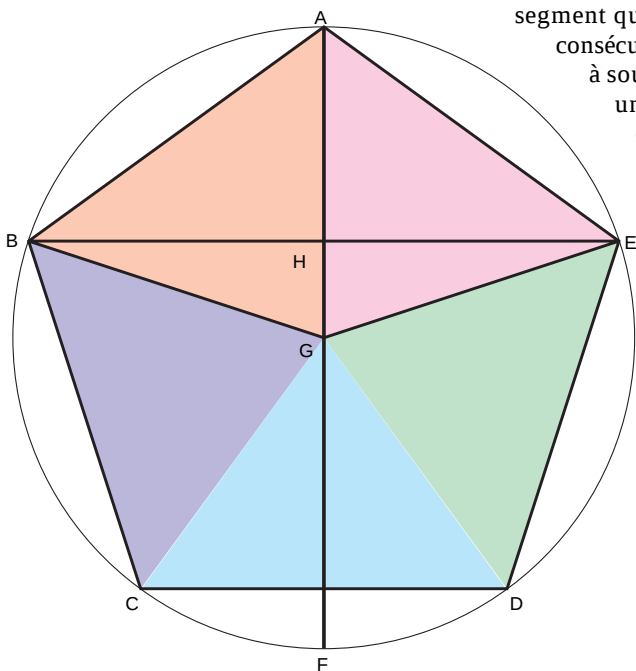




segment qui joint deux sommets consécutifs). L'invention prête à sourire : pour nous, c'est une banale simplification de fractions. Toutefois Piero envisageait probablement la chose différemment : il devait démontrer la nouvelle formule, et la simplification ne prouvait pas son résultat, elle le confirmait tout au plus.

Les démonstrations utilisées dans toutes les branches des mathématiques étaient du type de celles qu'utilisent les géomètres. Dès 1202, Léonard de Pise établit les formules de résolution des équations du second degré avec des démonstrations géométriques, en se fondant sur des propositions énoncées géométriquement dans les *Éléments*. Piero, lui, élabore une démonstration de la formule qui donne l'aire du pentagone, en utilisant la règle de trois d'une manière nouvelle par rapport à la traduction euclidienne (voir la figure 2).

Nous avons signalé la supériorité évidente du *Libellus* par rapport aux manuels de l'époque : on peut en dire autant du traité de perspective *De prospectiva pingendi*. Piero y adopte un discours résolument déductif et s'élève contre les énumé-

rations et les comptes rendus plus ou moins ordonnés auxquels parvenaient les meilleurs techniciens contemporains.

En ce qui concerne la géométrie savante, Piero montre une parfaite compréhension de l'œuvre euclidienne, envisagée toutefois du point de vue de l'abaque. La liberté qui en découle ouvre des voies nouvelles ou rarement empruntées : dans le *Libellus*, il reprend le thème des inclusions réciproques de polyèdres réguliers, développé dans le livre XV des *Éléments*, en y ajoutant une nouvelle inclusion, celle de l'icosaèdre dans le cube (voir la figure 6).

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement géométrique est ainsi plus clair : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables.

Un polyèdre à 72 faces

Piero della Francesca prolonge aussi les recherches d'autres mathématiciens savants. Il souligne, dans l'une des rares notes qu'il ajoute à ses traités, qu'il va plus loin que Giovanni Camparo da Novara, mathématicien du XIII^e siècle dont la traduction, de l'arabe en latin des *Éléments* d'Euclide, était très lue à l'époque. Le problème concerne un solide à 72 faces, qui est un bon modèle à facettes de la sphère, dont Piero calcule la surface et le volume. La surface est la somme des surfaces de 24 triangles isocèles et de 48 trapèzes isocèles ; le volume est la somme des volumes des 24 pyramides à base triangulaire et des 48 pyramides à base trapézoïdale dont le sommet est le centre de la sphère circonscrite.

