

raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

## L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective,

la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres

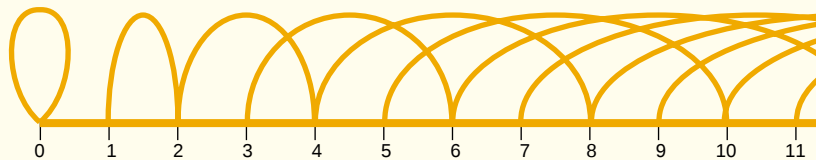
axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de  $R$  sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrions formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

### 5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application  $n \rightarrow 2n$  est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.

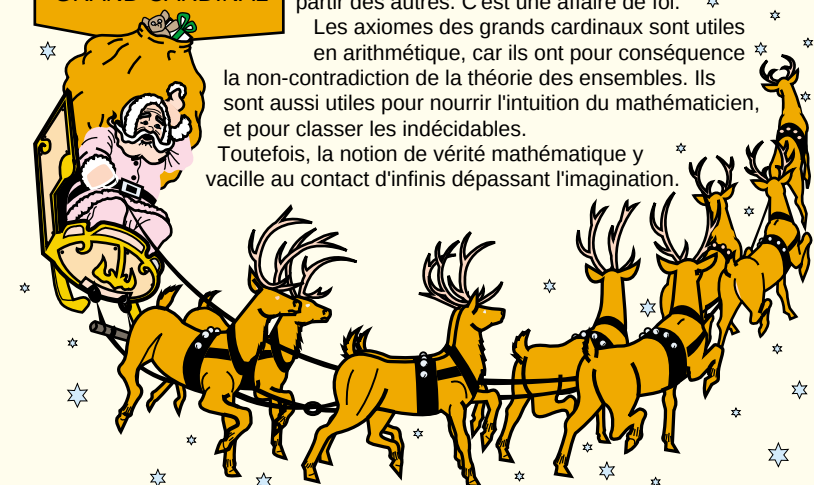


Un ensemble  $E$ , tel qu'il existe une injection de  $E$  dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi.

#### GRAND CARDINAL



Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables.

Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.

# Piero della Francesca, peintre mathématicien

ENRICO GAMBA • VICO MONTEBELLI

*Ce grand peintre était aussi l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a adapté les mathématiques savantes aux besoins des techniciens.*

Les tableaux de Piero della Francesca (1415-1492) sont aujourd'hui connus dans le monde entier ; ses travaux sur la perspective sont plus confidentiels et son œuvre mathématique est complètement ignorée. Piero della Francesca était pourtant un mathématicien réputé en son temps : selon Giorgio Vasari, qui publia en 1550 *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes*, Piero «ne s'éloigna jamais des mathématiques», discipline où il était «tenu pour un grand maître», à tel point qu'il «comprit [Euclide] mieux que quiconque».

Cette double qualité, de peintre et d'homme de science, évoque immédiatement Léonard de Vinci, plus jeune que Piero della Francesca d'une quarantaine d'années. Toutefois, selon Vasari, tandis que Léonard passait sans cesse des fresques aux miroirs et des machines à l'anatomie, Piero était rationnel et systématique. C'était le «meilleur géomètre de son époque».

Les dessins techniques et les écrits de Léonard, abondants et variés, sont désordonnés, comme des notes d'atelier ou de chantier ; ils n'étaient pas publiables tels quels. En revanche, Piero a écrit trois traités, de quelques centaines de pages au total : *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Petit livre à propos des cinq corps réguliers*), *De prospectiva pingendi* (*La perspective pour la peinture*) et *Trattato d'abaco* (*Traité de l'abaque*). Ces traités, qui contiennent des parties appliquées et des parties théoriques, sont compacts et ordonnés, surtout en comparaison avec les livres des techniciens de l'époque, dont Piero était.

