

raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective,

la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres

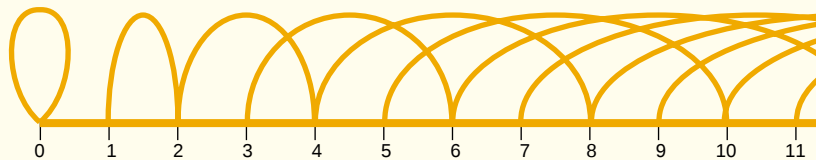
axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de R sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrions formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application $n \rightarrow 2n$ est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.

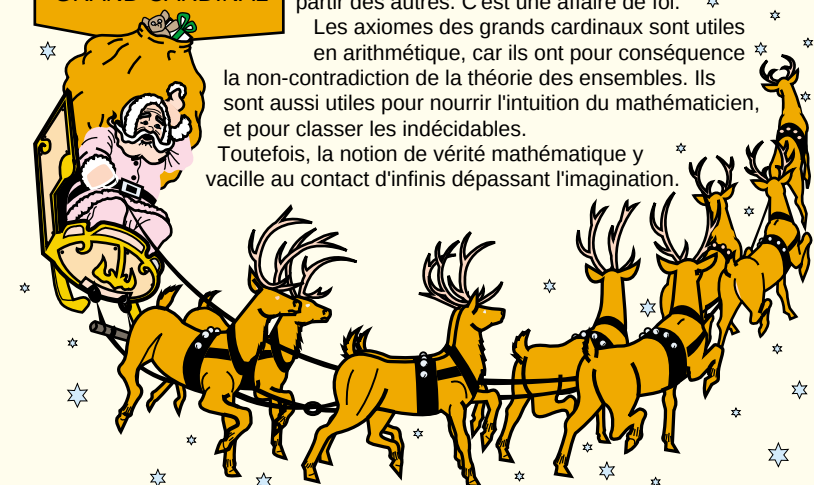


Un ensemble E , tel qu'il existe une injection de E dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi.

GRAND CARDINAL



Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables.

Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.

Piero della Francesca, peintre mathématicien

ENRICO GAMBA • VICO MONTEBELLI

Ce grand peintre était aussi l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a adapté les mathématiques savantes aux besoins des techniciens.

Les tableaux de Piero della Francesca (1415-1492) sont aujourd'hui connus dans le monde entier ; ses travaux sur la perspective sont plus confidentiels et son œuvre mathématique est complètement ignorée. Piero della Francesca était pourtant un mathématicien réputé en son temps : selon Giorgio Vasari, qui publia en 1550 *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes*, Piero «ne s'éloigna jamais des mathématiques», discipline où il était «tenu pour un grand maître», à tel point qu'il «comprit [Euclide] mieux que quiconque».

Cette double qualité, de peintre et d'homme de science, évoque immédiatement Léonard de Vinci, plus jeune que Piero della Francesca d'une quarantaine d'années. Toutefois, selon Vasari, tandis que Léonard passait sans cesse des fresques aux miroirs et des machines à l'anatomie, Piero était rationnel et systématique. C'était le «meilleur géomètre de son époque».

Les dessins techniques et les écrits de Léonard, abondants et variés, sont désordonnés, comme des notes d'atelier ou de chantier ; ils n'étaient pas publiables tels quels. En revanche, Piero a écrit trois traités, de quelques centaines de pages au total : *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Petit livre à propos des cinq corps réguliers*), *De prospectiva pingendi* (*La perspective pour la peinture*) et *Trattato d'abaco* (*Traité de l'abaque*). Ces traités, qui contiennent des parties appliquées et des parties théoriques, sont compacts et ordonnés, surtout en comparaison avec les livres des techniciens de l'époque, dont Piero était.

Au Moyen Âge et à la Renaissance, les marchands, les artisans, les artistes et, de manière générale, les techniciens

étaient formés dans les écoles d'abaque et dans les ateliers. Le terme abaque ne désigne pas l'ancien instrument de calcul, mais la discipline, voire le texte écrit et l'école elle-même. Les écoles d'abaque sont comparables aux instituts professionnels actuels : on apprendait en regardant faire et en faisant. Les apprentis exerçaient leur sens de l'observation et leur raisonnement sur des cas concrets, spécifiques de la profession qu'ils apprenaient. Tout savoir théorique indépendant d'une réalisation concrète était exclu ; les rares manuels ne contenaient aucune trace de théorie. Nous les considérerions aujourd'hui comme des carnets de notes : aide-mémoire pour ceux qui savaient déjà, ils étaient quasi incompréhensibles pour tous les autres. Ils étaient écrits en langue vulgaire, langue des techniciens, tandis que les savants utilisaient le latin ; les théories théologiques, philosophiques, juridiques, médicales, mathématiques, mécaniques ou astrologico-astronomiques étaient toujours formulées en latin, langue plus précise, adaptée au cadre doctrinal.

L'étude des polyèdres réguliers

Les ouvrages mathématiques de Piero sont plus proches des canons théoriques euclidiens que des normes des techniciens. Le traité qui concerne le plus la géométrie formelle est le *Libellus de quinque corporibus regularibus*, dont la portée dépasse largement ce qu'annonce son titre. Après un chapitre de géométrie plane, les deux chapitres centraux s'intéressent aux cinq polyèdres réguliers, c'est-à-dire dont les faces sont des polygones réguliers

tous identiques : le tétraèdre (dont les faces sont des triangles équilatéraux), le cube (composé de six carrés), l'octaèdre (composé de huit triangles équilatéraux), le dodécaèdre (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers) et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Ils sont prolongés par un chapitre consacré à cinq polyèdres semi-réguliers, ainsi qu'à d'autres corps solides.

Le *Libellus* est une œuvre singulière : comparé aux livres d'abaque, désordonnés et traitant peu de géométrie, son contenu fondamentalement géométrique est remarquable. C'est le premier ouvrage européen entièrement consacré à l'étude des polyèdres, qui avait pourtant commencé avec Platon et Pythagore. Piero della Francesca lui donne un nouveau souffle : grâce au *Libellus*, les polyèdres, longtemps considérés comme des objets purement théoriques, redeviennent des sujets d'étude mathématique, des éléments ornementaux, des objets de dessin exemplaires.

L'originalité du *Libellus* provient aussi du lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer : dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeltre, le seigneur d'Urdino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des «choses d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens».

