

Voûte en arc de cloître et voûte d'arête

Pour Piero della Francesca, la voûte en arc de cloître et la voûte d'arête sont des surfaces délimitées par l'intersection à angle droit de deux demi-cylindres de même rayon (*a*). La voûte en arc de cloître est la surface intérieure (*b*) et la voûte d'arête est la surface extérieure (*c*).

Piero calcule le volume contenu sous la voûte en arc de cloître. Notons V_p le volume de la pyramide (*d*) de base $ABCD$ et de sommet F , V le volume du solide «sphéroïde» compris à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres (ce volume est le double du volume recherché puisqu'en pratique la voûte est construite à partir de demi-cylindres), V_c le volume du cône de sommet F et dont la base est le cercle inscrit dans le carré $ABCD$ (*e*) et V_s le volume de la sphère de rayon OF . La proportion établie par Piero s'écrit : $V_p/V = V_c/V_s$. Cela revient à considérer que le cône est à la sphère ce que la pyramide est au sphéroïde engendré par la rotation autour de l'axe OF

d'un «cercle déformable» qui s'appuie sur un «équateur» carré $ABCD$: Piero pense qu'il existe une analogie entre les solides qui s'appuient sur un même cercle (la sphère et le cône) et les solides de même hauteur qui s'appuient sur le carré $ABCD$. Cette idée lui est venue d'une relation qu'il a démontrée dans le plan. Si A_1 est l'aire d'un triangle FMN (*g*), A_2 l'aire du cercle de diamètre

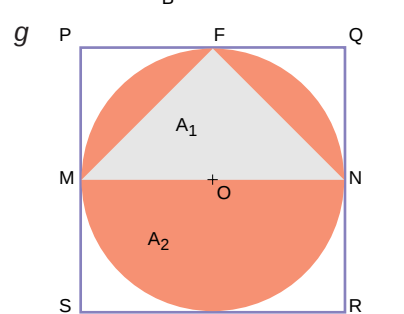
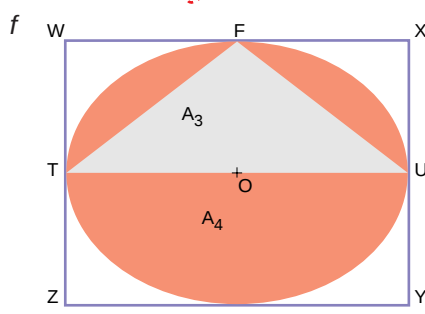
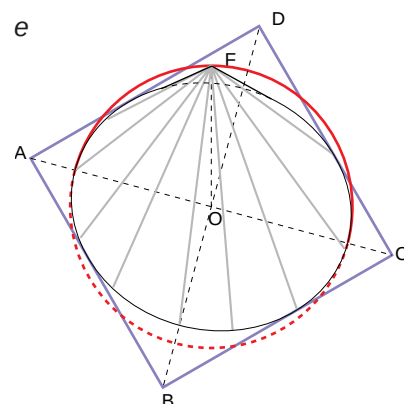
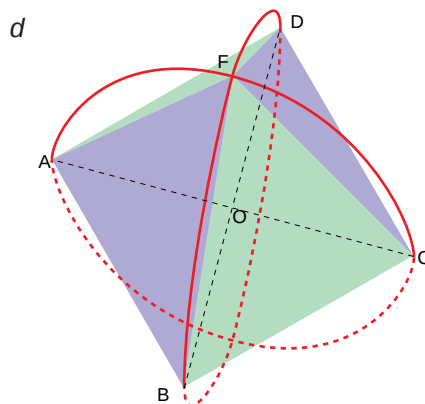
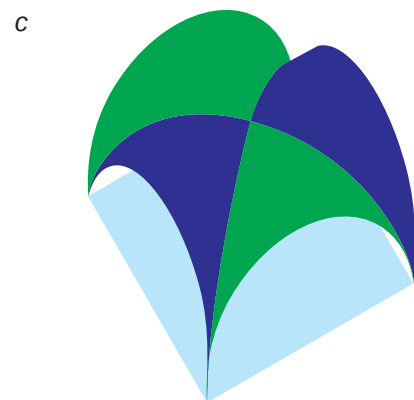
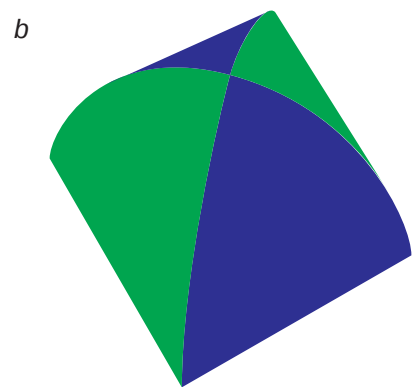
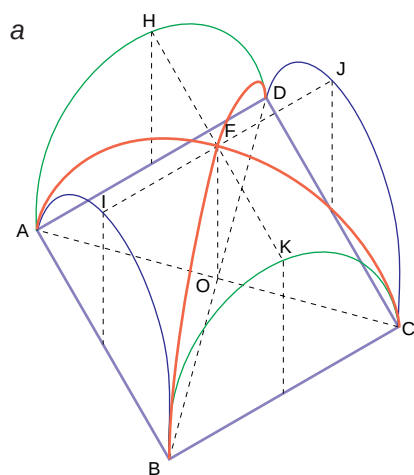
MN , A_3 l'aire d'un triangle FTU (*f*) et A_4 celle de l'ellipse, alors $A_1/A_2 = A_3/A_4$. Cette égalité signifie que le rapport de l'aire de l'ellipse à celle du rectangle $WXYZ$ est égal au rapport de l'aire du cercle à celle du carré $PQRS$. Le passage du plan au volume est fondé sur le fait que l'intersection d'un cylindre et d'un plan non orthogonal à son axe est une ellipse.