2. DÉMONSTRATION, dans le style de l'abaque, de la formule servant à calculer l'aire du pentagone. Le produit $AG \times BE$ est la surface de quatre des cinq triangles isocèles de sommet G qui constituent le pentagone (l'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur). Par quelle fraction x du rayon faut-il multiplier la corde BE du pentagone pour obtenir la surface de cinq triangles ? x est la solution de l'équation : $(AG \times BE)/4 = (x \times BE)/5$. On obtient donc $x = (5/4) AG = (5/8) AF$. La surface du pentagone s'obtient en multipliant $5/8$ du diamètre par le segment BE , formule dont Piero s'attribue l'invention. L'utilisation géométrique de la règle de trois est assez insolite.



3. LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS, dits aussi «solides» ou «corps platoniciens», sont des figures de l'espace à trois dimensions que l'on construit avec des faces polygonales identiques entre elles et elles-mêmes régulières. Ils sont représentés ici par Kepler dans son traité *Harmonice Mundi* (1619). Platon les associait aux cinq éléments de sa «physique». Le tétraèdre (associé au feu par Platon) a 4 faces en forme de triangles équilatéraux identiques (au centre) ; le cube, ou hexaèdre (associé à la terre) a 6 faces en forme de carrés (en bas, à gauche) ; l'octaèdre formé de deux «pyramides d'Égypte» accolées par leurs bases carrées (associé à l'air) a 8 faces triangulaires équilatérales (en haut, à gauche) ; le dodécaèdre (associé à l'éther du monde supralunaire) a 12 faces pentagonales (en haut, à droite) ; enfin l'icosaèdre (associé à l'eau) comporte 20 faces triangulaires équilatérales (en bas, à droite).

Voûte en arc de cloître et voûte d'arête

Pour Piero della Francesca, la voûte en arc de cloître et la voûte d'arête sont des surfaces délimitées par l'intersection à angle droit de deux demi-cylindres de même rayon (*a*). La voûte en arc de cloître est la surface intérieure (*b*) et la voûte d'arête est la surface extérieure (*c*).

Piero calcule le volume contenu sous la voûte en arc de cloître. Notons V_p le volume de la pyramide (*d*) de base $ABCD$ et de sommet F , V le volume du solide «sphéroïde» compris à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres (ce volume est le double du volume recherché puisqu'en pratique la voûte est construite à partir de demi-cylindres), V_c le volume du cône de sommet F et dont la base est le cercle inscrit dans le carré $ABCD$ (*e*) et V_s le volume de la sphère de rayon OF . La proportion établie par Piero s'écrit : $V_p/V = V_c/V_s$. Cela revient à considérer que le cône est à la sphère ce que la pyramide est au sphéroïde engendré par la rotation autour de l'axe OF

d'un «cercle déformable» qui s'appuie sur un «équateur» carré $ABCD$: Piero pense qu'il existe une analogie entre les solides qui s'appuient sur un même cercle (la sphère et le cône) et les solides de même hauteur qui s'appuient sur le carré $ABCD$. Cette idée lui est venue d'une relation qu'il a démontrée dans le plan. Si A_1 est l'aire d'un triangle FMN (*g*), A_2 l'aire du cercle de diamètre