Au Moyen Âge et à la Renaissance, les marchands, les artisans, les artistes et, de manière générale, les techniciens

étaient formés dans les écoles d'abaque et dans les ateliers. Le terme abaque ne désigne pas l'ancien instrument de calcul, mais la discipline, voire le texte écrit et l'école elle-même. Les écoles d'abaque sont comparables aux instituts professionnels actuels : on apprendait en regardant faire et en faisant. Les apprentis exerçaient leur sens de l'observation et leur raisonnement sur des cas concrets, spécifiques de la profession qu'ils apprenaient. Tout savoir théorique indépendant d'une réalisation concrète était exclu ; les rares manuels ne contenaient aucune trace de théorie. Nous les considérerions aujourd'hui comme des carnets de notes : aide-mémoire pour ceux qui savaient déjà, ils étaient quasi incompréhensibles pour tous les autres. Ils étaient écrits en langue vulgaire, langue des techniciens, tandis que les savants utilisaient le latin ; les théories théologiques, philosophiques, juridiques, médicales, mathématiques, mécaniques ou astrologico-astronomiques étaient toujours formulées en latin, langue plus précise, adaptée au cadre doctrinal.

## L'étude des polyèdres réguliers

Les ouvrages mathématiques de Piero sont plus proches des canons théoriques euclidiens que des normes des techniciens. Le traité qui concerne le plus la géométrie formelle est le *Libellus de quinque corporibus regularibus*, dont la portée dépasse largement ce qu'annonce son titre. Après un chapitre de géométrie plane, les deux chapitres centraux s'intéressent aux cinq polyèdres réguliers, c'est-à-dire dont les faces sont des polygones réguliers

tous identiques : le tétraèdre (dont les faces sont des triangles équilatéraux), le cube (composé de six carrés), l'octaèdre (composé de huit triangles équilatéraux), le dodécaèdre (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers) et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Ils sont prolongés par un chapitre consacré à cinq polyèdres semi-réguliers, ainsi qu'à d'autres corps solides.

Le *Libellus* est une œuvre singulière : comparé aux livres d'abaque, désordonnés et traitant peu de géométrie, son contenu fondamentalement géométrique est remarquable. C'est le premier ouvrage européen entièrement consacré à l'étude des polyèdres, qui avait pourtant commencé avec Platon et Pythagore. Piero della Francesca lui donne un nouveau souffle : grâce au *Libellus*, les polyèdres, longtemps considérés comme des objets purement théoriques, redeviennent des sujets d'étude mathématique, des éléments ornementaux, des objets de dessin exemplaires.

L'originalité du *Libellus* provient aussi du lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer : dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeltre, le seigneur d'Urdino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des «choses d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens».

Le *Libellus* suit la tradition de l'abaque : ses 140 propositions traitent toujours de figures géométriques aux dimensions déterminées. On donne des mesures de grandeurs et l'on

demande de trouver la valeur numérique d'autres grandeurs inconnues. En outre, le *Libellus* ne contient pas de démonstrations, du moins selon les modalités classiques. Enfin, il s'inscrit aussi dans la tradition de l'abaque, parce que, dans le calcul des grandeurs géométriques, il utilise autant des procédures géométriques que des règles arithmétiques et algébriques.

D'un autre côté, le *Libellus* s'inscrit dans la tradition euclidienne par l'ordre logique des propositions et par des références aux *Éléments* d'Euclide et aux œuvres d'Archimède *De la sphère et du cylindre* et *Des conoïdes et des sphéroïdes*. Les théorèmes n'y sont pas dégradés en petites règles empiriques appliquées, usage courant chez les techniciens, qui préféraient une règle simple et approximative à une règle exacte, mais complexe : ils sont utilisés de façon coordonnée.

## Mélanger théorie et application

Ce mélange de mathématique «haute» et «basse» devait apparaître à Piero comme un tout homogène ou, du moins, lié. Il fait siens avec maestria les théorèmes du livre XIII des *Éléments*, qui établissent les relations entre les longueurs des arêtes des polyèdres et le diamètre de la sphère circonscrite. Il écrit que l'arête du tétraèdre est la moyenne géométrique (la racine carrée du produit) de la hauteur du tétraèdre et du diamètre de la sphère circonscrite, ou que l'arête du dodécaèdre est la section d'or de l'arête du cube inscrit dans la même sphère (la section d'or d'un segment  $AB$  est réalisée en un point  $M$  du segment  $AB$  tel que le rapport des longueurs  $AB$  à  $AM$  soit égal au rapport des longueurs  $AM$  à  $MB$ ). En même temps, il dresse le tableau des valeurs numériques des arêtes des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) inscrits dans une sphère de diamètre 12. Ce qui nous semble un cas particulier satisfaisait pleinement le milieu de l'abaque, car 12 est multiple de 2, 3, 4 et 6 : si le diamètre de la sphère était triple ou de moitié, il suffisait respectivement de multiplier par trois ou de diviser par deux la valeur de l'arête.