Le *Libellus* suit la tradition de l'abaque : ses 140 propositions traitent toujours de figures géométriques aux dimensions déterminées. On donne des mesures de grandeurs et l'on

demande de trouver la valeur numérique d'autres grandeurs inconnues. En outre, le *Libellus* ne contient pas de démonstrations, du moins selon les modalités classiques. Enfin, il s'inscrit aussi dans la tradition de l'abaque, parce que, dans le calcul des grandeurs géométriques, il utilise autant des procédures géométriques que des règles arithmétiques et algébriques.

D'un autre côté, le *Libellus* s'inscrit dans la tradition euclidienne par l'ordre logique des propositions et par des références aux *Éléments* d'Euclide et aux œuvres d'Archimède *De la sphère et du cylindre* et *Des conoïdes et des sphéroïdes*. Les théorèmes n'y sont pas dégradés en petites règles empiriques appliquées, usage courant chez les techniciens, qui préféraient une règle simple et approximative à une règle exacte, mais complexe : ils sont utilisés de façon coordonnée.

Mélanger théorie et application

Ce mélange de mathématique «haute» et «basse» devait apparaître à Piero comme un tout homogène ou, du moins, lié. Il fait siens avec maestria les théorèmes du livre XIII des *Éléments*, qui établissent les relations entre les longueurs des arêtes des polyèdres et le diamètre de la sphère circonscrite. Il écrit que l'arête du tétraèdre est la moyenne géométrique (la racine carrée du produit) de la hauteur du tétraèdre et du diamètre de la sphère circonscrite, ou que l'arête du dodécaèdre est la section d'or de l'arête du cube inscrit dans la même sphère (la section d'or d'un segment AB est réalisée en un point M du segment AB tel que le rapport des longueurs AB à AM soit égal au rapport des longueurs AM à MB). En même temps, il dresse le tableau des valeurs numériques des arêtes des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) inscrits dans une sphère de diamètre 12. Ce qui nous semble un cas particulier satisfaisait pleinement le milieu de l'abaque, car 12 est multiple de 2, 3, 4 et 6 : si le diamètre de la sphère était triple ou de moitié, il suffisait respectivement de multiplier par trois ou de diviser par deux la valeur de l'arête.

Toutefois, même s'il utilise le style de l'abaque, Piero s'inspire d'Euclide. Celui-ci conclut les *Éléments* avec un théorème qui relie les arêtes des poly-

èdres inscrits dans une même sphère ; Piero conclut de la même manière le second chapitre du *Libellus*, mais avec des valeurs numériques, avec les mesures des arêtes des polyèdres inscrits dans la sphère de diamètre 12.

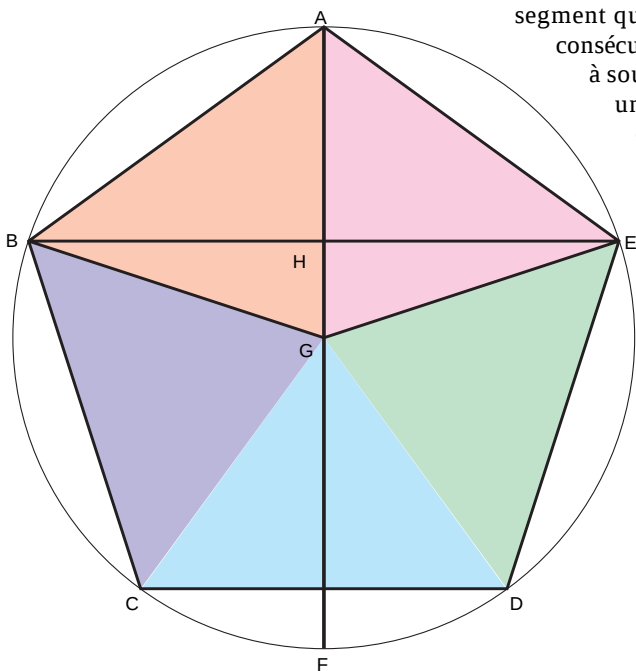
La donnée de valeurs numériques simples était nécessaire pour les techniciens, qui, peu familiers avec l'écriture et soucieux de préserver les secrets de leur profession, faisaient confiance à leur mémoire. Pour les commerçants, le calcul mental rapide était vital : dans une négociation, il faut évaluer rapidement les bénéfices des deux parties. La mémorisation de règles synthétiques, comme des proverbes, et de paramètres numériques était la méthode la plus sûre, la plus écono-

mique et la plus rapide. En conséquence, la règle de trois était fréquemment utilisée en géométrie (ce qui n'est pas le cas aujourd'hui).

La règle de trois a peut-être aussi donné à Piero l'idée de son calcul de l'aire du pentagone régulier. Dans le livre XIV des *Éléments* (qui n'est pas d'Euclide, mais d'Hypsicle, et qui était connu du temps de Piero comme le livre XV), on trouve la formule suivante : l'aire est égale au produit des $3/4$ du diamètre du cercle circonscrit par les $5/6$ de la corde du pentagone. Piero propose une formule plus simple (voir la figure 2) : l'aire d'un pentagone régulier est déterminée par les $5/8$ du produit du diamètre du cercle circonscrit par la longueur de la corde du pentagone (le



1. PORTRAIT DE PIERO DELLA FRANCESCA attribué à Santi di Tito, probablement réalisé à la fin du XVI^e siècle. L'auteur du portrait a davantage rendu hommage au mathématicien qu'à l'artiste : les œuvres d'Euclide et d'Archimède posées sur la table sont éloquentes.



segment qui joint deux sommets consécutifs). L'invention prête à sourire : pour nous, c'est une banale simplification de fractions. Toutefois Piero envisageait probablement la chose différemment : il devait démontrer la nouvelle formule, et la simplification ne prouvait pas son résultat, elle le confirmait tout au plus.

Les démonstrations utilisées dans toutes les branches des mathématiques étaient du type de celles qu'utilisent les géomètres. Dès 1202, Léonard de Pise établit les formules de résolution des équations du second degré avec des démonstrations géométriques, en se fondant sur des propositions énoncées géométriquement dans les *Éléments*. Piero, lui, élabore une démonstration de la formule qui donne l'aire du pentagone, en utilisant la règle de trois d'une manière nouvelle par rapport à la traduction euclidienne (voir la figure 2).

