

JEAN-CHRISTOPHE YOCOZ



Ne crions pas haro sur le baudet : on critique l'enseignement des mathématiques à l'école, au collège et au lycée, mais je tiens à élever une voix contraire : je suis essentiellement content de l'enseignement que j'ai reçu, car il était globalement bien fait, tant en mathématiques que dans les autres disciplines. C'était sérieux, rien n'était absurde. J'essayerai de montrer que certaines con-

traintes de l'enseignement empêchent l'enseignement des mathématiques de différer trop de ce qu'il était hier et de ce qu'il est aujourd'hui.

Ceux qui critiquent la manière dont l'enseignement est organisé sont souvent des utopistes, qui sous-estiment le temps nécessaire aux élèves pour assimiler les notions fondamentales. Le cas des proportions, des pourcentages, est intéressant : pour manipuler cette notion, difficile mais indispensable, il faut du temps. Une fois qu'on maîtrise – opérationnellement – la notion, on a le sentiment d'avoir passé un temps excessif sur un point mineur, mais il existe une grande différence entre la connaissance et la maîtrise. C'est ce que dit le proverbe chinois : «J'écoute, j'oublie ; je vois, je me souviens ; je fais, je comprends.» Faire, c'est plus long qu'entendre et que voir. Le savoir-faire ne s'acquiert qu'au prix de longues répétitions, données à des classes entières, et non à des individus. Dans un monde idéal, utopique, on pourrait accélérer l'enseignement de ces notions, en donnant un enseignant par élève ; c'est impossible, et les instituteurs ou les professeurs ont la difficile tâche de communiquer un savoir opérationnel à des classes tout entières. En général, ils font remarquablement leur travail. Plus concrètement, les mathématiques, élémentaires ou non, sont comme la langue : il faut ançonner les tables de multiplication pour les retenir, et il ne suffit pas de voir une fois l'orthographe d'un mot pour savoir l'écrire correctement. C'est une évidence qu'on oublie : la répétition s'impose dans l'enseignement, et cette nécessité coupe les ailes à bien des idées audacieuses. Il faut être pragmatique.

Répétition, certes, mais pas répétition à l'identique : un ordinateur qui dirait sans cesse la même chose aux élèves ne serait pas un bon pédagogue. C'est l'art de l'enseignant, à l'école comme à l'université, de présenter plusieurs fois les mêmes notions, en changeant de point de vue. Le cas de l'algèbre linéaire, par exemple, a un parfum qui ressemble à celui de la proportion : plus cette partie indispensable des mathématiques est enseignée tôt, plus le travail en université est facilité, car l'expérience montre qu'il faut au moins quatre ou cinq ans pour que les étudiants soient capables de dominer cet outil, à la base de bien d'autres mathématiques.

Quelle doit être la place des mathématiques dans l'enseignement ? C'est un débat très actuel : des voix se sont élevées contre la place «exagérée» qu'on leur accorderait et contre la stérilisation des esprits que causerait leur formalisme. Pourtant, de même que nous ne pouvons vivre sans apprendre à parler notre langue, nous devons savoir quelques mathématiques. C'est ce que disait Galilée : «La philosophie est écrite dans ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire l'Univers), mais on ne peut le comprendre si l'on n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans l'intermédiaire desquels il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot.» Rappelons-nous également l'abbé de Condillac : «Nous ne pensons qu'avec le secours des mots. L'art de raisonner se réduit à une langue bien faite.» Comme eux, je constate que la vie courante nous assène des chiffres, pas toujours de façon honnête. Pour vivre dans ma Cité, je dois être familiarisé avec les chiffres, avec les méthodes pour les interpréter. Les mathématiques ne sont pas une science formelle réservée à une élite : chacun a intérêt à savoir que deux augmentations successives de dix pour cent ne font pas une augmentation de 20 pour cent.

Lors d'une réunion de la Commission Fauroux, dont je fais partie, un représentant de l'industrie s'est ému que beaucoup de travailleurs n'aient pas intégré ce type de notions, élémentaires du point de vue des mathématiques. Et ce qui est vrai pour les nombres l'est aussi pour les figures : la géométrie élémentaire doit être enseignée, car c'est un outil pour vivre au quotidien.

