

pendu son vol. On ne savait que faire des courbes elliptiques $E(A,B,C)$ que l'on pouvait associer à une hypothétique solution non triviale de l'équation de Fermat.

L'explosion de 1986 et le théorème de Wiles

On a dit que le coup de baguette magique fut donné en 1985 par G. Frey, alors professeur à l'Université de Sarrebruck. G. Frey conjecturait que nos courbes $E(A,B,C)$ devaient contredire la conjecture de Taniyama, et, merveille des merveilles, la communauté mathématique le crut ! Jean-Pierre Serre, d'ordinaire si prudent, tira le «coup de feu qui fit le tour du monde» en publiant de profondes conjectures dont découlait le théorème de Fermat. Peu de temps après, en 1987, B. Mazur et K. Ribet prouvèrent ces conjectures pour la représentation hypothétique du groupe de Galois absolu qui serait liée à une solution non triviale de l'équation de Fermat, mais à une condition : il fallait que la courbe $E(A,B,C)$ vérifie la conjecture de Taniyama.

Stimulé par le théorème de Ribet, le mathématicien britannique Andrew Wiles s'embarqua seul pour un long voyage sur des «océans étranges de pensée».

La navigation fut rude, et ce n'est qu'en 1991 que quelques oiseaux dans le ciel signalèrent la proximité d'une terre. En 1992, il pensait arriver près du but, et le 21 juin 1993, à l'Institut Newton, il annonça que le théorème de Fermat était démontré.

Las, l'annonce était prématurée, et les oiseaux disparurent de l'horizon. Un autre mathématicien aurait sans doute abandonné, mais A. Wiles n'écoula que son courage et son collègue R. Taylor ; celui-ci l'incitait à revenir sur sa route. C'est alors que, le 19 septembre 1994, il vit en un éclair la solution tant cherchée : un procédé découvert par Ehud de Shalit ouvrait un chemin plus direct vers la conjecture de Taniyama pour les courbes $E(A,B,C)$.

Un chef-d'œuvre est né et un mythe est mort : le théorème de Fermat est enfin démontré. De plus, le travail d'Andrew Wiles ouvre la voie à un vaste continent de recherches futures où de nombreuses conjectures restent à prouver.

Par ailleurs, la liste des équations diophantiennes abordables par la méthode des courbes $E(A,B,C)$ est loin

LES DIFFÉRENTES ROUTES EMPRUNTÉES DEPUIS FERMAT

LA ROUTE DES PIÉTONS

Cette route a été empruntée par Fermat lui-même pour l'exposant 4, puis par Lamé et Lebesgue pour l'exposant 7.

On se ramène à l'impossibilité de la résolution en nombres entiers des équations $t^2 = r^4 + 4s^4$ lorsque n est égal à 4, et $t^2 = r^4 - 3/4r^2s^2 + 1/7s^4$, lorsque n est égal à 7 (rst différent de zéro) et on procède par descente infinie.

LES FORMES QUADRATIQUES

On peut penser que, pour les exposants p premiers impairs, Fermat associait à son équation la forme quadratique $X^2 + (-1)^{(p+1)/2}pY^2$. C'est du moins ainsi que procédèrent Euler pour p égal à 3, puis Legendre et Dirichlet pour p égal à 5.

LES EXTENSIONS CYCLOTOMIQUES

Depuis De Moivre au XVIII^e siècle, on sait factoriser $x^p + y^p$ en produit de facteurs du premier degré en x et y , et cela conduit à considérer l'ensemble des nombres déduits par additions, soustractions et multiplications de $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$, c'est-à-dire l'anneau des entiers cyclotomiques. C'est ainsi que Kummer parvint à démontrer l'assertion de Fermat pour tous les nombres premiers "réguliers". Malheureusement on ne sait pas démontrer qu'il existe une infinité de tels nombres.

L'APPROCHE ELLIPTIQUE

Elle est beaucoup plus récente que les précédentes (26 ans) et fait l'objet de cet article.

REMARQUES

- 1) Les trois premières méthodes font usage de la descente infinie pour prouver le second cas (défini dans l'article).
- 2) Une forme quadratique apparaît dans la route des piétons pour l'exposant 7.
- 3) Le nombre quadratique $((-1)^{(p-1)/2}p)^{1/2}$ apparaît implicitement dans la seconde méthode : il appartient à l'anneau des entiers cyclotomiques.
- 4) Finalement le corps des nombres cyclotomiques est contenu dans le corps engendré par les coordonnées des points de p -division de la courbe $E(A,B,C)$.

d'être close. Pourtant les solutions d'une équation aussi voisine du théorème classique, que $x^n + y^n = 2z^n$ ne peuvent être étudiées directement par cette méthode puisque cette équation possède la solution non triviale (1,1,1). Fermat n'est sans doute pas aussi mort qu'on le suppose, et sa note marginale suscitera peut-être d'autres découvertes.

À ce stade du panorama et après deux articles portant sur le sujet, le lecteur a une idée sur le comment du théorème de Fermat. Le pourquoi de ces recherches peut lui sembler énigmatique : il nous semble que cette question ne peut être examinée en termes logiques et que le pourquoi des mathématiques reste et restera un choix artistique. Le mathématicien Emil Artin exprime avec force ce point de vue : «Nous pensons tous que les mathématiques sont un art... Certes les mathématiques sont logiques : chaque conclusion est tirée des résultats qui précèdent. Cependant la totalité de l'affaire, l'œuvre d'art véritable, n'est pas linéaire ; et, ce qui est bien pire, sa

perception ne peut être qu'instantanée. Nous avons tous éprouvé, en de rares occasions, une impression d'exaltation en réalisant que nous avions permis à nos auditeurs de voir, l'espace d'une seconde, l'architecture complète d'une question, et toutes ses ramifications.»