Toutefois, même s'il utilise le style de l'abaque, Piero s'inspire d'Euclide. Celui-ci conclut les *Éléments* avec un théorème qui relie les arêtes des poly-

èdres inscrits dans une même sphère ; Piero conclut de la même manière le second chapitre du *Libellus*, mais avec des valeurs numériques, avec les mesures des arêtes des polyèdres inscrits dans la sphère de diamètre 12.

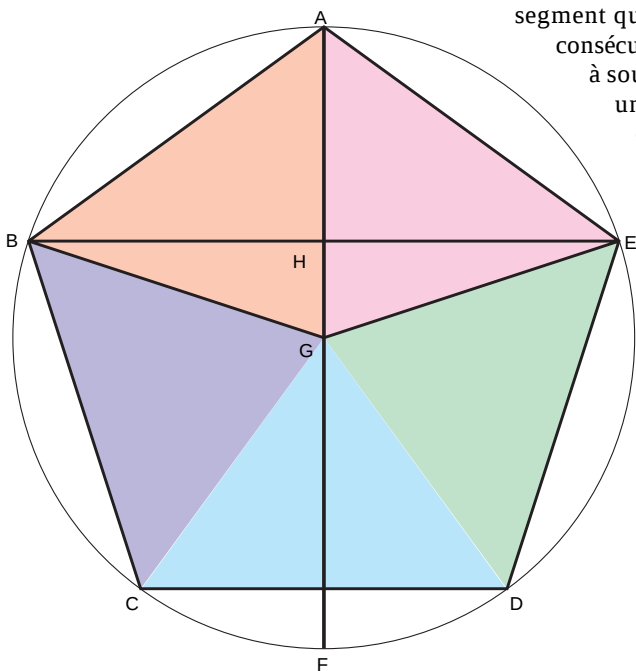
La donnée de valeurs numériques simples était nécessaire pour les techniciens, qui, peu familiers avec l'écriture et soucieux de préserver les secrets de leur profession, faisaient confiance à leur mémoire. Pour les commerçants, le calcul mental rapide était vital : dans une négociation, il faut évaluer rapidement les bénéfices des deux parties. La mémorisation de règles synthétiques, comme des proverbes, et de paramètres numériques était la méthode la plus sûre, la plus écono-

mique et la plus rapide. En conséquence, la règle de trois était fréquemment utilisée en géométrie (ce qui n'est pas le cas aujourd'hui).

La règle de trois a peut-être aussi donné à Piero l'idée de son calcul de l'aire du pentagone régulier. Dans le livre XIV des *Éléments* (qui n'est pas d'Euclide, mais d'Hypsicle, et qui était connu du temps de Piero comme le livre XV), on trouve la formule suivante : l'aire est égale au produit des  $3/4$  du diamètre du cercle circonscrit par les  $5/6$  de la corde du pentagone. Piero propose une formule plus simple (voir la figure 2) : l'aire d'un pentagone régulier est déterminée par les  $5/8$  du produit du diamètre du cercle circonscrit par la longueur de la corde du pentagone (le



1. PORTRAIT DE PIERO DELLA FRANCESCA attribué à Santi di Tito, probablement réalisé à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle. L'auteur du portrait a davantage rendu hommage au mathématicien qu'à l'artiste : les œuvres d'Euclide et d'Archimède posées sur la table sont éloquentes.



segment qui joint deux sommets consécutifs). L'invention prête à sourire : pour nous, c'est une banale simplification de fractions. Toutefois Piero envisageait probablement la chose différemment : il devait démontrer la nouvelle formule, et la simplification ne prouvait pas son résultat, elle le confirmait tout au plus.