Dans le fond, la critique de l'enseignement des mathématiques confond souvent deux aspects : la définition des programmes et le rôle des mathématiques comme instrument de sélection. Je crois qu'on peut difficilement rogner sur les programmes, qui sont moins ambitieux qu'on le dit (d'ailleurs, les universitaires se plaignent souvent de la formidable mise à niveau qu'ils ont à faire), et je protesterais énergiquement contre une diminution du programme de mathématiques dans le secondaire. Les programmes ne me semblent pas trop lourds ; s'ils étaient moins ambitieux, on risquerait de finir avec une coquille vide.

Au total, après avoir écouté les rapports qui sont présentés dans le cadre de la Commission Fauroux, j'ai l'impression que l'école primaire ne fonctionne pas si mal, et je craindrais de bouleverser l'enseignement qui y est donné. Le département d'évaluation et de prospective du ministère de l'Éducation nationale, outil précieux d'évaluation, a indiqué que le taux d'illettrisme est d'environ 15 pour cent en classe de sixième. J'admets que des efforts soient nécessaires, mais je me méfie du chiffre brut. Je comprends que les élèves maîtrisent insuffisamment la langue, la géométrie et le calcul, mais j'ai l'impression que l'école primaire fonctionne bien. Les collèges, eux, sont l'endroit où la fracture se manifeste le plus. Le problème est social ; ce

n'est pas un problème d'enseignement, et il faut des réponses spécifiques à des problèmes spécifiques. Je redoute les panacées pédagogiques, et j'aimerais d'ailleurs que l'on cesse d'en chercher.

Dans le premier cycle universitaire, également, les problèmes ne pourront être résolus par des solutions universelles. Un grave problème est celui de l'encadrement : en Droit, certains amphithéâtres réunissent 1 000 étudiants. C'est excessif ! En sciences, le problème est moins aigu, et l'encadrement des étudiants est mieux assuré. Je crois qu'il faut se diriger vers un premier cycle universitaire où la rupture avec le lycée soit moins brutale, où le suivi des étudiants soit vraiment assuré et qui offre une réelle pluridisciplinarité.

Dans le détail des programmes, maintenant, un examen de ce que l'on m'a enseigné et de ce que l'on enseigne à mon fils, qui est en classe de sixième, me montre ce que j'aimerais que l'on introduise, et aussi ce qu'il faut éviter. La théorie des ensembles, qui m'a été présentée longuement, a disparu : c'est un bien. En revanche, je regrette que l'algèbre linéaire ait disparu, car elle est indispensable. La géométrie est fondamentale, parce qu'elle donne une représentation du monde dans l'espace.

Je ne propose naturellement pas une géométrie trop sophistiquée, enchaînement de théorèmes fins, mais surtout des manipulations pratiques. Encore un truisme qu'il faut répéter : la compétence acquise est plus importante que le savoir emmagasiné. Il faut dominer le plan, l'espace, etc. et disposer de quelques définitions de base.

Naturellement un pont doit être jeté entre la géométrie et les nombres. L'archétype d'un tel pont est donné avec les coordonnées cartésiennes, mais aussi, on l'oublie, avec la notion de mesure des longueurs, par exemple. C'est aujourd'hui enseigné assez tôt, ce qui est bien. Plus tard dans l'enseignement, on montrera, de même, que les nombres complexes peuvent être à la fois considérés comme des nombres et comme des points du plan.

J'ai déjà évoqué l'algèbre linéaire ; j'insiste pour signaler qu'elle est à la base de la maîtrise du calcul différentiel. Quand on sait que les problèmes de physique se formalisent souvent par des fonctions de plusieurs variables, on comprend son importance : cette algèbre est précisément le calcul avec de telles fonctions. En outre, ces fonctions se présentent sous la forme d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles, souvent insolubles. Aussi le physicien est fréquemment obligé de remplacer les fonctions réelles par des approximations linéaires.

Comment les mathématiques doivent-elles être enseignées ? Il ne faut certainement pas verser dans un formalisme excessif. On doit donner des objets mathématiques une intuition qui n'a pas toujours à être étayée par des théorèmes précis. D'un côté, je crois formateur d'imposer une rigueur logique, mais je suis également

partisan de faire des maths «avec les mains». D'ailleurs les mathématiciens nomment arbitrairement trivial ce qu'ils n'estiment pas devoir justifier. Ce «trivial» dépend du niveau, de l'âge mathématique des élèves.

