajoutant 3, on obtient $3 < 3 + 1/c_i \leq 3 + 1/m$ pour tout i , sachant que les c_i sont strictement positifs. En prenant le produit de ces q termes, on obtient les inégalités suivantes: $3^q < (3 + 1/c_1) \dots (3 + 1/c_q) \leq (3 + 1/m)^q$.

Par l'équation associée au cycle, le terme du milieu est égal à 2^p . On obtient donc l'encadrement

$$3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$$

pour un cycle de Collatz C dans les entiers positifs, avec p pairs, q impairs, et de minimum m .

Voici pourquoi on peut tirer des informations de cet encadrement: plus le minimum m de C est grand, plus son inverse $1/m$ est petit, et plus il sera difficile de trouver une puissance de 2 coincée entre une puissance de 3 et une autre de $3 + 1/m$ avec un exposant commun q . Cela suffit déjà pour exclure la longueur 18.

... EN PASSANT PAR 18

La trajectoire de -17 est un cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers négatifs. Au contraire, il n'existe pas de cycle de cette longueur dans les entiers positifs. Montrons-le. Les symboles p , q et m sont compris relativement à cet hypothétique cycle C . En particulier, le minimum m de C est strictement plus grand que 1, puisque la trajectoire de 1 est un cycle de longueur 3 et non pas 18. Comme $p + q = 18$, on a $p = 18 - q$, et l'encadrement de 2^p devient: $3^q < 2^{18-q} \leq (3 + 1/m)^q$.

>

> Puisque $m > 1$, $(3 + 1/m)$ est donc inférieur à 4. Le terme de droite est donc dominé par 4^q . On obtient ainsi les inégalités strictes $3^q < 2^{18-q} \leq 4^q$. Quelles valeurs de q satisfont ces deux inégalités?

Si q est trop grand, alors 3^q dépassera 2^{18-q} et q ne conviendra pas. De même, si q est trop petit, alors $18-q$ sera trop grand et 2^{18-q} dépassera 4^q . q ne conviendra donc pas non plus. Concrétisons ces observations avec une calculatrice. On trouve $3^7 = 2187$ et $2^{11} = 2048$, donnant l'inégalité $3^7 > 2^{11}$. Donc les valeurs de q supérieures ou égales à 7 sont interdites.

Dans l'autre sens, on a $2^{13} > 4^5$, puisque $4^5 = 2^{10}$. Les valeurs de q inférieures ou égales à 5 sont donc interdites également. Reste une unique valeur permise, à savoir $q=6$, ce qui donne $18-q=12$. Or on a $2^{12} = 4^6$, en contradiction avec l'inégalité stricte $2^{18-q} < 4^q$ requise plus haut. Conclusion: il n'existe aucun cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers positifs.

Pour aller au-delà de l'exclusion de la longueur 18, nous avons besoin d'outils afin de mieux exploiter la force de l'encadrement de 2^p obtenu plus haut. L'idée est de faire «descendre» les exposants p et q afin de les manipuler plus aisément. Pour ce faire, l'outil tout indiqué est le logarithme. De fait: $\log(x^r) = r \log(x)$.

Une propriété du logarithme qui nous intéresse ici est sa continuité: si x et y sont très proches, alors $\log(x)$ et $\log(y)$ le sont aussi.

L'ENCADREMENT DE p/q

On va déduire un encadrement de p/q à partir de celui de 2^p obtenu précédemment: $3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$. En appliquant le logarithme, qui respecte l'ordre, on obtient: $\log(3^q) < \log(2^p) \leq \log((3 + 1/m)^q)$. En «descendant» les exposants et après quelques manipulations, on parvient à l'encadrement:

$$\frac{\log(3)}{\log(2)} < \frac{p}{q} \leq \frac{\log(3+1/m)}{\log(2)}$$

Encore une fois, plus m est grand, plus $1/m$ est petit et, par continuité, plus $\log(3+1/m)$ est proche de $\log(3)$. Autrement dit, le rapport p/q se retrouve coincé entre deux nombres d'autant plus proches que m est grand. Ces contraintes vont se révéler très fortes.