Nous avons signalé la supériorité évidente du *Libellus* par rapport aux manuels de l'époque : on peut en dire autant du traité de perspective *De prospectiva pingendi*. Piero y adopte un discours résolument déductif et s'élève contre les énumé-

rations et les comptes rendus plus ou moins ordonnés auxquels parvenaient les meilleurs techniciens contemporains.

En ce qui concerne la géométrie savante, Piero montre une parfaite compréhension de l'œuvre euclidienne, envisagée toutefois du point de vue de l'abaque. La liberté qui en découle ouvre des voies nouvelles ou rarement empruntées : dans le *Libellus*, il reprend le thème des inclusions réciproques de polyèdres réguliers, développé dans le livre XV des *Éléments*, en y ajoutant une nouvelle inclusion, celle de l'icosaèdre dans le cube (voir la figure 6).

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement géométrique est ainsi plus clair : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables.

Un polyèdre à 72 faces

Piero della Francesca prolonge aussi les recherches d'autres mathématiciens savants. Il souligne, dans l'une des rares notes qu'il ajoute à ses traités, qu'il va plus loin que Giovanni Camparo da Novara, mathématicien du XIII^e siècle dont la traduction, de l'arabe en latin des *Éléments* d'Euclide, était très lue à l'époque. Le problème concerne un solide à 72 faces, qui est un bon modèle à facettes de la sphère, dont Piero calcule la surface et le volume. La surface est la somme des surfaces de 24 triangles isocèles et de 48 trapèzes isocèles ; le volume est la somme des volumes des 24 pyramides à base triangulaire et des 48 pyramides à base trapézoïdale dont le sommet est le centre de la sphère circonscrite.

2. DÉMONSTRATION, dans le style de l'abaque, de la formule servant à calculer l'aire du pentagone. Le produit $AG \times BE$ est la surface de quatre des cinq triangles isocèles de sommet G qui constituent le pentagone (l'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur). Par quelle fraction x du rayon faut-il multiplier la corde BE du pentagone pour obtenir la surface de cinq triangles ? x est la solution de l'équation : $(AG \times BE)/4 = (x \times BE)/5$. On obtient donc $x = (5/4) AG = (5/8) AF$. La surface du pentagone s'obtient en multipliant $5/8$ du diamètre par le segment BE , formule dont Piero s'attribue l'invention. L'utilisation géométrique de la règle de trois est assez insolite.



3. LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS, dits aussi «solides» ou «corps platoniciens», sont des figures de l'espace à trois dimensions que l'on construit avec des faces polygonales identiques entre elles et elles-mêmes régulières. Ils sont représentés ici par Kepler dans son traité *Harmonice Mundi* (1619). Platon les associait aux cinq éléments de sa «physique». Le tétraèdre (associé au feu par Platon) a 4 faces en forme de triangles équilatéraux identiques (au centre) ; le cube, ou hexaèdre (associé à la terre) a 6 faces en forme de carrés (en bas, à gauche) ; l'octaèdre formé de deux «pyramides d'Égypte» accolées par leurs bases carrées (associé à l'air) a 8 faces triangulaires équilatérales (en haut, à gauche) ; le dodécaèdre (associé à l'éther du monde supralunaire) a 12 faces pentagonales (en haut, à droite) ; enfin l'icosaèdre (associé à l'eau) comporte 20 faces triangulaires équilatérales (en bas, à droite).

Voûte en arc de cloître et voûte d'arête

Pour Piero della Francesca, la voûte en arc de cloître et la voûte d'arête sont des surfaces délimitées par l'intersection à angle droit de deux demi-cylindres de même rayon (*a*). La voûte en arc de cloître est la surface intérieure (*b*) et la voûte d'arête est la surface extérieure (*c*).

Piero calcule le volume contenu sous la voûte en arc de cloître. Notons V_p le volume de la pyramide (*d*) de base $ABCD$ et de sommet F , V le volume du solide «sphéroïde» compris à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres (ce volume est le double du volume recherché puisqu'en pratique la voûte est construite à partir de demi-cylindres), V_c le volume du cône de sommet F et dont la base est le cercle inscrit dans le carré $ABCD$ (*e*) et V_s le volume de la sphère de rayon OF . La proportion établie par Piero s'écrit : $V_p/V = V_c/V_s$. Cela revient à considérer que le cône est à la sphère ce que la pyramide est au sphéroïde engendré par la rotation autour de l'axe OF

d'un «cercle déformable» qui s'appuie sur un «équateur» carré $ABCD$: Piero pense qu'il existe une analogie entre les solides qui s'appuient sur un même cercle (la sphère et le cône) et les solides de même hauteur qui s'appuient sur le carré $ABCD$. Cette idée lui est venue d'une relation qu'il a démontrée dans le plan. Si A_1 est l'aire d'un triangle FMN (*g*), A_2 l'aire du cercle de diamètre