Inversement on doit s'attacher à donner aux élèves une idée claire de ce qu'est une démonstration. On ne doit pas réduire les mathématiques à des démonstrations, car ce serait contraire à leur dynamique quotidienne, à leur pratique, mais la rigueur, épaulée par l'intuition, fait beaucoup pour donner un outil intellectuel puissant. Ce que j'avance là me semble vrai même à l'université : dans mes cours, même en licence ou en maîtrise, j'alterne les parties formelles et les parties de mathématiques avec les mains, qui donnent les idées, et je fais une séparation précise entre ce qui est démontré et ce qui est suggéré. Un bon dosage est l'art de l'enseignement ; c'est ce qui est excessif qui est ridicule.

Venons-en à la question cruciale : comment intéresser les élèves ? Signalons tout d'abord que le même problème se pose en mathématiques ou en lettres : certaines techniques de conjugaison doivent être apprises et assimilées. À un niveau élémentaire, la conjugaison peut sembler sans intérêt, mais elle constitue une des bases



HEUREUSEMENT QU'IL N'Y A PLUS
DE SÉLECTION PAR LE LATIN
J'AURAIS ÉTÉ RECALÉ !

du maniement de la langue. De même, en mathématiques, les proportions, déjà évoquées, font partie de ces outils indispensables pour arriver ensuite à des mathématiques intéressantes. On peut certainement montrer des mathématiques intéressantes, mais il faut en payer le prix : on ne peut économiser l'enseignement des techniques. Comme Archimède l'avait dit au roi de Syracuse : il n'y a pas de voie royale. Je ne sais pas résoudre ce conflit mieux que ne le font les instituteurs et les professeurs : ils alternent les parties techniques et les parties intéressantes, d'une façon qui ne m'a généralement pas lassé quand j'étais à l'école, puis au collège et au lycée.

Enfin, mentionnons le problème déjà souligné de la sélection par les mathématiques. Remarquons tout d'abord que la communauté mathématique a un point de vue ambivalent. Elle est gênée qu'on lui ressasse ce refrain «Ah vous êtes mathématiciens ? Vous savez, moi je n'y comprends rien.» D'autre part, si la communauté mathématique française est une des meilleures du monde, c'est que le système de détection et d'encouragement des talents fonctionne très bien. Or ce résultat découle notamment de la sélection des élèves par les mathématiques. À vrai dire, cela ne me gêne pas que l'on sélectionne les élèves par les mathématiques, mais j'admets mal que cette sélection soit la seule. Dans le temps, la sélection par le latin permettait d'équilibrer la sélection par les mathématiques. C'était, d'une certaine façon, préférable, parce qu'avec les mathématiques seulement, on ne repère qu'un seul type de talent. Il faudrait plusieurs instruments de mesure.

Jean-Christophe Yoccoz, médaille Fields,
est professeur à l'Université Paris-Sud.

Le trait retrouvé

Des tracés sur les murs confirment que les constructeurs gothiques utilisaient des méthodes exposées dans le manuscrit de Villard de Honnecourt.

Villard de Honnecourt a laissé à la postérité un carnet de 66 pages, datant du XIII^e siècle, document unique sur les techniques des constructeurs du Moyen Âge. Près d'une vingtaine d'édifices religieux, dont la très belle collégiale de Saint-Quentin, située, comme Honnecourt, dans le Vermandois, ont été attribués à Villard, mais sans qu'il existe aucune preuve.

L'architecte Pierre Bénard, en 1864, Robert Branner vers 1970, et François Bucher, plus tard, relevèrent des tracés gravés sur les murs de certaines chapelles, notamment une rose, ressemblant à la principale rose de Chartres, dont je fis en 1989 un relevé exact, et le plan d'un pilier, qui rappelaient des dessins du fameux manuscrit. En 1995, la médiéviste Ellen Shortell me signala l'existence, au pied d'une paroi sur laquelle elle releva des tracés d'arcs gravés dans la pierre, d'une petite spirale (figure g) identique à celle représentée, à côté d'une clef d'arc, sur un croquis de Villard (figure b). M'étant rendu sur place pour relever cette gravure, j'examinai, de plus près, les murs d'autres chapelles. Dans la première chapelle Sud, ayant dégagé l'étroit espace situé derrière l'autel des objets au rebut qui l'encombraient, je sentis, en caressant la pierre, des incisions continues.