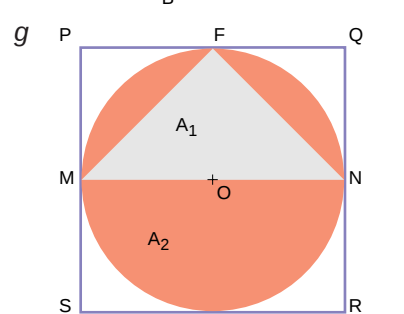
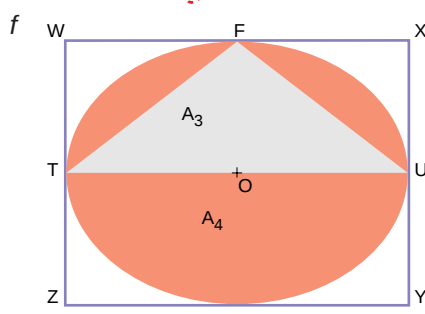
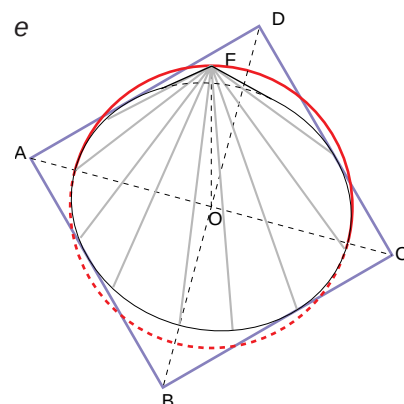
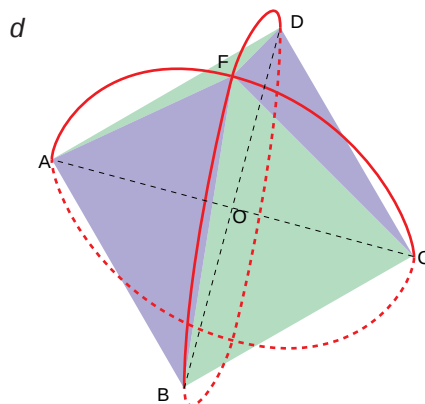
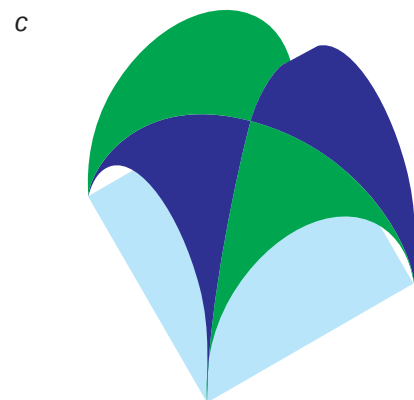
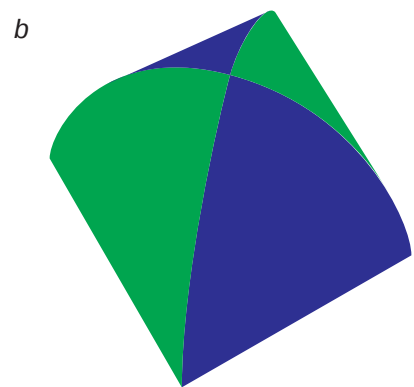
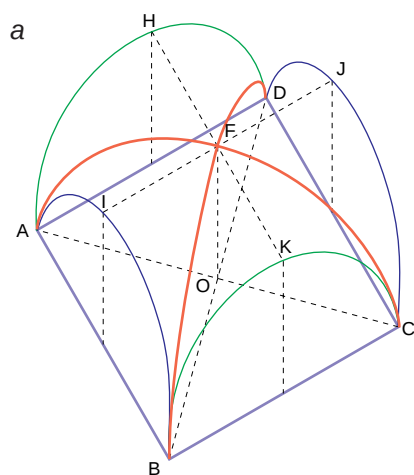
MN , A_3 l'aire d'un triangle FTU (*f*) et A_4 celle de l'ellipse, alors $A_1/A_2 = A_3/A_4$. Cette égalité signifie que le rapport de l'aire de l'ellipse à celle du rectangle $WXYZ$ est égal au rapport de l'aire du cercle à celle du carré $PQRS$. Le passage du plan au volume est fondé sur le fait que l'intersection d'un cylindre et d'un plan non orthogonal à son axe est une ellipse.

Piero calcule le volume V du sphéroïde en remarquant que le rapport de l'aire du carré $ABCD$ à celle du cercle inscrit est $4/\pi$, ce qui lui donne le rapport du volume de la pyramide à celui du cône : $V_p/V_c = 4/\pi$. Il ne lui reste qu'à multiplier le volume de la sphère par ce rapport $V = (4/\pi) \times (4\pi r^3/3) = 16r^3/3$ (où r est le rayon des cylindres). Le volume situé sous la voûte en arc de cloître est donc $8r^3/3$.

La voûte d'arête est formée par la surface des deux demi-cylindres extérieure à l'intersection. La surface de cette voûte est obtenue en ôtant la surface de la voûte en arc de cloître de la surface des deux demi-cylindres réunis. Piero soustrait de la surface des deux demi-cylindres, qui vont du demi-cercle AHD au demi-cercle BKC et du demi-cercle AIB au demi-cercle CJD , la surface des «fuseaux» AFB , BFC , CFD et DFA qui forment la voûte en arc de cloître, pour trouver la surface des quatre «onglets» $AIBFA$, $BKCFB$, $CJDFC$ et $DHAFD$ qui constituent la voûte d'arête (*a*).