Yves HELLEGOUARCH est professeur de mathématiques à l'Université de Caen.

Catherine GOLDSTEIN, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

Grand théorème de Fermat, in *Quadrature*, n°22, été 95.

Séminaire Bourbaki, Exposés de Jean-Pierre Serre et Joseph Oesterlé. Juin 1995.

Yves HELLEGOUARCH, *Points d'ordre $2p^h$ sur les courbes elliptiques*, in *Acta Arithmetica* XXVI, 1975.

K.A. RIBET, *Galois Representations and Modular Forms*, in *Bulletin of the American Society*, Octobre 1995.

Partage de butin

IAN STEWART

Des protocoles de partage proportionnels, plaisants ou partiels.

Arthur Barberousse renversa le sac sur la table de la cuisine. Jo le Teigneux, Denis Tourtencuisse et Léon la Volette regardaient, émerveillés, les paquets de billets et les tas de bijoux qui en sortirent. Restait le plus difficile : diviser le butin. Personne n'avait confiance et chacun voulait avoir sa part, sans être lésé. La justice, c'est la justice, n'est-ce pas ?

Arthur partagea rapidement l'argent, en se fondant sur la valeur affichée. C'était facile : il suffisait de diviser la valeur totale en quatre. En revanche, le partage des bijoux était plus épineux, car chaque membre de la bande avait son idée sur la valeur des divers bijoux. Certains objets, telles les chaînes, pouvaient se couper en morceaux, ce qui facilitait le travail, mais les autres...

«Ne traînons pas, dit Jo. La police doit être sur nos traces, et tout cela doit disparaître rapidement.

– Je vais prendre cette tiare de diamants, dit Léon, en se la mettant sur la tête. Et Jo aura les colliers et le...

– Pas question, intervint Denis : des canailles de votre espèce ne seront jamais d'accord si elles procèdent ainsi. Il faut une méthode qui nous garantisse à chacun un partage équitable.

– Ouais, dit Léon.

Silencieux, ils regardèrent le tas de bijoux. Trois heures après, ils le regardaient encore :

«Ce dont nous avons besoin, dit Denis, c'est de ce que les mathématiciens nomment un "protocole de partage proportionnel plaisant", PPPP en abrégé.

– Aïe, dit Arthur. Et c'est quoi, ce truc ?

– Plaisant, c'est lorsque personne n'a le sentiment que quelqu'un d'autre a obtenu quelque chose qu'il ne...

– Je comprends "plaisant", mais les longs mots d'avant ?

– Un "protocole de partage", c'est une méthode systématique pour partager les choses entre plusieurs personnes. Il est "proportionnel" si chaque personne est satisfaite d'avoir reçu au moins sa juste part, et si personne n'estime qu'un autre a eu plus que sa part.

– N'est-ce pas la même chose que plaisant, demanda Léon ?

– Pas du tout.

– Oui, ajouta Denis. Les protocoles plaisants sont toujours proportionnels, mais les protocoles proportionnels ne sont pas nécessairement plaisants.

– Pourquoi ?

– Par exemple, suppose que, tous les trois, vous partagez trois objets, comme un bracelet, un collier et une paire de boucles d'oreilles, et que vous assigniez subjectivement des valeurs de la façon suivante :

	Bracelet	Collier	Boucles
Arthur	40	50	10
Léon	30	50	20
Jo	30	20	50

Le partage est proportionnel si Arthur reçoit le bracelet, si Léon a le collier et si Jo a les boucles, parce que chacun d'entre vous aura reçu plus de 33 pour cent de la valeur totale, mais Arthur ne trouvera pas plaisant que Léon ait le collier, qu'il estime valoir plus que le bracelet. Comme nous le verrons, les protocoles plaisants sont beaucoup plus difficiles à trouver que les protocoles proportionnels.

En plus du protocole, des stratégies personnelles garantissent à chacun qu'il atteigne son but. Ces stratégies ne font pas partie du protocole ; elles sont d'ailleurs souvent implicites, mais ce sont elles qui garantissent que le protocole est juste. On nomme souvent "joueurs" les personnes entre lesquelles s'effectue le partage, parce qu'on peut envisager ce dernier comme une suite de coups dans un jeu, et l'on peut aussi représenter les valeurs comme des parts d'un gâteau. On se partage le gâteau, quoi.

Pour deux joueurs, par exemple Arthur et Léon, il existe un PPPP simple, que j'appelle «je coupe, tu choisis» : Arthur coupe le gâteau en deux parts égales, et Léon choisit celle des deux parts qu'il préfère. Avec ce protocole, la stratégie d'Arthur doit être de couper des parts égales à son goût, de sorte qu'il ne puisse perdre, quel que soit le choix que fera Léon. Pour Léon, la stratégie doit être de choisir la part qui lui semble la plus grosse. La stratégie d'Arthur lui assure une part qu'il estime à 50 pour cent, et celle de Léon une part que Léon estime supérieur ou égale à 50 pour cent. Le protocole est bien un PPPP.