Piero calcule le volume V du sphéroïde en remarquant que le rapport de l'aire du carré $ABCD$ à celle du cercle inscrit est $4/\pi$, ce qui lui donne le rapport du volume de la pyramide à celui du cône : $V_p/V_c = 4/\pi$. Il ne lui reste qu'à multiplier le volume de la sphère par ce rapport $V = (4/\pi) \times (4\pi r^3/3) = 16r^3/3$ (où r est le rayon des cylindres). Le volume situé sous la voûte en arc de cloître est donc $8r^3/3$.

La voûte d'arête est formée par la surface des deux demi-cylindres extérieure à l'intersection. La surface de cette voûte est obtenue en ôtant la surface de la voûte en arc de cloître de la surface des deux demi-cylindres réunis. Piero soustrait de la surface des deux demi-cylindres, qui vont du demi-cercle AHD au demi-cercle BKC et du demi-cercle AIB au demi-cercle CJD , la surface des «fuseaux» AFB , BFC , CFD et DFA qui forment la voûte en arc de cloître, pour trouver la surface des quatre «onglets» $AIBFA$, $BKCFB$, $CJDFC$ et $DHAFD$ qui constituent la voûte d'arête (*a*).

Notons V_{AC} le volume sous la voûte en arc de cloître et S_{AC} sa surface, V_s et S_s le volume et la surface de la sphère de centre O et de rayon OF . La relation établie par Piero est $V_{AC}/S_{AC} = V_s/S_s$. Il en découle que $V_{AC}/S_{AC} = (4\pi r^3/3)/4r^2 = r/3$, et donc $S_{AC} = 3V_{AC}/r$. Puisque $V_{AC} = 8r^3/3$, $S_{AC} = 8r^2$. La surface latérale d'un demi-cylindre comprise entre les demi-cercles AHD et BKC est $2\pi r^2$. En effectuant la différence $4\pi r^2 - S_{AC}$, on obtient la surface de la voûte d'arête qui est donc donnée par la formule : $S = 4r^2(\pi - 2)$.