Les démonstrations utilisées dans toutes les branches des mathématiques étaient du type de celles qu'utilisent les géomètres. Dès 1202, Léonard de Pise établit les formules de résolution des équations du second degré avec des démonstrations géométriques, en se fondant sur des propositions énoncées géométriquement dans les *Éléments*. Piero, lui, élabore une démonstration de la formule qui donne l'aire du pentagone, en utilisant la règle de trois d'une manière nouvelle par rapport à la traduction euclidienne (voir la figure 2).

Nous avons signalé la supériorité évidente du *Libellus* par rapport aux manuels de l'époque : on peut en dire autant du traité de perspective *De prospectiva pingendi*. Piero y adopte un discours résolument déductif et s'élève contre les énumé-

rations et les comptes rendus plus ou moins ordonnés auxquels parvenaient les meilleurs techniciens contemporains.

En ce qui concerne la géométrie savante, Piero montre une parfaite compréhension de l'œuvre euclidienne, envisagée toutefois du point de vue de l'abaque. La liberté qui en découle ouvre des voies nouvelles ou rarement empruntées : dans le *Libellus*, il reprend le thème des inclusions réciproques de polyèdres réguliers, développé dans le livre XV des *Éléments*, en y ajoutant une nouvelle inclusion, celle de l'icosaèdre dans le cube (voir la figure 6).

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement géométrique est ainsi plus clair : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables.

## Un polyèdre à 72 faces

Piero della Francesca prolonge aussi les recherches d'autres mathématiciens savants. Il souligne, dans l'une des rares notes qu'il ajoute à ses traités, qu'il va plus loin que Giovanni Camparo da Novara, mathématicien du XIII<sup>e</sup> siècle dont la traduction, de l'arabe en latin des *Éléments* d'Euclide, était très lue à l'époque. Le problème concerne un solide à 72 faces, qui est un bon modèle à facettes de la sphère, dont Piero calcule la surface et le volume. La surface est la somme des surfaces de 24 triangles isocèles et de 48 trapèzes isocèles ; le volume est la somme des volumes des 24 pyramides à base triangulaire et des 48 pyramides à base trapézoïdale dont le sommet est le centre de la sphère circonscrite.

**2. DÉMONSTRATION**, dans le style de l'abaque, de la formule servant à calculer l'aire du pentagone. Le produit  $AG \times BE$  est la surface de quatre des cinq triangles isocèles de sommet G qui constituent le pentagone (l'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur). Par quelle fraction  $x$  du rayon faut-il multiplier la corde  $BE$  du pentagone pour obtenir la surface de cinq triangles ?  $x$  est la solution de l'équation :  $(AG \times BE)/4 = (x \times BE)/5$ . On obtient donc  $x = (5/4) AG = (5/8) AF$ . La surface du pentagone s'obtient en multipliant  $5/8$  du diamètre par le segment  $BE$ , formule dont Piero s'attribue l'invention. L'utilisation géométrique de la règle de trois est assez insolite.



**3. LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS**, dits aussi «solides» ou «corps platoniciens», sont des figures de l'espace à trois dimensions que l'on construit avec des faces polygonales identiques entre elles et elles-mêmes régulières. Ils sont représentés ici par Kepler dans son traité *Harmonice Mundi* (1619). Platon les associait aux cinq éléments de sa «physique». Le tétraèdre (associé au feu par Platon) a 4 faces en forme de triangles équilatéraux identiques (au centre) ; le cube, ou hexaèdre (associé à la terre) a 6 faces en forme de carrés (en bas, à gauche) ; l'octaèdre formé de deux «pyramides d'Égypte» accolées par leurs bases carrées (associé à l'air) a 8 faces triangulaires équilatérales (en haut, à gauche) ; le dodécaèdre (associé à l'éther du monde supralunaire) a 12 faces pentagonales (en haut, à droite) ; enfin l'icosaèdre (associé à l'eau) comporte 20 faces triangulaires équilatérales (en bas, à droite).

## Voûte en arc de cloître et voûte d'arête

**P**our Piero della Francesca, la voûte en arc de cloître et la voûte d'arête sont des surfaces délimitées par l'intersection à angle droit de deux demi-cylindres de même rayon (*a*). La voûte en arc de cloître est la surface intérieure (*b*) et la voûte d'arête est la surface extérieure (*c*).