Comme Denis semblait bien connaître le problème, les trois autres l'envoyèrent à la bibliothèque de l'université locale pour y dénicher des informations supplémentaires et authentifiées. Denis découvrit que les mathématiques des partages naquirent dans la Pologne en guerre, à Lvov : en 1944, alors que l'armée soviétique combattait pour reprendre la Pologne aux Allemands, le mathématicien Hugo Steinhaus chercha à se changer les idées en résolvant un problème de partage. Il connaissait le protocole "Je coupe, tu choisis" pour partager le gâteau entre deux personnes et les stratégies conduisant chacune d'elles à penser que sa part est au moins égale à la moitié. Avec cette technique, aucun des deux joueurs n'a de raison de se plaindre : celui qui coupe peut faire une découpe impartiale, et celui qui choisit décide ce qu'il veut prendre ; aucun des deux n'est forcé de faire un choix qu'il jugerait injuste.

«Steinhaus, dit Denis quand il revint vers ses trois acolytes, se demanda si on pouvait diviser un gâteau entre trois personnes.

– Voyons, dit Arthur. Peut-être pourrais-je couper le gâteau en trois parts que j'estimerai égales, puis faire choisir Léon et ensuite Jo ?

– Non, protesta Jo : je ne marche pas, car je choisirais ainsi après Léon, et je risquerais d'avoir une part moins grosse que la sienne.»

Denis expliqua alors que Steinhaus avait abouti à une suite de neuf étapes à l'issue de laquelle chaque joueur est satisfait, car il a ce qu'il considère être au moins un tiers du gâteau. Afin d'examiner ce protocole proportionnel, procédons à quelques définitions. Un joueur estime qu'une part est «juste» si la taille de cette part lui semble au moins égale à un tiers ; sinon elle est «injuste». «Passer», à une certaine étape du protocole, c'est ne rien faire. Par commodité, nous parlerons de «taille des parts», mais il s'agit de valeur relative, estimée par un joueur. Tous les jugements sont subjectifs et propres au joueur qui a le trait. Les indications entre parenthèses ne font pas partie du protocole ; ce sont des commentaires sur les stratégies utilisées par les joueurs.

Voici maintenant le protocole de Steinhaus (voir la figure 1) :

1. Arthur coupe le gâteau en trois parts (qu'il juge toutes justes, c'est-à-dire subjectivement égales).

2. Léon peut : soit passer (s'il pense qu'au moins deux parts sont justes) ; soit étiqueter deux parts (qu'il juge injustes) comme «mauvaises».

3. Si Léon passe, Jo choisit une part (qu'il estime juste). Puis Léon choisit une part (qu'il estime juste) et, finalement, Arthur prend la dernière part.

4. Si Léon a étiqueté deux parts mauvaises, on offre à Jo les deux choix qu'avait Léon : passer ou étiqueter deux part «mauvaises». Jo n'a pas à tenir compte du choix de Léon.

5. Si Jo passe, les joueurs choisissent dans l'ordre : Léon, Jo et Arthur (comme pour l'étape 3).

6. Si Jo étiquette deux parts mauvaises, il est d'accord avec Léon qu'une des parts est injuste : Arthur prend cette part (comme il a estimé que toutes les parts étaient justes, il ne peut pas se plaindre).

7, 8 et 9. Les deux parts restantes sont regroupées (Jo et Léon sont d'accord pour estimer que l'ensemble des deux parts représente plus des deux tiers du gâteau) et ils font un «je coupe, tu choisis» (ils ont alors chacun une part juste).

«Pfouhhh..., fit Arthur, c'est pas du gâteau !

– Attends, dit Denis. Vous n'avez encore rien vu. Il y a un problème, car ce protocole est proportionnel, mais il n'est pas plaisant. On peut trouver des cas où chacun estimera avoir sa juste part, mais où Jo, par exemple, trouvera la part de Léon meilleure que la sienne.

Par exemple, si Léon juge le partage d'Arthur juste, alors le protocole s'arrête à l'étape 3, et Arthur et Léon jugent que chaque part est supérieure ou égale à un tiers. Jo obtient alors une part qu'il estimera au moins d'un tiers, d'où un partage proportionnel. Mais si Jo estime que la part d'Arthur est $1/6$ et celle de Léon de $1/2$, il jugera que le partage n'est pas plaisant, car Léon aura mis la main sur une part meilleure que la sienne.

– Et Steinhaus n'a pas trouvé de PPPP pour trois personnes, demanda Léon ?

– Non : il ne s'est pas préoccupé des partages plaisants ; ce problème n'a été résolu que plus tard.»

Nerveusement, Arthur regardait par la fenêtre : pas de signe de la police ?