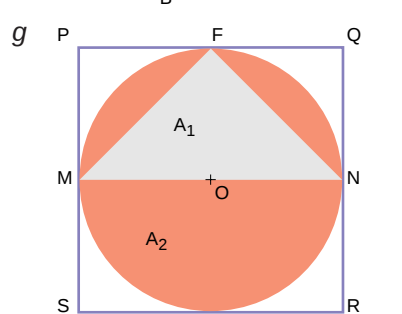
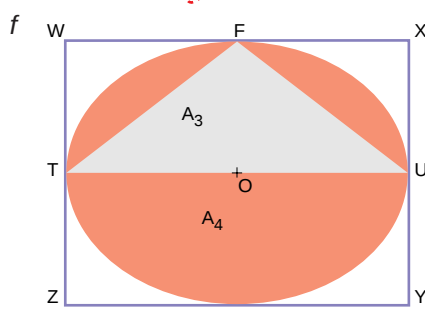
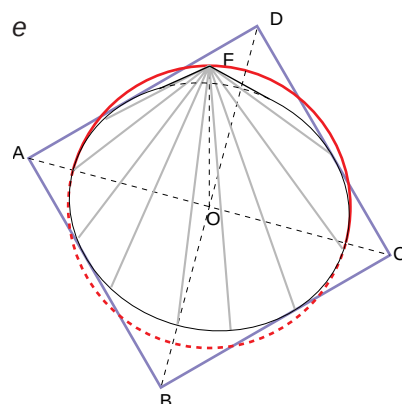
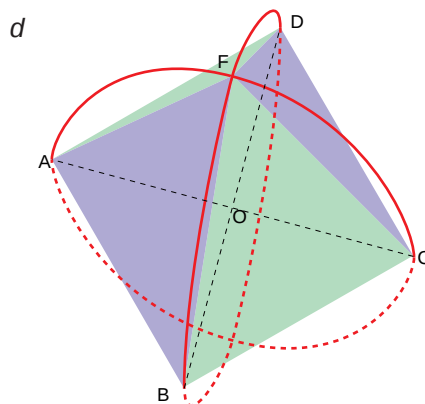
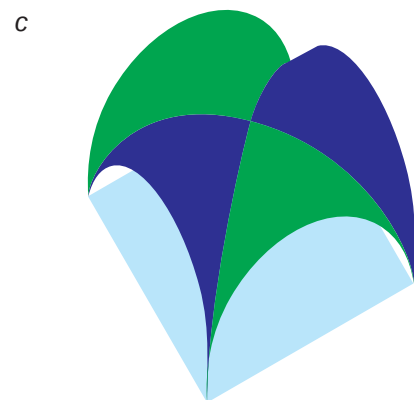
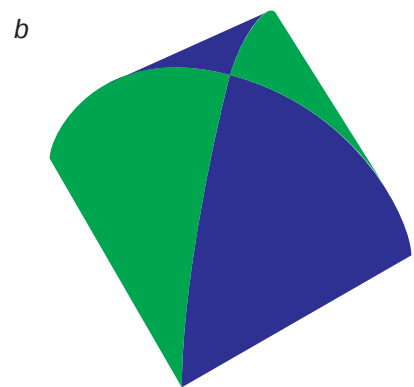
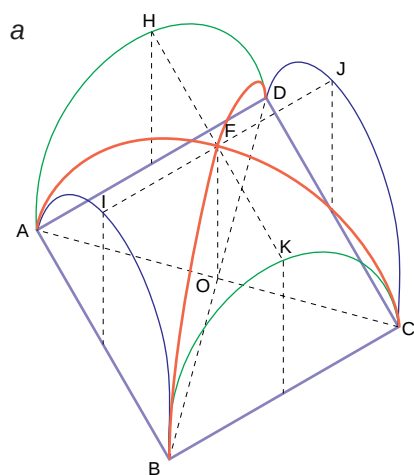
MN , A_3 l'aire d'un triangle FTU (*f*) et A_4 celle de l'ellipse, alors $A_1/A_2 = A_3/A_4$. Cette égalité signifie que le rapport de l'aire de l'ellipse à celle du rectangle $WXYZ$ est égal au rapport de l'aire du cercle à celle du carré $PQRS$. Le passage du plan au volume est fondé sur le fait que l'intersection d'un cylindre et d'un plan non orthogonal à son axe est une ellipse.

Piero calcule le volume V du sphéroïde en remarquant que le rapport de l'aire du carré $ABCD$ à celle du cercle inscrit est $4/\pi$, ce qui lui donne le rapport du volume de la pyramide à celui du cône : $V_p/V_c = 4/\pi$. Il ne lui reste qu'à multiplier le volume de la sphère par ce rapport $V = (4/\pi) \times (4\pi r^3/3) = 16r^3/3$ (où r est le rayon des cylindres). Le volume situé sous la voûte en arc de cloître est donc $8r^3/3$.

La voûte d'arête est formée par la surface des deux demi-cylindres extérieure à l'intersection. La surface de cette voûte est obtenue en ôtant la surface de la voûte en arc de cloître de la surface des deux demi-cylindres réunis. Piero soustrait de la surface des deux demi-cylindres, qui vont du demi-cercle AHD au demi-cercle BKC et du demi-cercle AIB au demi-cercle CJD , la surface des «fuseaux» AFB , BFC , CFD et DFA qui forment la voûte en arc de cloître, pour trouver la surface des quatre «onglets» $AIBFA$, $BKCFB$, $CJDFC$ et $DHAFD$ qui constituent la voûte d'arête (*a*).

Notons V_{AC} le volume sous la voûte en arc de cloître et S_{AC} sa surface, V_s et S_s le volume et la surface de la sphère de centre O et de rayon OF . La relation établie par Piero est $V_{AC}/S_{AC} = V_s/S_s$. Il en découle que $V_{AC}/S_{AC} = (4\pi r^3/3)/4r^2 = r/3$, et donc $S_{AC} = 3V_{AC}/r$. Puisque $V_{AC} = 8r^3/3$, $S_{AC} = 8r^2$. La surface latérale d'un demi-cylindre comprise entre les demi-cercles AHD et BKC est $2\pi r^2$. En effectuant la différence $4\pi r^2 - S_{AC}$, on obtient la surface de la voûte d'arête qui est donc donnée par la formule : $S = 4r^2(\pi - 2)$.

Cette formule est exacte : on la vérifie par le calcul intégral. La méthode utilisée par Piero n'est pas la version mathématique de manipulations empiriques : elle est intuitive, mais elle est plus scientifique que technique.



Piero trouve la hauteur de ces pyramides selon les strictes modalités euclidiennes.

Ce problème du polyèdre à 72 faces a un intérêt architectural : il se présente lors de la construction des coupoles, et des polyèdres analogues étaient utilisés pour la construction de globes géographiques et astronomiques. La solution de Piero est générale : elle serait valable

même si le solide, au lieu d'être construit à partir de dodécagones, était construit sur la base d'autres polygones réguliers.