La surface ayant été débarrassée délicatement – à l'aide d'un blaireau – des efflorescences de salpêtre qui la couvraient, un ensemble de tracés apparut, présentant trois arcs concentriques, le plus grand ayant un rayon de 129 centimètres. Un autre arc, de même rayon que le grand arc, et symétrique, formait avec celui-ci un arc brisé dont le sommet et les naissances étaient disposés selon un triangle équilatéral, proportion harmonieuse, fréquente dans l'architecture gothique du XIII^e siècle. Avec l'aide de Bernard Delaire, de la Société académique de Saint-Quentin, je fis, après avoir suivi les incisions avec la pointe d'un fusain tendre, un relevé en vraie grandeur (figure j). Des joints horizontaux et verticaux refaits interrompent, par endroits, la continuité des traits incisés. Sur une trentaine de centimètres à droite, deux arcs distants de quatre millimètres témoignent d'une correction.

Mais le plus remarquable était sur la droite, au bas du panneau (photographie i et figure j) une série de huit traits rapprochés, normaux aux trois arcs de cercle et convergeant vers leur centre commun. J'avais là, sous les yeux, l'application d'un procédé exposé dans le manuscrit de Villard (figure d) qui figure entre deux faces convergentes d'un vousoir, deux échelles parallèles portent un même nombre de divisions égales. Le commentaire est «par chu tail on vosoires par escandelons», c'est-à-dire «ainsi, on taille les vousoirs par échelons». En joignant par des droites les divisions correspondantes de chaque échelle, le maçon traçait des convergentes, permettant de tailler des vousoirs d'épaisseurs différentes, selon les besoins. Ce système évite la recherche du centre de la courbe, parfois inaccessible.

PRATIQUE DES CROQUIS

Ainsi sur les parois d'une église, nous voyons en application plusieurs croquis techniques du manuscrit. À une époque où n'existait ni support pratique et économique pour les plans ni moyen de les reproduire, le plus pratique était d'afficher, de façon indélébile, sur les murs, les modèles que les compagnons devaient exécuter. C'est ce qu'explique un des croquis de Villard où une sorte de socle ou de fondation montre qu'il s'agit d'une paroi verticale (figure e) ; sur ce croquis, le tracé de plusieurs arcs, comme à Saint-Quentin, est expliqué par la légende : «par chu tail om le mole don grant arc dedens III» (c'est-à-dire «Ainsi on taille le modèle d'un grand arc, (avec) trois (autres) dedans») ; il est précisé ensuite : «pies de tere», que je pense être une erreur de transcription pour «près de terre», indiquant que ces tracés se faisaient au sol, sur une paroi verticale, et non sur une aire horizontale, d'utilisation peu pratique dans l'encombrement du chantier.

L'autre confirmation que nous trouvons, à Saint-Quentin, des usages évoqués par Villard, c'est la spirale, méthode pour tracer des arcs brisés de même courbure, permettant la standardisation des cintres et des vousoirs d'une même

travée (figure f), ou de toute une série d'arcs dans un bâtiment (l'utilisation des spirales est confirmée par la série de spirales superposées, gravées sur une pierre retrouvée à Chartres).