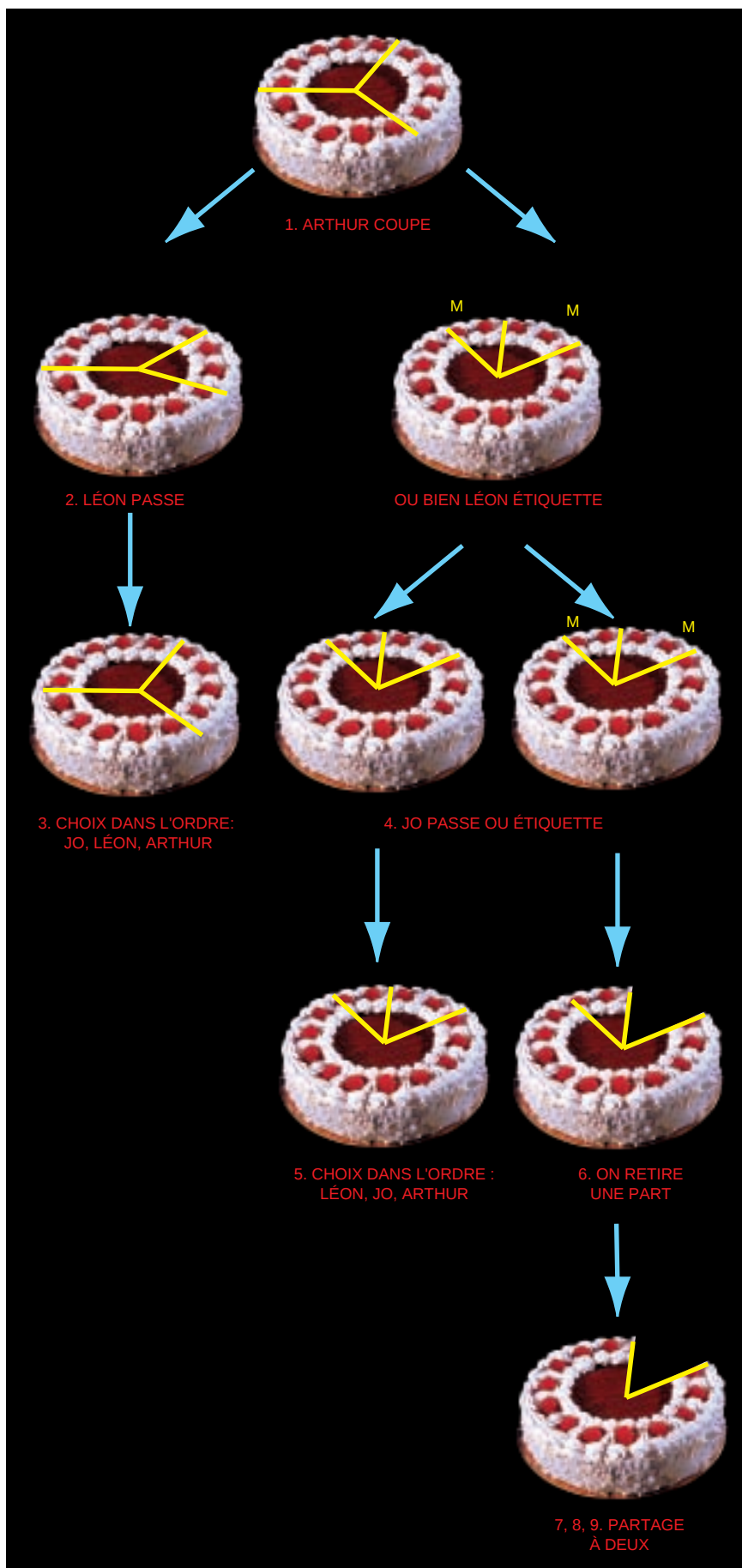
«Ce qui lui importait, continuait Denis, c'était de trouver un protocole de partage proportionnel pour quatre personnes au plus. Ses amis Stefan Banach et B. Knaster en trouvèrent bientôt un.

Supposons que n joueurs $P_1, P_2, \dots, P_n$ se partagent un gâteau. Cette fois, un des joueurs considère qu'une part est "juste" si elle lui semble supérieure ou égale à $1/n$. Le protocole de Banach-Knaster est (voir la figure 2) :

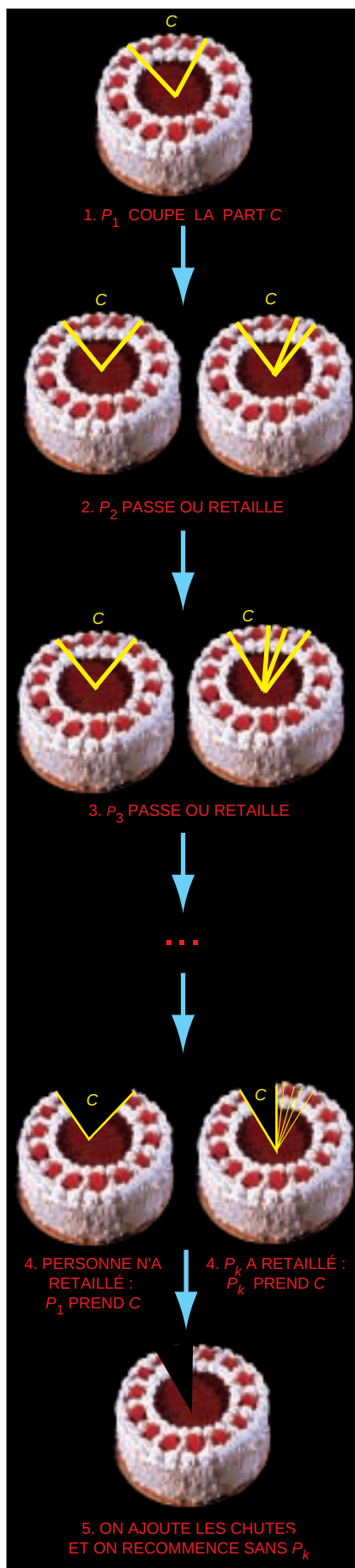
1. P_1 coupe une part (juste) C .

2. P_2 a le choix : de passer (s'il juge C injuste) ; de retailler C (pour former une part juste que nous continuerons de nommer C). Les chutes sont provisoirement laissées de côté.

3. P_3 fait de même avec la nouvelle part C ; puis viennent les tours de $P_4, P_5, \dots, P_n$, de sorte que chaque joueur,



1. Le protocole de Steinhaus.



2. Le début du partage de Banach-Knaster.

sauf P_1 , a eu la possibilité de retailer la part C.