Notons V_{AC} le volume sous la voûte en arc de cloître et S_{AC} sa surface, V_s et S_s le volume et la surface de la sphère de centre O et de rayon OF . La relation établie par Piero est $V_{AC}/S_{AC} = V_s/S_s$. Il en découle que $V_{AC}/S_{AC} = (4\pi r^3/3)/4r^2 = r/3$, et donc $S_{AC} = 3V_{AC}/r$. Puisque $V_{AC} = 8r^3/3$, $S_{AC} = 8r^2$. La surface latérale d'un demi-cylindre comprise entre les demi-cercles AHD et BKC est $2\pi r^2$. En effectuant la différence $4\pi r^2 - S_{AC}$, on obtient la surface de la voûte d'arête qui est donc donnée par la formule : $S = 4r^2(\pi - 2)$.

Cette formule est exacte : on la vérifie par le calcul intégral. La méthode utilisée par Piero n'est pas la version mathématique de manipulations empiriques : elle est intuitive, mais elle est plus scientifique que technique.



Piero trouve la hauteur de ces pyramides selon les strictes modalités euclidiennes.

Ce problème du polyèdre à 72 faces a un intérêt architectural : il se présente lors de la construction des coupoles, et des polyèdres analogues étaient utilisés pour la construction de globes géographiques et astronomiques. La solution de Piero est générale : elle serait valable

même si le solide, au lieu d'être construit à partir de dodécagones, était construit sur la base d'autres polygones réguliers.

À l'époque, une évolution décisive apparaît : les nouvelles découvertes techniques incitent les ingénieurs à dépasser l'empirisme et à utiliser des procédures mathématiques rigoureuses. Piero résout, dans cet esprit, deux autres problèmes originaux : le calcul du

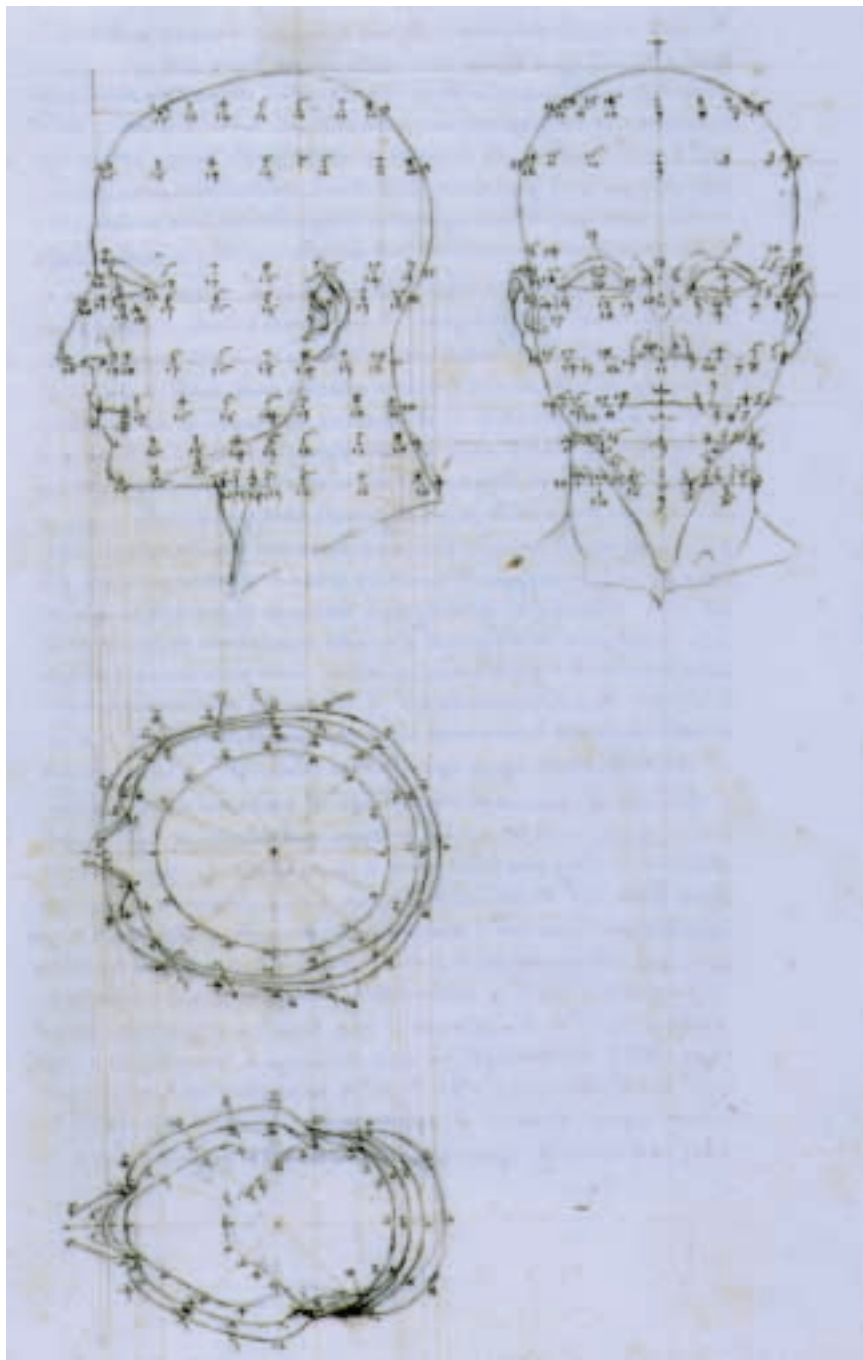
volume sous la voûte en arc de cloître (ou voûte d'angle) et celui de la surface de la voûte d'arête (voir l'encadré de la page 71). L'œil du mathématicien contemple les réalisations techniques et trouve de nouvelles voies de recherche.