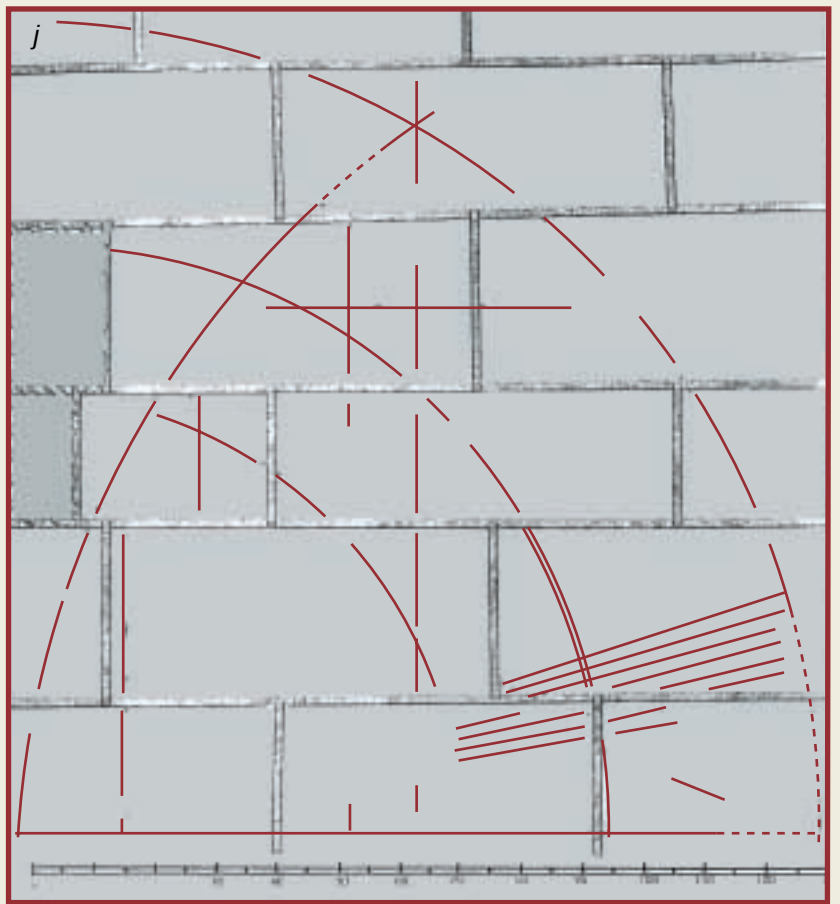
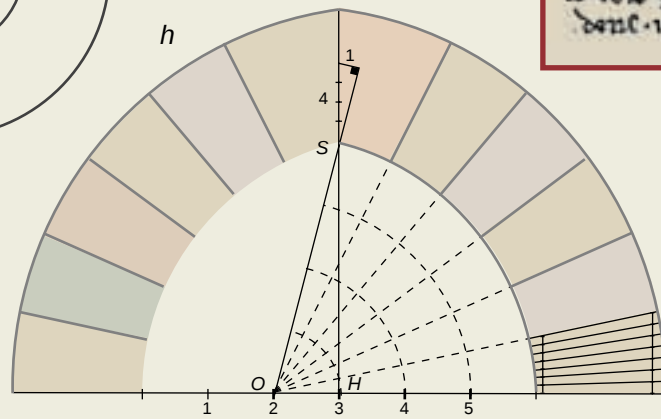
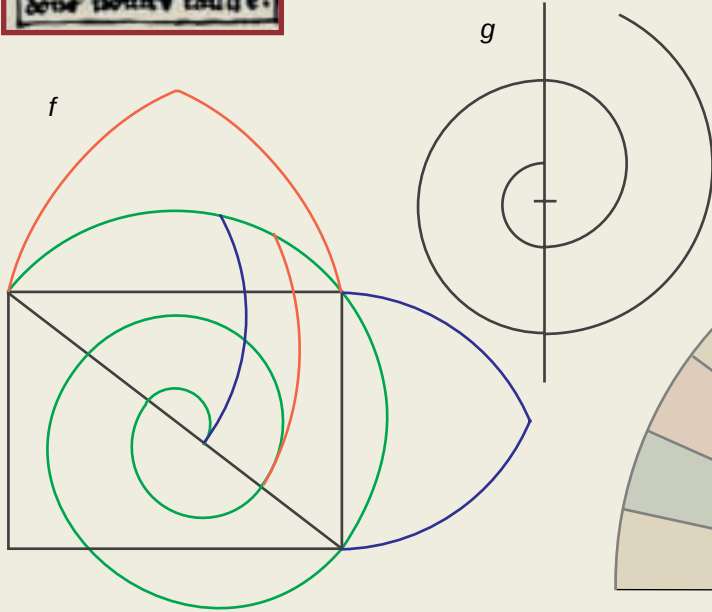
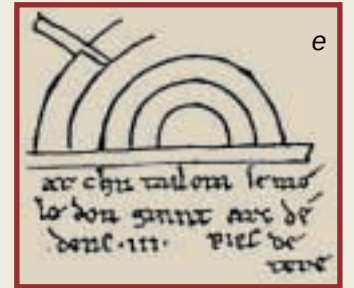
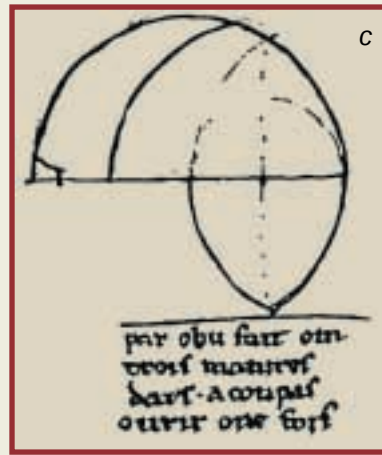
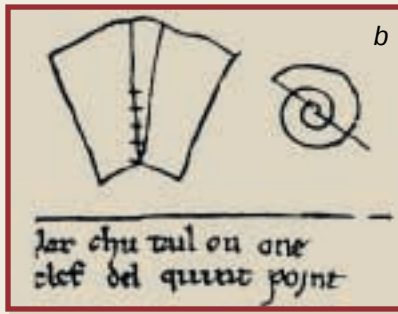
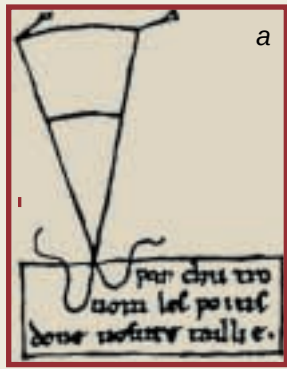
Le souci de standardisation des courbes des constructeurs est marqué par le croquis, maintes fois reproduit, du manuscrit de Villard, montrant trois arcs tracés avec la même ouverture de compas (figure c).