Pour un hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs, de minimum m , on a forcément $m > 5 \times 10^{18}$. Ce nombre découle de la vérification du problème $3n+1$ sur ordinateur par Tomás Oliveira e Silva jusqu'à cette borne: pour tout entier n inférieur à 5×10^{18} , sa

trajectoire finit par atteindre 1. Celle-ci ne peut donc contenir un cycle autre que le cycle trivial de longueur 3. On en déduit alors que: $\log(3)/\log(2) < p/q \leq \log(3 + 2 \times 10^{-19})/\log(2)$.

En effet, notant toujours m le minimum de C , on a $m > 5 \times 10^{18}$. En prenant les inverses, l'ordre s'inverse, ce qui donne $1/m < 1/(5 \times 10^{18})$, ou encore, puisque $1/5 = 0,2 = 2 \times 10^{-1}$, $1/m < 2 \times 10^{-19}$. Reste, de chaque côté, à ajouter 3, à prendre le logarithme et à diviser par $\log(2)$ pour parvenir à: $\log(3+1/m)/\log(2) < \log(3+2 \times 10^{-19})/\log(2)$. Combinée à l'encadrement de p/q obtenu plus haut, on obtient celui annoncé.

Concrètement, le rapport p/q est compris entre 1,5849625007211561814537389 et 1,5849625007211561815499186. La différence ne se manifeste qu'à partir de la 19^e décimale! On en déduit que si C est un cycle de Collatz non trivial dans les entiers positifs, avec p termes pairs et q impairs, alors p/q appartient à l'intervalle: $I =]1,58496250072115618145, 1,58496250072115618155]$.

UN INTERVALLE DE PLUS EN PLUS RÉDUIT

En quoi le fait de savoir que p/q est contraint d'habiter dans un intervalle aussi petit peut-il nous être utile? Assez curieusement parce que toute fraction appartenant à I est tenue d'avoir ses numérateur et dénominateur très grands. Concrètement, on peut montrer que pour tout rationnel s/t de I , avec s et t entiers positifs, on a forcément $s \geq 10439860591$ et $t \geq 6586818670$.

En particulier, ces seuils s'appliqueront à p et q respectivement, puisque p/q appartient à I . Il en découle aussitôt que la longueur de notre présumé cycle C doit dépasser la somme de ces seuils, à savoir 17026679261!

Ainsi, tout hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs doit

contenir au moins 17 milliards d'éléments, s'il existe. Cela ne répond pas à notre question initiale. Mais on peut s'en satisfaire, en attendant mieux.

Et un mieux viendra peut-être bientôt. En effet, cette borne de 17 milliards repose sur la vérification

actuelle du problème $3n+1$ jusqu'à 5×10^{18} . Avec du nouveau matériel informatique, on espère pouvoir vérifier la conjecture jusqu'à $2,17 \times 10^{20}$, dans quelques années sans doute (sauf si un cycle est découvert!). La borne inférieure sur les longueurs de cycles sautera alors de 17 milliards à... 186 milliards, d'un seul coup (c'est un saut d'un facteur 10)! Si vous êtes impatients, sachez que nous venons de passer en revue tous les ingrédients théoriques et numériques suffisants pour s'en convaincre. Vous êtes prêts pour le vérifier? Alors, à vos calculatrices! ■

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS

Images des Mathématiques :

<http://images.math.cnrs.fr/>

Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

J. LAGARIAS, *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, *American Mathematical Society*, 2010.

S. ELIAHOU, *The $3x+1$ problem : new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, *Discrete Mathematics*, vol. 118, pp. 45-56, 1993.

DURÉE LIBRE

43 %
de réduction *

Partie réservée au service abonnement. Ne rien inscrire.