4. Si personne ne retaille la part C, elle revient à P_1 . Si la part est retaillée, elle revient au dernier joueur qui la retaille (car il considère qu'elle est juste, après son coup de couteau).

5. On regroupe le reste du gâteau et les chutes. Les $n-1$ joueurs restants (qui considèrent tous qu'au moins $(n-1)/n$ du gâteau initial restent dans le plat) répètent la procédure précédente.

6. Quand tous les joueurs sont servis sauf deux, ces derniers jouent la fin du gâteau à "je coupe, tu choisis".

Vous voyez : ce protocole de Banach-Knaster est proportionnel, mais il n'est pas plaisant.

— Ouais, dit Léon, et il est différent de celui de Steinhaus. En fait, il est plus simple.

— Absolument, répondit Denis : c'est parce qu'il utilise une nouvelle idée : le redécoupage. Et il reprend de Steinhaus l'idée de découper une part du gâteau et d'étudier ce qui reste.

Léon se cala dans sa chaise et regarda monter lentement la fumée de son cigare :

«Mais dans notre cas, nous ne sommes pas nécessairement d'accord sur ce que vaut chaque partie.

— C'est également vrai pour le partage du gâteau, dit Denis : j'ai toujours pris soin de dire que les parts justes ou injustes ne le sont que subjectivement. D'ailleurs Steinhaus a montré que le problème est plus aisé si les joueurs ne sont pas d'accord.

— Et pourquoi ? C'est bizarre.

— Dans un gâteau, si je préfère le napage de chocolat et toi la génoise de la base, ça nous facilite la vie.»

Arthur grogna pour montrer qu'il comprenait : quand il ne dirigeait pas, il était maussade :

«Denis, ces histoires de protocole sont longues, et la police peut venir à tout instant. Existe-t-il de meilleures méthodes que celle de Banach-Knaster ?

— Sûr. Il y a des preuves mathématiques abstraites fondées sur le théorème de complexité de Liapounov : elles démontrent que des divisions équitables du gâteau existent toujours, mais n'indiquent pas comment faire la division. Et puis il y a l'algorithme du couteau qu'on déplace. Celui que je vais vous donner est dû à L. Dubins et à Edwin Spanier, qui l'ont trouvé en 1961 : un joueur coupe un rayon, du gâteau, puis il tourne lentement son couteau, afin de couper des parts d'angle au centre de plus en plus grand. Un joueur qui dit "coupe" reçoit la part qui est formée quand on coupe à l'endroit atteint par le couteau quand il est intervenu. Cette méthode est utile, en famille, pour couper un gâteau, mais ce n'est pas un algorithme, du point de vue mathématique,

parce que chaque joueur doit prendre un nombre infini de décisions pour savoir quand il demande de couper. Les protocoles que l'on cherche doivent reposer sur un nombre fini de décisions.

— Restons à ces protocoles, intervint à nouveau Arthur, sinon la police va finir par rappliquer.

— Tu as raison. J'ai appris qu'au début des années 1960, John Selfridge et John Horton Conway trouvèrent indépendamment un protocole plaisant pour trois joueurs :

1. Arthur partage le gâteau en trois parts (qu'il juge justes).

2. Léon a le choix : de passer (s'il pense que deux parts au moins sont plus grosses qu'une troisième) ; de retailer la part la plus grosse (pour créer deux parts égales et plus grosses que la troisième). Les chutes sont laissées de côté.

3. Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part (qu'ils jugent la plus grosse ou une des plus grosses). Si Léon ne passe pas son tour à l'étape 2, alors il doit choisir la part retaillée, à moins que Jo ne l'ait d'abord choisie. À cette étape, la part de gâteau autre que les restes a été divisée en trois parties de manière plaisante (nous ne l'avons pas démontré, mais c'est vrai).

4. Si Léon a passé, à l'étape 2, il n'y a pas de reste, et l'étape 4 est un coup pour rien ; sinon soit Léon soit Jo a pris la part retaillée. Nommons ce joueur le «non-coupeur», et l'autre des deux le «coupeur». Le coupeur divise les restes en trois parts (qu'il juge justes). Arthur est avantagé par rapport au non-coupeur, parce qu'il pense quand même que ce dernier n'a pas plus qu'une part juste, car il avait coupé des parts initiales justes. Aussi, de quelque sorte que les restes soient à nouveau répartis, Arthur n'enviera pas le non-coupeur.

5. Les trois parts de restes sont choisies par les joueurs dans l'ordre : non-coupeur, Arthur, coupeur. Le non-coupeur choisit le premier, de sorte qu'il n'a pas à se plaindre. Arthur n'enviera pas le non-coupeur, parce qu'il se juge avantagé, et il n'enviera pas le coupeur, car il choisit avant lui. Le coupeur ne se plaindra pas non plus, car c'est lui qui a coupé les restes.

— C'est bien joli, dit Arthur avec impatience, mais nous sommes quatre et non trois, à moins que...»

Il tira un couteau qu'il posa sur la table.

«Eh, pas de panique, dit Denis très vite : il y a quelques années, on a découvert que le partage plaisant existait toujours pour quatre joueurs, mais personne n'avait trouvé de protocole en un nombre fini d'étapes.

— Et alors, demanda Léon. Que s'est-il passé ?