Cette formule est exacte : on la vérifie par le calcul intégral. La méthode utilisée par Piero n'est pas la version mathématique de manipulations empiriques : elle est intuitive, mais elle est plus scientifique que technique.



Piero trouve la hauteur de ces pyramides selon les strictes modalités euclidiennes.

Ce problème du polyèdre à 72 faces a un intérêt architectural : il se présente lors de la construction des coupoles, et des polyèdres analogues étaient utilisés pour la construction de globes géographiques et astronomiques. La solution de Piero est générale : elle serait valable

même si le solide, au lieu d'être construit à partir de dodécagones, était construit sur la base d'autres polygones réguliers.

À l'époque, une évolution décisive apparaît : les nouvelles découvertes techniques incitent les ingénieurs à dépasser l'empirisme et à utiliser des procédures mathématiques rigoureuses. Piero résout, dans cet esprit, deux autres problèmes originaux : le calcul du

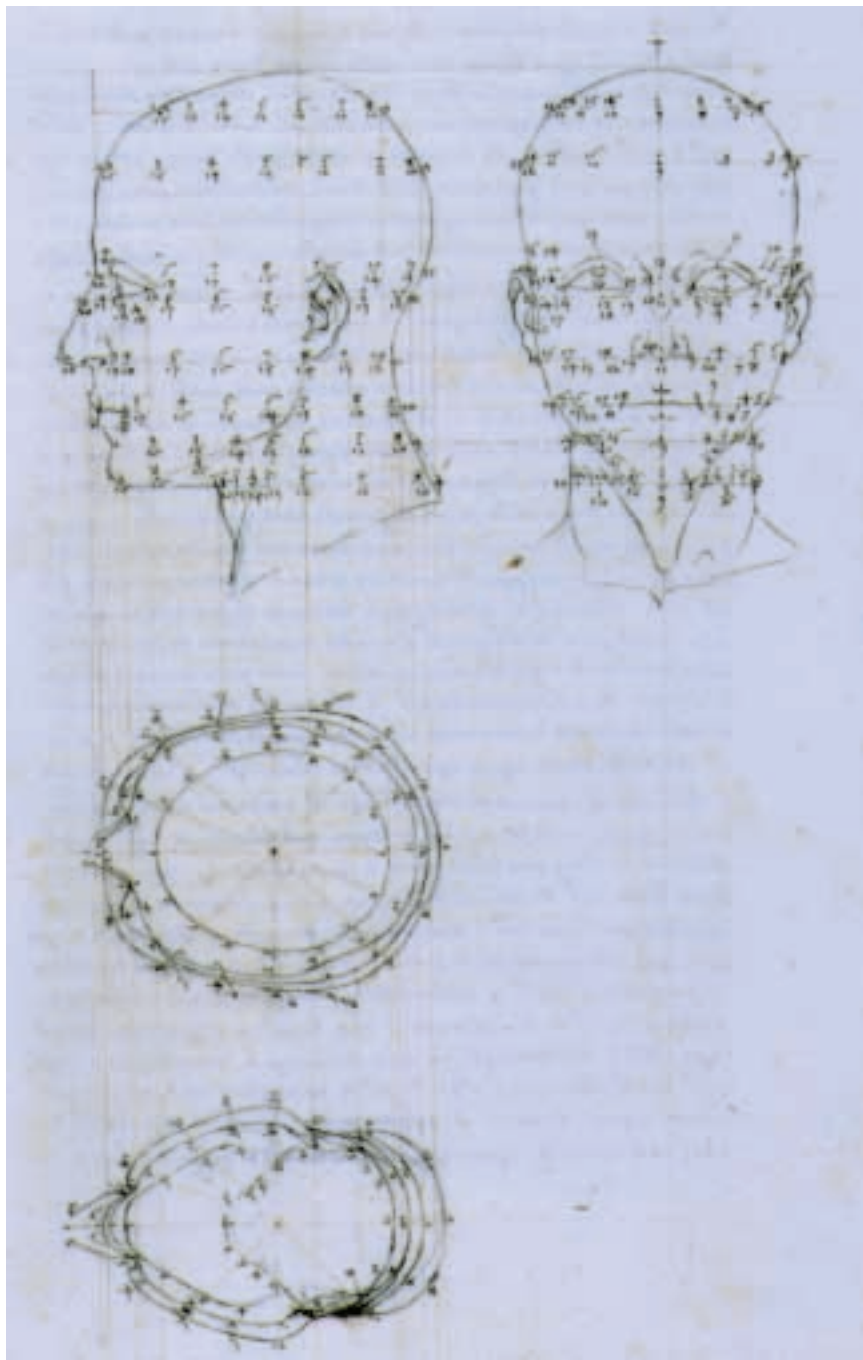
volume sous la voûte en arc de cloître (ou voûte d'angle) et celui de la surface de la voûte d'arête (voir l'encadré de la page 71). L'œil du mathématicien contemple les réalisations techniques et trouve de nouvelles voies de recherche.