À l'époque, une évolution décisive apparaît : les nouvelles découvertes techniques incitent les ingénieurs à dépasser l'empirisme et à utiliser des procédures mathématiques rigoureuses. Piero résout, dans cet esprit, deux autres problèmes originaux : le calcul du

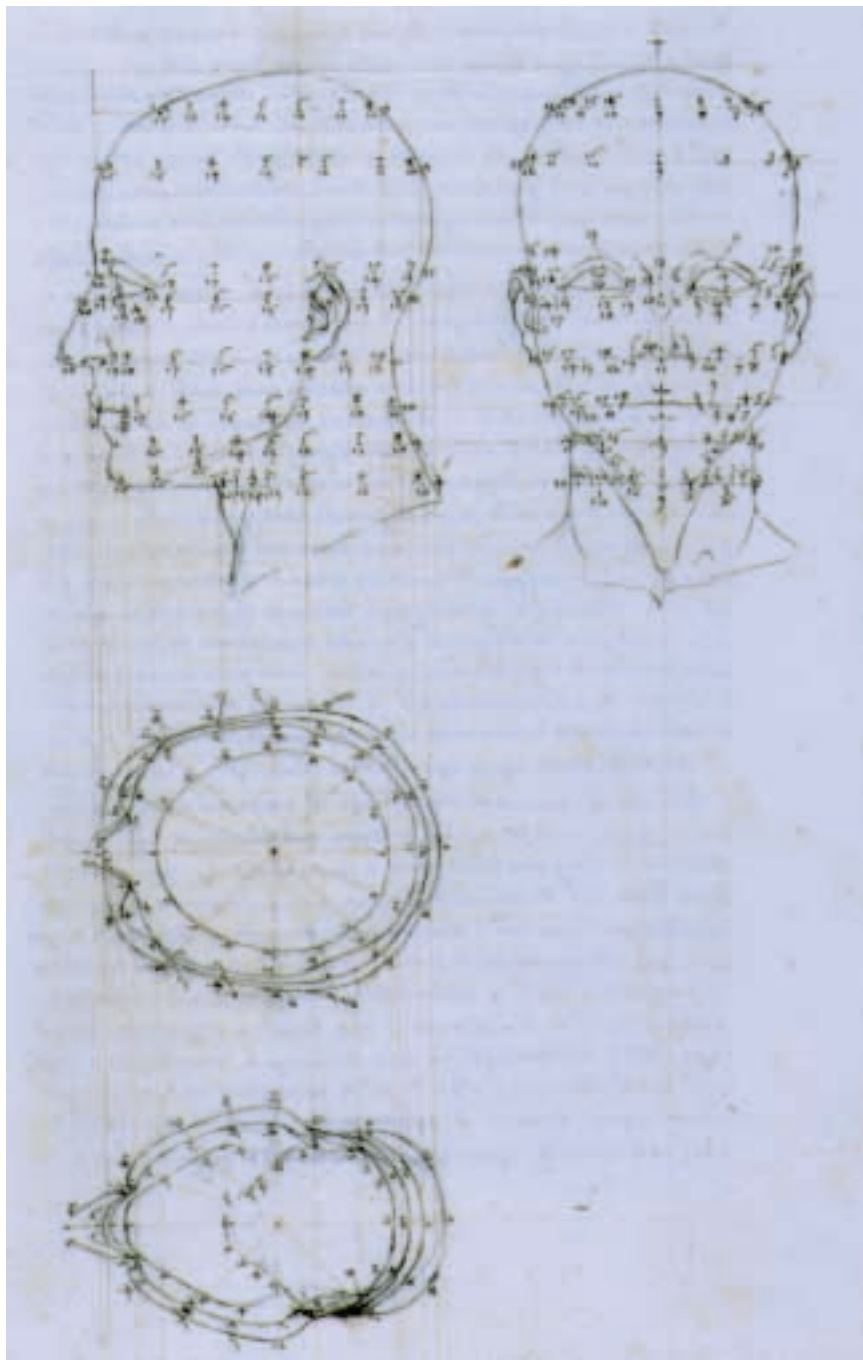
volume sous la voûte en arc de cloître (ou voûte d'angle) et celui de la surface de la voûte d'arête (voir l'encadré de la page 71). L'œil du mathématicien contemple les réalisations techniques et trouve de nouvelles voies de recherche.

Euclide n'étant pas d'une grande utilité pour résoudre ce problème, Piero utilise de téméraires analogies avec les procédures d'Archimède. Étonnamment, il obtient des résultats exacts, qui prouvent son intuition mathématique. De la manière laconique qu'il affectionne, il fait comprendre qu'il a obtenu un résultat important. Après avoir effectué ses calculs sans indiquer les procédures adoptées (les écrits de l'abaque exposent les résultats sans les expliquer), Piero transgresse les habitudes et se lance dans l'explication de la voie qu'il a empruntée. Cette explication n'est pas un modèle de clarté, mais on ne peut guère en attendre plus d'un auteur du XV^e siècle. Piero della Francesca est l'un des rares auteurs qui ait relié avec agilité le «grand système» des mathématiques d'Euclide et d'Archimède au «petit système» des mathématiques de l'abaque. Ce lien a pris de plus en plus d'importance au long du XVI^e siècle.

Enseignement pratique et algèbre

L'enseignement des écoles d'abaque se fondait sur le calcul appliqué. Les professeurs fournissaient à leurs élèves des séries de problèmes typiques de leur profession : achat et vente, change, associations, capitalisation, mesures. Cette façon de procéder, en accordant plus d'importance aux valeurs numériques, est la caractéristique la plus originale par rapport à la tradition euclidienne : elle favorise l'intérêt pour l'algèbre, efficace pour résoudre des problèmes, même géométriques. Outre l'introduction des chiffres arabes, le grand mérite historique des professeurs d'abaque est d'avoir, pendant le Moyen Âge, diffusé et développé la connaissance de l'algèbre en Europe.

Dans l'histoire de l'algèbre, Piero della Francesca arrive juste avant le progrès fondamental qu'est la résolution des équations du troisième degré, et dans la phase de transition d'une algèbre rhétorique, exposée de manière discursive, à une algèbre qui utilise des abréviations et des symboles. Le texte où Piero a rassemblé ses recherches algébriques n'avait pas



4. CETTE TÊTE, représentée de face, de profil, par-dessus et par-dessous suivant des projections orthogonales, est extraite de *De prospectiva pingendi*, de Piero della Francesca. La représentation est tracée par points, déterminés par l'intersection des lignes et repérée par des nombres. Piero veut ainsi montrer que la peinture n'est pas d'abord une œuvre manuelle : avant la réalité sensible, existent la perfection géométrique, les lois de l'harmonie et des proportions. Il n'y a donc pas de dissension entre la science et l'art.

de titre : il a été nommé, *a posteriori*, *Trattato d'abaco*. C'est un texte singulier par rapport aux ouvrages d'abaque habituels, tant en raison de l'extension de la partie traitant de géométrie (147 problèmes sur 492) que de l'ampleur et de la profondeur de la partie concernant l'algèbre. Cette dernière mériterait presque que l'on attribue au traité le sous-titre de «Livre d'algèbre» : 45 pour cent des problèmes sont résolus grâce à l'algèbre.