– Alors un journaliste scientifique nommé Dominic Olivastro écrivit un article pour une revue intitulée *The Sciences*, et il intéressa un spécialiste de sciences politiques nommé Steven Brams, de l'Université de New York. S. Brams s'interrogeait depuis longtemps sur les problèmes économiques et politiques de la juste répartition ; il étudiait notamment la division de l'Allemagne entre les Alliés, à la fin de la dernière guerre, et il vit là une piste nouvelle à suivre pour analyser ce type de découpages.

Il commença par chercher un partage plaisant pour trois joueurs, ne comprenant pas que J. Selfridge et J. H. Conway en avaient déjà trouvé un. Dans les trois premières étapes, sa méthode est identique à la leur : elle conduit à un partage plaisant partiel. En revanche, au lieu de leur technique compliquée de division des restes, il conserve la même méthode jusqu'à la fin.

– Ça ne fait que créer d'autres restes, remarqua Léon...

– Oui, mais ces restes de deuxième ordre sont beaucoup plus petits que ceux de premier ordre, et une nouvelle application de la méthode crée des restes de troisième ordre, encore plus petits, et ainsi de suite.

– Mais ce n'est pas un protocole, alors : il ne s'arrête jamais.

– Oui, mais il est simple et efficace.

– Bon, alors allons-y.

– Attends, il y a une dernière méthode, et qui n'est pas infinie. Encouragé par sa découverte, Brams s'attaqua au cas des quatre joueurs, mais il resta bloqué.»

Arthur se remit à tripoter son couteau. Denis, inquiet continua rapidement :

«Alors il s'adressa à un de ses amis, Alan Taylor, qui était mathématicien à Schenectady et qui réfléchit au problème en surveillant un examen de fin d'études. Il trouva une solution qui consistait, de façon étonnante, à partager le gâteau en cinq parts.

– Alors qu'il devait le répartir entre quatre joueurs ? C'est pas clair.

– Oui, et A. Taylor ne sait absolument pas d'où lui est venue cette idée. En tout cas, son protocole plaisant partiel pour quatre joueurs est le suivant :

1. Arthur coupe le gâteau en cinq parties (qu'il juge égales).

2. Léon retaille si nécessaire deux parts, afin d'en créer trois qui puissent être maximales ex aequo (à son avis), et il laisse les deux autres de côté.

3. Jo retaille si nécessaire une part pour créer deux parties maximales ex aequo (à son avis).

4. Je choisis en premier, puis Jo, puis Léon, et enfin Arthur, qui prend la partie restante. Si Jo ou Léon a retailé une

Le protocole de Brams-Taylor pour quatre joueurs

1. Léon coupe le gâteau en quatre parts (qu'il juge égales) et tend une part à chaque joueur.

2. On demande à Arthur, Jo et Denis s'ils jugent ce partage injuste.

3. Si personne ne se manifeste, on conserve ce partage.

4. Sinon, on poursuit avec le premier qui se manifeste. Supposons que ce soit Arthur. Il choisit une part qu'il envie et la nomme A ; sa part initiale est notée B . Le reste du gâteau est réassemblé.

5. Arthur nomme p un nombre entier supérieur ou égal à 10 (ce nombre p est choisi de sorte qu'il ait la propriété suivante : si A est subdivisé en p parties, Arthur préfère A à B même si les sept plus petites parties sont éliminées. Il peut obtenir cette situation en choisissant p supérieur à $7a(a-b)$, où a est son évaluation de A et b son évaluation de B).

6. Léon divise A et B en p pièces chacune (qu'il pense égales).

7. Arthur choisit trois parts de B (les plus petites) et les nomme S_1, S_2, S_3 . Puis :

– soit il choisit trois parts (les plus grandes) de A (s'il pense qu'elles sont toutes strictement plus grosses que toutes les parts S_1, S_2, S_3) et il retaille au plus deux d'entre elles (à la taille de la plus petite des trois) ;

– soit il subdivise (la plus grande) des parties de A en trois parts (qu'il juge égales).

Quoi qu'il fasse, il nomme ces parts T_1, T_2, T_3 .

8. Jo prend les trois parts S_1, S_2, S_3 et les trois parts T_1, T_2, T_3 et :

– soit il passe (s'il pense avoir déjà deux parts maximales ex aequo) ;

– soit il retaille une de ces parts (la plus grande afin d'avoir deux parts maximales ex aequo).

9. Denis, Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part parmi les six parts $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ modifiées comme à l'étape 8. Jo doit prendre la part qu'il a coupée si elle est disponible. Léon doit choisir une part S , et Arthur doit choisir une part T . À ce stade, on a obtenu un partage

plaisant partiel, avec beaucoup de restes et où Arthur juge sa part supérieure à celle de Léon d'une quantité x .

10. Arthur nomme un entier q (choisi tel que $(4L/5)q$ soit inférieur à x , où L est l'évaluation faite par Arthur des restes). Ce nombre fixé d'avance évitera que la phase suivante ne se poursuive indéfiniment.

11. Arthur partage les restes en cinq parts (cette idée est reprise de la première solution de A. Taylor).

12. Léon retaille deux parts, si nécessaire, pour créer trois parts maximales ex aequo (à son idée), et il met les restes de côté.

13. Jo retaille une part, si nécessaire, pour créer deux parts maximales ex aequo (à son idée).

14. Denis choisit le premier, puis Jo, puis Léon, et Arthur prend la part restante. Si Jo, ou Léon, a retailé une part, il doit la choisir si elle est disponible quand vient son tour.

15. On répète $q-1$ fois les étapes 11 à 14, en divisant à chaque fois les restes du cycle précédent. À la fin de ce cycle, on a un partage plaisant partiel où Arthur a un avantage sur Léon : il juge sa pièce plus grosse que la somme de la part de Léon et de tous les restes. Dans une «liste des avantages irrévocables», on inscrit la paire (Arthur, Léon).