La troisième confirmation, et la plus intéressante, c'est l'emploi du procédé des «escandelons» pour tracer les vousoirs (figure h). En ce qui concerne les vousoirs de clef qui, pour les arcs brisés, doivent être taillés à la demande, Villard nous indique (figure b) comment faire, en reportant l'angle qui correspond à la proportion de l'arc choisi sur le vousoir standard, sans qu'il soit besoin de rechercher le centre de la courbe, comme le montre un croquis de Villard (figure a), ce qui est souvent impossible sur la paroi de traçage dont la surface est limitée. Cet angle est défini par le rapport entre le rayon de l'arc et la distance entre le centre d'un des deux arcs qui forment l'arc brisé et l'axe de celui-ci (figure b). Est figurée ici une clef de «quint point», comme sur le croquis de Villard (figure c). Le rayon de l'arc est l'hypoténuse OS d'un triangle rectangle OSH dont le petit côté est la distance séparant l'axe du centre de l'arc brisé. La connaissance de ce rapport suffit pour tailler les deux demi-clefs.

Ainsi les parois de ces chapelles présentent des exemples de plusieurs procédés exposés dans le manuscrit de Villard, la spirale figurant, comme sur celui-ci, un discret rappel de méthode, au bas de tracés d'exécution. C'est la confirmation de procédés simples et pratiques employés à cette époque, par des constructeurs qui, par ailleurs, comme le montrent d'autres dessins du manuscrit (voir Dossier «Arts et sciences au Moyen Âge», *Pour la Science*, et «Villard de Honnecourt, la pensée technique au XIII^e siècle», *Picard éditeur*.) maîtrisaient dans des cas plus complexes, la stéréotomie, le «Trait».

Que ces gravures relevées sur les murs soient anciennes est plausible, car qui se donnerait la peine de faire aussi soigneusement et précisément de telles épreuves, si ce n'était pour faire exécuter ces éléments ? Cependant, que ces procédés correspondent à ceux décrits dans le manuscrit de Villard ne signifie pas que celui-ci les ait, personnellement, tracés, ni qu'ils lui soient exactement contemporains. L'essentiel est d'y voir confirmer des méthodes des constructeurs du Moyen Âge, indiquées dans le manuscrit de Villard de Honnecourt.

Roland BECHMANN



Gènes anciens

De l'ADN végétal conservé dans la diatomite depuis huit millions d'années.

Pour retracer l'histoire de la vie et de l'évolution, les biologistes comparent les espèces animales et végétales fossiles avec les espèces actuelles. Depuis quelques années, l'étude de l'ADN, support du patrimoine génétique, a complété des comparaisons morphologiques : de l'ADN fossile a été extrait d'insectes de 130 millions d'années conservés dans de l'ambre jaune, et d'une feuille de magnolia de 17 millions d'années retrouvée dans l'argile de Clarkia, aux États-Unis. Nous avons découvert un nouveau milieu qui préserve l'ADN pendant plusieurs millions d'années : la diatomite.