Ce traité n'est pas seulement algébrique parce qu'il contient beaucoup d'algèbre (de nombreux problèmes avaient déjà été résolus par voie arithmétique ou algébrique, selon les préférences ou les connaissances des auteurs), mais, surtout, parce qu'il améliore l'algèbre de son temps. Piero classe et résout 61 types d'équations du premier au sixième degré, dont 13 sont toutefois des variantes. Ce grand nombre de types d'équations s'imposait pour les praticiens de l'abaque : face à une question particulière, l'habileté consistait à rechercher, parmi les nombreux exemples étudiés et mémorisés, celui qui s'en rapprochait le plus. De surcroît, les mathématiciens de l'époque travaillaient avec des équations à coef-

ficients positifs : l'algèbre se fondait sur la géométrie, et c'est dans le cadre des longueurs, des surfaces et des volumes qu'étaient interprétés les équations et les coefficients des inconnues. Pour résoudre l'équation $x^2 = 4x$, on cherchait le côté d'un carré dont l'aire était égale à quatre fois ce côté. Aussi ne prenait-on pas en compte les solutions nulles ou négatives, sauf dans des cas très rares.

Pour les équations de degré supérieur à deux, Piero considère des équations rationnelles ou irrationnelles (c'est-à-dire faisant intervenir des racines de l'inconnue) dont le degré pouvait être réduit. Il ne s'agissait pas d'une nouveauté, pas plus que la résolution des équations que l'on nomme aujourd'hui binomiales et biquadratiques (qui ne contiennent que des termes de degré pair). Piero se trompe parfois, mais il obtient quelques résultats intéressants lorsqu'il quitte le contexte traditionnel pour s'aventurer vers d'autres types d'équations telles que $ax^3 = bx + c$, $ax^3 = bx^2 + c$ et $ax^3 = bx^2 + cx + d$. De manière surprenante, Piero les résout comme si elles étaient du second degré, en confondant les termes du second et du troisième degré. Dans la dernière équation, il considère $(cx + d)$ comme un terme

connu et se ramène au cas précédent, conformément à une tradition utile. Malheureusement, toutes les analogies ne fonctionnent pas comme on le souhaiterait.

Des erreurs flagrantes

On peut s'étonner que Piero ait commis des erreurs aussi banales et qu'il n'ait même pas vérifié le résultat obtenu, comme le faisaient les praticiens de l'abaque. C'est d'autant plus étonnant que, dans le *Libellus*, il effectue correctement des calculs compliqués avec des nombres de plus de dix chiffres et que les 140 problèmes qui composent le livre sont correctement posés.

Ce fait confirmerait le caractère expérimental du *Trattato d'abaco*. Piero révèle les domaines qu'il explorait, soit à tâtons, soit avec quelques hypothèses de travail, violant ainsi un critère de l'écriture des traités, selon lequel on ne mettait par écrit que les résultats vérifiés et largement approuvés. On peut supposer, plus prosaïquement, que Piero a copié ces problèmes sans les vérifier, selon une habitude répandue chez les compilateurs de livres d'abaque. Ce soupçon est fondé : dans deux livres d'abaque du XIV^e siècle, on



5. PIERO DELLA FRANCESCA, après avoir traité des cinq polyèdres réguliers (aux faces identiques) et de leurs inclusions réciproques, s'occupe des cinq polyèdres semi-réguliers qu'il obtient en tronquant les premiers. Les polyèdres semi-réguliers ont des arêtes égales et des faces différentes. Le tétraèdre tronqué (à gauche), formé de quatre hexagones et de quatre triangles équilatéraux, est obtenu par division de chaque arête du tétraèdre en trois parties égales ; on fait passer le plan de troncature par les trois points de tripartition les plus proches de chacun des sommets ; on élimine enfin les quatre pointes du tétraèdre ainsi obtenues, qui sont aussi des tétraèdres. Si le même système est appliqué à l'icosaèdre (au milieu),

on obtient autant de pentagones que de sommets de l'icosaèdre (12) et autant d'hexagones que de faces (20), car cinq faces triangulaires conviennent à chaque angle. Il s'agit de l'icosaèdre tronqué, dont la forme est utilisée pour les ballons de football. Piero calcule la surface et le volume de ces polyèdres. Un solide à 72 faces (à droite) repris des dessins de Léonard de Vinci et construit à partir du dodécaèdre de Piero, qui affirme être le premier à en avoir calculé l'aire et le volume. Ce volume présente un intérêt artistique et architectural lié à la conception des coupoles. Ces représentations sont tirées du manuscrit *De divina proportion* de Luca Pacioli, l'élève le plus connu de Piero della Francesca en mathématiques.

trouve les mêmes problèmes avec les mêmes erreurs.

Le caractère expérimental du *Trattato d'abaco* est toutefois confirmé par la manière dont Piero affronte d'autres équations, du troisième au sixième degré, en proposant des formules de résolution correctes, soit pour une seule équation (il doit en avoir vérifié le résultat), soit pour des équations provenant d'une classe établie de problèmes. En voici un exemple : calculez à combien de deniers par mois est prêtée une lire (une lire vaut 240 deniers) en

sachant que 100 liras donnent 160 liras au terme de quatre années. Le résultat est donné par l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 96\,000, \text{ qui est du type :}$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x = b$$

(avec $a = 20$ et $b = 96\,000$), et que l'on peut écrire :

$$(x^2 + 2ax + a^2)^2 = b + a^4.$$

L'équation est correctement résolue par Piero d'une manière que l'on résume aujourd'hui par la formule :

$$x = \sqrt[4]{(a^4 + b)} - a \\ = (\sqrt[4]{256\,000} - 20) \text{ deniers.}$$

On vérifie que la formule de Piero est générale, dans la mesure où elle résout correctement non seulement cette équation, mais toutes celles qui proviennent de la classe de problèmes suivante : calculez à combien de deniers est prêtée une lire par mois en sachant que C liras, au terme de quatre années, donnent M liras. En effet, on parvient toujours à l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 160\,000 M/C - 160\,000, \\ \text{résolue par la formule précédente :}$$

La mathématique en représentation

La récente célébration du 500^e anniversaire de la mort de Piero della Francesca a remis à l'honneur sa peinture, redécouverte depuis le XIX^e siècle, et ses travaux en mathématiques. Le temps est venu de renverser les termes habituels de la critique, qui signale que ce peintre était aussi géomètre à ses heures, en relevant que la grande originalité de ce mathématicien est qu'il était peintre.