16. Léon coupe les restes en 12 parties (qu'il juge égales).

17. Chacun des trois autres joueurs annonce «oui» s'il pense que les 12 parties ont une même taille, «non» dans le cas contraire.

18. Si tout «oui» a un avantage irrévocable sur chaque «non» (voir la liste), alors on donne les 12 parts aux «oui», chacun en recevant le même nombre et le partage s'arrête (c'est pourquoi on utilise 12 : il est divisible par 1, 2, 3 et 4).

19. Sinon on choisit la première paire (oui, non) pour laquelle on n'a pas un tel avantage irrévocable et on revient à l'étape 4, avec le joueur «oui» dans le rôle d'Arthur, le «non» dans celui de Léon, et les restes à la place du gâteau.

20. On répète les étapes 5 à 18 jusqu'à ce que (après au plus 15 cycles) chaque paire (oui, non) soit sur la liste des avantages irrévocables. Le cycle s'arrête alors à l'étape 18.

pièce, il doit la choisir si elle n'a pas été prise, quand vient son tour.

Par cette méthode, chaque joueur estime que sa part est la plus grosse ou l'une des plus grosses, de sorte que le partage est plaisant.

– C'est bien joli, dit Arthur, mais cela ne résout pas complètement le problème.

– Tu as raison : ce protocole est infini, ce qui ne gênait pas Brams, qui sait qu'en sciences politiques, les miettes ne comptent pas. Toutefois A. Taylor n'était pas satisfait. Pendant plusieurs mois, il étudia le problème, avec William Zwicker et Fred Galvin, jusqu'à ce qu'ils trouvent une manière de modifier la séquence des choix, de sorte que la méthode s'arrête toujours, sans laisser la moindre miette.

Même pour quatre joueurs, le protocole résultant est très compliqué, avec 20 étapes, dont l'une est une longue séquence d'étapes «Je coupe, tu choisis», effectuées par divers joueurs (voir l'encadré ci-dessus). À deux étapes, le protocole demande de considérer un nombre

composé des estimations de certains joueurs sur la taille des parts, et le nombre d'étapes dépend des préférences de chacun. Quelles que soient ces préférences, le nombre d'étapes est fini, mais il peut être rendu aussi grand que l'on veut, selon les préférences des divers joueurs. Contrairement à la méthode initialement trouvée par A. Taylor, ce protocole commence plus classiquement par une division en quatre parts ; au cours du protocole, on retrouve plusieurs fois l'idée de découper en plus de parts que de joueurs, à propos des restes.»

Arthur, Léon, Jo et Denis se lancèrent alors dans le partage du butin par la méthode de Brams-Taylor. Deux heures après, la table était couverte de feuilles de papier où s'alignaient de longs calculs. Arthur regardait une grosse éme-raude solitaire :

«Je pense qu'il faut la diviser en douze, dit-il en lançant un regard furieux à Denis. – Oui, bon... le protocole s'applique aux gâteaux et à tout ce qui peut être divisé

facilement. Hum... Le problème, avec les objets indivisibles, est beaucoup plus difficile, voire sans solution pour... Eh, attends ! Freddie le receleur pourrait couper cette pierre.

– Je ne veux pas de Freddie dans cette affaire. Tu nous a fait perdre un temps précieux et je n'aime pas ça. La police doit être sur nos traces, et c'est ta...»

Il s'arrêta : une sirène approchait. Il reprit :

«A mon avis, les gars, il est temps de passer à un protocole disproportionné et plaisant seulement pour moi.»

Il pointa son couteau vers Denis :

«Je coupe ?

– Oui, et je choisirai, dit Léon.»

Ian Stewart est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.

S. BRAMS et A. TAYLOR, An envy-free cake division protocol, in The American Mathematical Monthly, vol. 102, pp.9-18, janvier 1995.

Respirations

SHAWN CARLSON

Mesurer le métabolisme de petits organismes.

Pas de vie sans métabolisme : tout être qui respire obtient de l'énergie en oxydant chimiquement des molécules énergétiques stockées dans ses tissus. Malgré la simplicité de ce principe, les biologistes n'ont élucidé que les bases du métabolisme, et la vie est si variée, si complexe que nombre de découvertes attendent ceux qui explorent avec rigueur le fonctionnement des animaux et des végétaux. Peu d'amateurs seront capables de résoudre les nombreuses difficultés techniques ou éthiques des expériences sur les animaux à sang chaud, mais les quelque dix millions d'espèces de petite taille et à sang froid leur seront utiles. Les insectes, notamment, sont une mine pour les biologistes amateurs.

La mesure du métabolisme d'un insecte est très simple : lorsqu'un organisme est enfermé dans un récipient clos, sa respiration provoque la disparition de molécules d'oxygène et la libération de dioxyde de carbone. Généralement le nombre de molécules libérées est inférieur à celui des molécules captées, de sorte que la pression dans le récipient est réduite.

Cette baisse de pression est une bonne indication du métabolisme. On la mesure à l'aide d'un appareil de Warburg (voir la figure 1), composé de deux tubes à essai communiquant par un tube capillaire : une minuscule gouttelette d'huile qui s'y déplace révèle les différences de pression entre les deux tubes à essai. Cet appareil est très sensible, et la goutte se déplace même si l'on chauffe l'un des tubes à essai en le tenant dans la main : la pression de l'air augmente dans ce tube et pousse la gouttelette vers le tube plus froid. Pour mesurer le déplacement de la goutte, photocopiez une règle graduée en millimètres et fixez la photocopie sur le tube capillaire.