Euclide n'étant pas d'une grande utilité pour résoudre ce problème, Piero utilise de téméraires analogies avec les procédures d'Archimède. Étonnamment, il obtient des résultats exacts, qui prouvent son intuition mathématique. De la manière laconique qu'il affectionne, il fait comprendre qu'il a obtenu un résultat important. Après avoir effectué ses calculs sans indiquer les procédures adoptées (les écrits de l'abaque exposent les résultats sans les expliquer), Piero transgresse les habitudes et se lance dans l'explication de la voie qu'il a empruntée. Cette explication n'est pas un modèle de clarté, mais on ne peut guère en attendre plus d'un auteur du XV^e siècle. Piero della Francesca est l'un des rares auteurs qui ait relié avec agilité le «grand système» des mathématiques d'Euclide et d'Archimède au «petit système» des mathématiques de l'abaque. Ce lien a pris de plus en plus d'importance au long du XVI^e siècle.

Enseignement pratique et algèbre

L'enseignement des écoles d'abaque se fondait sur le calcul appliqué. Les professeurs fournissaient à leurs élèves des séries de problèmes typiques de leur profession : achat et vente, change, associations, capitalisation, mesures. Cette façon de procéder, en accordant plus d'importance aux valeurs numériques, est la caractéristique la plus originale par rapport à la tradition euclidienne : elle favorise l'intérêt pour l'algèbre, efficace pour résoudre des problèmes, même géométriques. Outre l'introduction des chiffres arabes, le grand mérite historique des professeurs d'abaque est d'avoir, pendant le Moyen Âge, diffusé et développé la connaissance de l'algèbre en Europe.

Dans l'histoire de l'algèbre, Piero della Francesca arrive juste avant le progrès fondamental qu'est la résolution des équations du troisième degré, et dans la phase de transition d'une algèbre rhétorique, exposée de manière discursive, à une algèbre qui utilise des abréviations et des symboles. Le texte où Piero a rassemblé ses recherches algébriques n'avait pas



4. CETTE TÊTE, représentée de face, de profil, par-dessus et par-dessous suivant des projections orthogonales, est extraite de *De prospectiva pingendi*, de Piero della Francesca. La représentation est tracée par points, déterminés par l'intersection des lignes et repérée par des nombres. Piero veut ainsi montrer que la peinture n'est pas d'abord une œuvre manuelle : avant la réalité sensible, existent la perfection géométrique, les lois de l'harmonie et des proportions. Il n'y a donc pas de dissension entre la science et l'art.

de titre : il a été nommé, *a posteriori*, *Trattato d'abaco*. C'est un texte singulier par rapport aux ouvrages d'abaque habituels, tant en raison de l'extension de la partie traitant de géométrie (147 problèmes sur 492) que de l'ampleur et de la profondeur de la partie concernant l'algèbre. Cette dernière mériterait presque que l'on attribue au traité le sous-titre de «Livre d'algèbre» : 45 pour cent des problèmes sont résolus grâce à l'algèbre.