Euclide n'étant pas d'une grande utilité pour résoudre ce problème, Piero utilise de téméraires analogies avec les procédures d'Archimède. Étonnamment, il obtient des résultats exacts, qui prouvent son intuition mathématique. De la manière laconique qu'il affectionne, il fait comprendre qu'il a obtenu un résultat important. Après avoir effectué ses calculs sans indiquer les procédures adoptées (les écrits de l'abaque exposent les résultats sans les expliquer), Piero transgresse les habitudes et se lance dans l'explication de la voie qu'il a empruntée. Cette explication n'est pas un modèle de clarté, mais on ne peut guère en attendre plus d'un auteur du XV^e siècle. Piero della Francesca est l'un des rares auteurs qui ait relié avec agilité le «grand système» des mathématiques d'Euclide et d'Archimède au «petit système» des mathématiques de l'abaque. Ce lien a pris de plus en plus d'importance au long du XVI^e siècle.

Enseignement pratique et algèbre

L'enseignement des écoles d'abaque se fondait sur le calcul appliqué. Les professeurs fournissaient à leurs élèves des séries de problèmes typiques de leur profession : achat et vente, change, associations, capitalisation, mesures. Cette façon de procéder, en accordant plus d'importance aux valeurs numériques, est la caractéristique la plus originale par rapport à la tradition euclidienne : elle favorise l'intérêt pour l'algèbre, efficace pour résoudre des problèmes, même géométriques. Outre l'introduction des chiffres arabes, le grand mérite historique des professeurs d'abaque est d'avoir, pendant le Moyen Âge, diffusé et développé la connaissance de l'algèbre en Europe.

Dans l'histoire de l'algèbre, Piero della Francesca arrive juste avant le progrès fondamental qu'est la résolution des équations du troisième degré, et dans la phase de transition d'une algèbre rhétorique, exposée de manière discursive, à une algèbre qui utilise des abréviations et des symboles. Le texte où Piero a rassemblé ses recherches algébriques n'avait pas



4. CETTE TÊTE, représentée de face, de profil, par-dessus et par-dessous suivant des projections orthogonales, est extraite de *De prospectiva pingendi*, de Piero della Francesca. La représentation est tracée par points, déterminés par l'intersection des lignes et repérée par des nombres. Piero veut ainsi montrer que la peinture n'est pas d'abord une œuvre manuelle : avant la réalité sensible, existent la perfection géométrique, les lois de l'harmonie et des proportions. Il n'y a donc pas de dissension entre la science et l'art.