Piero calcule le volume contenu sous la voûte en arc de cloître. Notons  $V_p$  le volume de la pyramide (*d*) de base  $ABCD$  et de sommet  $F$ ,  $V$  le volume du solide «sphéroïde» compris à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres (ce volume est le double du volume recherché puisqu'en pratique la voûte est construite à partir de demi-cylindres),  $V_c$  le volume du cône de sommet  $F$  et dont la base est le cercle inscrit dans le carré  $ABCD$  (*e*) et  $V_s$  le volume de la sphère de rayon  $OF$ . La proportion établie par Piero s'écrit :  $V_p/V = V_c/V_s$ . Cela revient à considérer que le cône est à la sphère ce que la pyramide est au sphéroïde engendré par la rotation autour de l'axe  $OF$

d'un «cercle déformable» qui s'appuie sur un «équateur» carré  $ABCD$  : Piero pense qu'il existe une analogie entre les solides qui s'appuient sur un même cercle (la sphère et le cône) et les solides de même hauteur qui s'appuient sur le carré  $ABCD$ . Cette idée lui est venue d'une relation qu'il a démontrée dans le plan. Si  $A_1$  est l'aire d'un triangle  $FMN$  (*g*),  $A_2$  l'aire du cercle de diamètre

$MN$ ,  $A_3$  l'aire d'un triangle  $FTU$  (*f*) et  $A_4$  celle de l'ellipse, alors  $A_1/A_2 = A_3/A_4$ . Cette égalité signifie que le rapport de l'aire de l'ellipse à celle du rectangle  $WXYZ$  est égal au rapport de l'aire du cercle à celle du carré  $PQRS$ . Le passage du plan au volume est fondé sur le fait que l'intersection d'un cylindre et d'un plan non orthogonal à son axe est une ellipse.

Piero calcule le volume  $V$  du sphéroïde en remarquant que le rapport de l'aire du carré  $ABCD$  à celle du cercle inscrit est  $4/\pi$ , ce qui lui donne le rapport du volume de la pyramide à celui du cône :  $V_p/V_c = 4/\pi$ . Il ne lui reste qu'à multiplier le volume de la sphère par ce rapport  $V = (4/\pi) \times (4\pi r^3/3) = 16r^3/3$  (où  $r$  est le rayon des cylindres). Le volume situé sous la voûte en arc de cloître est donc  $8r^3/3$ .

**L**a voûte d'arête est formée par la surface des deux demi-cylindres extérieure à l'intersection. La surface de cette voûte est obtenue en ôtant la surface de la voûte en arc de cloître de la surface des deux demi-cylindres réunis. Piero soustrait de la surface des deux demi-cylindres, qui vont du demi-cercle  $AHD$  au demi-cercle  $BKC$  et du demi-cercle  $AIB$  au demi-cercle  $CJD$ , la surface des «fuseaux»  $AFB$ ,  $BFC$ ,  $CFD$  et  $DFA$  qui forment la voûte en arc de cloître, pour trouver la surface des quatre «onglets»  $AIBFA$ ,  $BKCFB$ ,  $CJDFC$  et  $DHAFD$  qui constituent la voûte d'arête (*a*).

Notons  $V_{AC}$  le volume sous la voûte en arc de cloître et  $S_{AC}$  sa surface,  $V_s$  et  $S_s$  le volume et la surface de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $OF$ . La relation établie par Piero est  $V_{AC}/S_{AC} = V_s/S_s$ . Il en découle que  $V_{AC}/S_{AC} = (4\pi r^3/3)/4r^2 = r/3$ , et donc  $S_{AC} = 3V_{AC}/r$ . Puisque  $V_{AC} = 8r^3/3$ ,  $S_{AC} = 8r^2$ . La surface latérale d'un demi-cylindre comprise entre les demi-cercles  $AHD$  et  $BKC$  est  $2\pi r^2$ . En effectuant la différence  $4\pi r^2 - S_{AC}$ , on obtient la surface de la voûte d'arête qui est donc donnée par la formule :  $S = 4r^2(\pi - 2)$ .

Cette formule est exacte : on la vérifie par le calcul intégral. La méthode utilisée par Piero n'est pas la version mathématique de manipulations empiriques : elle est intuitive, mais elle est plus scientifique que technique.