Les recueils modernes réunissant l'œuvre graphique de Piero négligent les figures de ses traités de mathématiques, ouvrages qu'il a pourtant soigneusement illustrés. L'intérêt de Piero pour les mathématiques est indissociable de son indéniable génie pictural. Les planches de ses traités ne comportent pas que des tracés de géométrie pratique : ils recèlent un catalogue des modèles idéaux et architecturaux que les peintres et autres praticiens des arts du trait et du dessin ne manquèrent pas d'exploiter. Les manuscrits de Piero ont été lus : l'usure des nombreuses copies de son traité de perspective l'atteste. En outre, en 1568, Daniele Barbaro en a repris de nombreux extraits dans son propre traité de perspective. Une partie du *Libellus de quinque corporibus regularibus* de Piero a été reprise par Luca Pacioli, élève de Piero, dans le traité *De divina proportionem*, illustré en partie par Léonard de Vinci et imprimé à Venise en 1509. Pacioli a aussi repris, dans un autre traité, de nombreux résultats du traité d'abaque de Piero. L'influence de ce dernier s'est même étendue à son illustre homologue allemand Albrecht Dürer, auteur, lui aussi, d'une géométrie pratique, imprimée à Nuremberg en 1525.

De prospectiva Pingendi, le traité de perspective de Piero della Francesca, a été rédigé dans les années 1470 à 1480. Il fut retrouvé seulement au XIX^e siècle et imprimé pour la première fois en 1899. La première mention officielle de l'existence de ce traité est due aux mathématiciens Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles qui, dans un rapport présenté le 12 décembre 1853 à l'Académie des sciences, s'exprimaient en ces termes : « Pietro della Francesca, appelé aussi Pietro dal Borgo San Sepolcro, du nom de sa ville natale, excellent peintre du XV^e siècle, qui passait aussi pour le plus savant géomètre de l'époque est regardé comme le principal promoteur de la perspective linéaire. »

Ce traité manuscrit est le premier à expliciter la construction dite « légitime » de Filippo Brunelleschi, fondée sur une double projection orthogonale (plan et profil), et à valider géométriquement la méthode de Leo Battista Alberti, premier énoncé connu d'une règle pour la perspective centrale, abrégée de celle de Brunelleschi. On peut de surcroît attribuer à Piero della Francesca plusieurs résultats novateurs. Il établit la loi numérique générale du raccourcissement des distances dans la perspective centrale. Le géomètre Girard Desargues (1591-1661) en donnera la formulation générale en imaginant le concept d'involution, connu aujourd'hui sous la forme du birapport ou rapport anharmonique : il montre la conservation du rapport des rapports de distances par projection centrale. Piero réalise la première description de l'utilisation du point de distance comme point de construction (le point de distance est un point de fuite secondaire vers lequel convergent des diagonales) et les premières constructions, en peinture, de projections centrales sur des plans horizontaux, théorisant ainsi le trompe-l'œil d'ornement, gisant (au sol ou sur un table) ou plafonnant. Cette dernière innovation contient en germe les principes du trompe-l'œil architectural, du décor plafonnant monumental en trompe-l'œil, de l'ombre portée, du décor de théâtre illusionniste et de l'anamorphose plane. Ces innovations conduiront à l'émergence de la géométrie projective au XIX^e siècle.

Piero della Francesca est le premier, dans l'histoire de la géométrie et *a fortiori* du dessin scientifique et technique, à proposer des représentations réglées et reproductibles des solides de l'espace, tant en perspective cavalière qu'en perspective centrale. De ce point de vue, il y a un « avant Piero », où la reproduction est improbable, et un « après Piero » qui s'est traduit, dans l'histoire des sciences et des techniques, par la reproductibilité des entreprises humaines, avec pour horizon la possibilité de la production en série. L'avènement de la science rationnelle et l'émergence du monde industriel en Occident sont passés par l'invention de la perspective centrale et de ses avatars, la perspective cavalière et le dessin technique.

Jean-Pierre LE GOFF, IUFM et IREM de Caen.

6. VUE CAVALIÈRE DE L'ICOSAÈDRE inclus dans le cube, tirée du *Libellus de quinque corporibus regularibus* (Petit livre à propos des cinq corps réguliers) de Piero della Francesca. Le dessin est autographe, le texte d'un copiste inconnu. Piero explique minutieusement comment chacune des six faces du cube contient une arête de l'icosaèdre placée en situation médiane. Cette construction n'est pas dans le livre xv des *Éléments* d'Euclide (écrit en réalité bien après Euclide), et il est probable que Piero souhaite en souligner l'originalité : elle montre en particulier que six des arêtes de l'icosaèdre, bien choisies, sont orthogonales deux à deux. Piero della Francesca est le premier à fournir une visualisation de polyèdres en trois dimensions.

$$x = (\sqrt[4]{160\,000\,M/C} - 20) \text{ deniers.}$$

Cette généralisation n'est toutefois pas donnée par Piero. Au contraire, la formule est faussement présentée comme la résolution de l'équation générale $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$ (avec des coefficients quelconques), et le problème financier apparaît comme un simple exemple de sa validité. Il n'en reste pas moins qu'il a réussi à résoudre une équation particulière du quatrième degré, ainsi que d'autres du troisième et du cinquième degré qui peuvent être obtenues à partir du même problème si l'on applique la durée de trois et de cinq années. Certaines de ces formules ne se trouvent que dans les ouvrages de Piero et peuvent donc lui être attribuées. La découverte peu après, par d'autres mathématiciens, de la formule de résolution des équations du troisième degré vient sans doute de cette habileté dans la manipulation des coefficients, dont Piero a accéléré la mise en place, et de l'encouragement fourni par de tels succès partiels.



La notation algébrique utilisée par Piero est aussi originale ; on la retrouve, avec quelques variantes, chez plusieurs autres mathématiciens de l'époque, mais elle a rapidement disparu, ne laissant derrière elle qu'une trace de l'intérêt intense pour l'algèbre. Tout cela confirme la participation active de Piero au débat algébrique de la seconde moitié du XV^e siècle.