En Ardèche, il y a environ huit millions d'années, des dépôts sédimentaires de diatomite se sont formés dans des lacs de cratères volcaniques du massif du Coiron. Ces dépôts sont constitués des squelettes siliceux d'algues microscopiques,

les diatomées. La silice est un milieu stérile, antiseptique et acide, comparable à celui des tourbières : les couches de diatomite ont préservé des organismes fossiles, végétaux et animaux, sous forme de momies naturelles. Les tissus mous (peau, poils, viscères) et même la couleur des insectes ont été conservés.

À partir de feuilles momifiées, nous avons extrait de l'ADN de chloroplastes, les organites des végétaux contenant la chlorophylle. Par la méthode d'amplification des gènes, nous avons multiplié les fragments d'ADN qui correspondent à un gène nommé *rbcl*. Les séquences de nucléotides (les éléments de base de l'ADN) de ce gène, pour les plantes actuelles, sont répertoriées dans des bases de données qui permettent de réaliser des comparaisons avec les gènes que nous amplifions.

De l'ADN extrait et multiplié à partir d'une feuille de châtaignier a donné une séquence qui correspond au gène *rbcl* de l'actuel châtaignier *Castanea sativa*, avec 99,6 pour cent de similarité. Les séquences amplifiées à partir d'échantillons prélevés sur des feuilles fossiles d'autres espèces ne correspondent pas à ces espèces.

D'OÙ VIENT VRAIMENT L'ADN

Ces différences sont-elles réelles ? D'autres travaux d'extraction d'ADN très ancien ont fait l'objet de controverses : l'amplification des gènes est sensible à la contamination par des matières organiques actuelles, et l'ADN multiplié par cette technique n'est pas toujours de l'ADN fossile. Si un gène amplifié à

partir d'un fossile a une très grande similarité avec son analogue actuel, c'est que l'espèce a peu évolué (c'est vrai pour les végétaux depuis huit millions d'années)... ou que l'échantillon a été contaminé.

Nous avons toutefois écarté l'hypothèse d'une contamination, sur le site ou en laboratoire : parmi les séquences génétiques obtenues, l'une correspond à la ravenelle, une plante de milieu subtropical qui pousse aujourd'hui à Madagascar. Il est peu probable que des spécimens subsistent en Ardèche.

En outre, nous avons amplifié sélectivement le gène *rbcl* des diatomées, dont le squelette compose le sédiment fossilifère, et nous avons obtenu deux séquences, l'une proche de celle de la diatomée *Cylindrotheca* et l'autre de l'algue *Pylaiella*. La contamination par des diatomées modernes est très improbable : les diatomées ont besoin, pour se développer, de lumière et d'humidité, conditions qui ne sont pas réunies dans le sédiment ni au laboratoire. L'ADN que nous avons amplifié semble bien vieux de huit millions d'années.

Nous avons ensuite appliqué la méthode d'amplification des gènes à des échantillons de diatomite qui ne contenaient pas de fossiles, en recherchant le gène *rbcl* d'espèces d'arbres. Nous avons effectivement obtenu des fragments du gène *rbcl* d'arbres, dont une séquence similaire au cèdre, à 99,8 pour cent. L'ADN fossile ne provient pas toujours des feuilles fossiles, mais aussi de la diatomite, prélevée involontairement avec les échantillons. Lors de la formation du dépôt, l'ADN aurait formé avec la silice, qui constitue les squelettes des diatomées, un complexe chimique qui aurait empêché sa dégradation par l'oxygène ou par l'eau.

Outre des feuilles d'arbre, la diatomite du massif du Coiron contient de nombreux fossiles d'animaux d'espèces aujourd'hui éteintes. Il est aujourd'hui possible d'y rechercher de l'ADN et de mieux comprendre leurs relations avec les espèces actuelles.

Bernard RIOU, Musée paléontologique de La Voulte-sur-Rhône
Jean-François MANEN, Conservatoire et Jardin botaniques de Genève



De l'ADN a été extrait d'une feuille de châtaignier fossile de huit millions d'années, conservée dans de la diatomite, dans le massif du Coiron, en Ardèche (en bas). Jusqu'à présent, seuls des insectes

conservés dans de l'ambre jaune (en haut) et des feuilles de magnolia (au milieu) fossilisées dans des argiles ont fourni des séquences génétiques plus anciennes.