Comme le système est très sensible, un bon moyen d'obtenir l'égalité des températures dans les deux tubes consiste à les immerger dans une grande cuvette d'eau, en les fixant aux bords d'un gobelet en matière plastique qu'on lesté avec du sable, des cailloux ou des pièces de monnaie. Le système indiqué sur la figure 1 permet de visualiser la goutte d'huile du tube capillaire dans une zone qui reste en atmosphère d'air sec. Pour

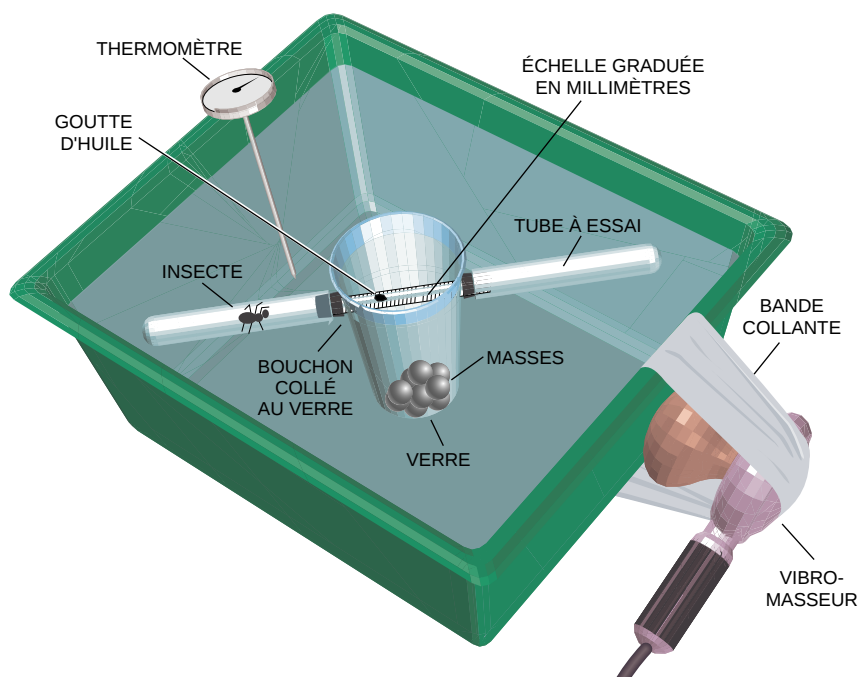
réduire encore les risques de gradients de température, on peut mettre l'eau en mouvement à l'aide d'un agitateur ou d'un vibromasseur. Connaissant la pression de l'air, la température de l'eau et le déplacement de la goutte d'huile, on détermine le nombre de molécules inhalées par l'insecte (voir l'encadré de la page 107).

Combien de molécules de dioxyde de carbone ont-elles été absorbées et combien de molécules d'oxygène ont-elles été libérées ? Le rapport de ces deux nombres, nommé quotient respiratoire, est une mesure fondamentale du métabolisme, car il révèle quel combustible biologique l'organisme utilise. Quand l'organisme brûle des glucides, ce rapport est égal à 1 ; quand il brûle des graisses, il est égal à 0,70 ; avec des protéines, il est égal à 0,80 ; avec de l'alcool, il vaut 0,67. Pour la plupart des êtres vivants, ce quotient est compris entre 0,72 et 0,97, parce que les organismes métabolisent simultanément plusieurs types de molécules.

Pour mesurer le quotient respiratoire, je vous propose d'utiliser un peu d'hydroxyde de sodium (NaOH), afin d'absorber le dioxyde de carbone présent dans l'air. On trouve ce composé sous forme solide dans les drogueries (soude en pastilles ou en paillettes) ou dans les magasins de produits chimiques (consultez les pages jaunes de l'annuaire). Prenez quelques précautions : l'hydroxyde de sodium est une substance caustique, qui brûle la peau et les yeux ; aussi ne la manipulez qu'en portant des gants de caoutchouc et des lunettes.

Avant de commencer les expériences, éliminez le dioxyde de carbone des tubes à essai. Placez plusieurs grammes de soude dans un seul des tubes à essai, à l'aide d'un bas de nylon ; ce sera une poche idéale qui, si elle est roulée en boule du côté ouvert, empêchera l'insecte de toucher la soude. Mesurez la durée du déplacement de la gouttelette jusqu'à son immobilisation, c'est-à-dire jusqu'au moment où la soude a absorbé tout le dioxyde de carbone de l'air. Si vous voulez que le système atteigne rapidement l'équilibre, utilisez beaucoup de soude (on pourrait s'inquiéter de la présence de vapeur d'eau, que la soude absorbe également, mais cette absorption ne perturbe pas les mesures).

Pour réaliser les expériences, on placera dans l'un des tubes à essai la soude enveloppée dans le bas et l'animal étudié ; dans l'autre tube, on ne met que la soude. Puis on mesure le temps nécessaire pour que la gouttelette se déplace d'au moins cinq fois le plus petit intervalle repérable sur la graduation. On répète alors l'expérience, pendant la même durée, mais en présence seulement de



1. La respiration d'un insecte se détecte à la différence de pression que l'on mesure entre deux tubes à essai thermostatés. Cette dernière est mesurée grâce au déplacement d'une gouttelette d'huile dans un tube capillaire.