Piero della Francesca, peintre mathématicien, a été l'un des premiers techniciens qui surent devenir des scientifiques. Ce phénomène, conjointement avec l'intérêt des scientifiques pour les techniques, a été décisif dans la «révolution scientifique» de la Renaissance.

Enrico GAMBA est professeur d'histoire des mathématiques à l'Université catholique de Brescia. Vico MONTEBELLI est professeur de mathématiques appliquées.

Davis M. DALY, *Piero della Francesca's Mathematical Treatises*, Longo, Ravenna, 1977.

G.C. ARGAN et R. WITTKOWER, *Perspective et histoire au Quattrocento*, Éditions de la Passion, Paris 1990.

J.-P. LE GOFF, *Aux confins de l'art et de la science : le De prospectiva pingendi de Piero della Francesca*, in : D. Bessot, Y. Hellegouarch et J.-P. Le Goff (éditeurs), *Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du colloque ADERHEM de Caen (octobre 1986) diffusion IREM de Basse-Normandie, Caen 1991.

P. COLMAR, *La perspective en jeu*, Éditions Gallimard, Paris, 1992.

D. BESSOT et J.-P. LE GOFF, *Mais où est donc passée la troisième dimension ?*, in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, Paris, 1993.

Piero della FRANCESCA, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Edizione nazionale, Giunti, Florence, 1995.

Les mathématiciens, Bibliothèque Pour la Science, 1996.

Thomas BANCHOFF, *La quatrième dimension*, collection Univers des sciences, Pour la Science, 1996.

L'ADN, ressort moléculaire

J.-F. ALLEMAND • A. BENSIMON • D. BENSIMON • F. CARON • D. CHATENAY
PH. CLUZEL • V. CROUETTE • CH. HELLER • R. LAVERY • A. LEBRUN
T. STRICK • J.-L. VIOVY

Les physiciens et les biologistes explorent les propriétés élastiques de l'ADN. Ils parviennent à manipuler des molécules d'ADN isolées et découvrent ainsi de nouvelles formes de la molécule.

Les biologistes savent depuis longtemps que l'hérédité est contenue dans la cellule, essentiellement sous la forme d'une longue molécule : l'ADN. L'information génétique est enregistrée dans cette molécule par un codage chimique, fondé sur quatre sous-unités, ou nucléotides ; chaque nucléotide est composé d'un groupe sucre, d'un groupe phosphate et d'une des quatre bases : l'adénine (A), la thymine (T), la guanine (G) et la cytosine (C). L'ADN existe normalement sous la forme d'une double hélice qui permet aux bases des deux brins de s'apparier en paires A-T et G-C. Ainsi les deux brins de la molécule portent des copies complémentaires du même message génétique.

Il était alors tentant de comparer cette longue molécule (ou polymère) à une bande magnétique sur laquelle était inscrit le programme de la vie. Dans cette analogie, les chromosomes sont, en quelque sorte, des bobines permettant d'enrouler proprement une molécule d'ADN de dix centimètres de long (pour l'espèce humaine) dans un volume de l'ordre d'un micromètre (ou millionième de mètre) au cube. Cependant, depuis quelques années, cette description semble simpliste : si l'information génétique reste fondamentale, les propriétés mécaniques (dynamiques et statiques) du support de cette information (la molécule d'ADN) se révèlent d'une importance cruciale pour le fonctionnement des cellules.

C'est une surprise, car la monotonie de la structure chimique, avec la répétition de quatre types de sous-unités seulement, n'encourageait pas des explorations chimiques approfondies.

Contrairement aux protéines, dont les chaînes latérales des 20 sortes d'acides aminés permettent de savants repliements et des propriétés catalytiques remarquables, l'ADN semble «cacher» ses bases au centre d'une structure hélicoïdale monotone.

Torsions et entortillements

Tout d'abord, on a observé que la séquence des bases engendrait des modulations de la structure hélicoïdale de l'ADN et de ses propriétés mécaniques : la séquence des bases induit des changements du pas de la double hélice, des courbures locales de la molécule et des variations des distances et des angles de liaisons entre les paires de bases. Un exemple est donné par l'étude du mode d'action de l'enzyme nommée désoxyribonucléase I. Cette protéine coupe les brins d'ADN ; on a longtemps cru qu'elle agissait en des points aléatoires de la séquence, mais une étude fine a révélé que l'enzyme agit en coupant l'ADN en des sites préférentiels où la molécule d'ADN est plus flexible.

Plus récemment, l'étude des phénomènes de recombinaison dans le micro-organisme *Escherichia coli* a montré qu'une autre enzyme, nommée Rec A, assure la formation de triples brins d'ADN stables : dans ces structures, un troisième brin identique à l'un des deux brins de la double hélice, vient se loger parallèlement au brin de même séquence, dans le grand sillon de la double hélice initiale. Sontanément, une triple hélice ne se forme pas quand on mélange une double hélice d'ADN avec l'un des deux brins, et le nouveau mode d'appariement

résulte d'un étirement de la double hélice, à la suite de son interaction avec l'enzyme Rec A. Autrement dit, l'extensibilité de l'ADN pourrait jouer un rôle dans les mécanismes cellulaires de reconnaissance par la séquence.

Depuis une dizaine d'années, on comprend que l'ADN peut également être surenroulé ou sous-enroulé : la double hélice peut être comme un cordon de téléphone qui a été tourné sur lui-même, soit dans le sens de l'enroulement de base, soit dans le sens contraire. On a compris que les propriétés de torsion et de superhélicité sont de deux types : locales ou à longue distance. Dans les effets locaux, la superhélicité négative (sous-enroulement) peut induire ou faciliter la séparation des deux brins d'une double hélice (cette séparation joue un rôle dans le démarrage de la transcription et de la réplication). La superhélicité peut aussi déclencher des changements de structure, la double hélice adoptant une forme de croix ou s'enroulant dans le sens inverse du sens habituel.

D'une manière plus subtile, un changement de torsion de la molécule provoque des entortillements de l'axe de la double hélice en des structures dites «plectonémiques» ou «solénoïdales», à la façon d'un cordon de téléphone (voir la figure 3). Ces repliements qui rapprochent des séquences éloignées permettent ainsi l'interaction de gènes distants sur l'ADN. Ils créent aussi des courbures locales qui favorisent l'action de certaines enzymes.

Les effets à longue distance sont faciles à imaginer : une contrainte de torsion locale peut se propager ou se diluer par relaxation le long d'une