Ce traité n'est pas seulement algébrique parce qu'il contient beaucoup d'algèbre (de nombreux problèmes avaient déjà été résolus par voie arithmétique ou algébrique, selon les préférences ou les connaissances des auteurs), mais, surtout, parce qu'il améliore l'algèbre de son temps. Piero classe et résout 61 types d'équations du premier au sixième degré, dont 13 sont toutefois des variantes. Ce grand nombre de types d'équations s'imposait pour les praticiens de l'abaque : face à une question particulière, l'habileté consistait à rechercher, parmi les nombreux exemples étudiés et mémorisés, celui qui s'en rapprochait le plus. De surcroît, les mathématiciens de l'époque travaillaient avec des équations à coef-

ficients positifs : l'algèbre se fondait sur la géométrie, et c'est dans le cadre des longueurs, des surfaces et des volumes qu'étaient interprétés les équations et les coefficients des inconnues. Pour résoudre l'équation $x^2 = 4x$, on cherchait le côté d'un carré dont l'aire était égale à quatre fois ce côté. Aussi ne prenait-on pas en compte les solutions nulles ou négatives, sauf dans des cas très rares.

Pour les équations de degré supérieur à deux, Piero considère des équations rationnelles ou irrationnelles (c'est-à-dire faisant intervenir des racines de l'inconnue) dont le degré pouvait être réduit. Il ne s'agissait pas d'une nouveauté, pas plus que la résolution des équations que l'on nomme aujourd'hui binomiales et biquadratiques (qui ne contiennent que des termes de degré pair). Piero se trompe parfois, mais il obtient quelques résultats intéressants lorsqu'il quitte le contexte traditionnel pour s'aventurer vers d'autres types d'équations telles que $ax^3 = bx + c$, $ax^3 = bx^2 + c$ et $ax^3 = bx^2 + cx + d$. De manière surprenante, Piero les résout comme si elles étaient du second degré, en confondant les termes du second et du troisième degré. Dans la dernière équation, il considère $(cx + d)$ comme un terme

connu et se ramène au cas précédent, conformément à une tradition utile. Malheureusement, toutes les analogies ne fonctionnent pas comme on le souhaiterait.

Des erreurs flagrantes

On peut s'étonner que Piero ait commis des erreurs aussi banales et qu'il n'ait même pas vérifié le résultat obtenu, comme le faisaient les praticiens de l'abaque. C'est d'autant plus étonnant que, dans le *Libellus*, il effectue correctement des calculs compliqués avec des nombres de plus de dix chiffres et que les 140 problèmes qui composent le livre sont correctement posés.

Ce fait confirmerait le caractère expérimental du *Trattato d'abaco*. Piero révèle les domaines qu'il explorait, soit à tâtons, soit avec quelques hypothèses de travail, violant ainsi un critère de l'écriture des traités, selon lequel on ne mettait par écrit que les résultats vérifiés et largement approuvés. On peut supposer, plus prosaïquement, que Piero a copié ces problèmes sans les vérifier, selon une habitude répandue chez les compilateurs de livres d'abaque. Ce soupçon est fondé : dans deux livres d'abaque du XIV^e siècle, on



5. PIERO DELLA FRANCESCA, après avoir traité des cinq polyèdres réguliers (aux faces identiques) et de leurs inclusions réciproques, s'occupe des cinq polyèdres semi-réguliers qu'il obtient en tronquant les premiers. Les polyèdres semi-réguliers ont des arêtes égales et des faces différentes. Le tétraèdre tronqué (à gauche), formé de quatre hexagones et de quatre triangles équilatéraux, est obtenu par division de chaque arête du tétraèdre en trois parties égales ; on fait passer le plan de troncature par les trois points de tripartition les plus proches de chacun des sommets ; on élimine enfin les quatre pointes du tétraèdre ainsi obtenues, qui sont aussi des tétraèdres. Si le même système est appliqué à l'icosaèdre (au milieu),

on obtient autant de pentagones que de sommets de l'icosaèdre (12) et autant d'hexagones que de faces (20), car cinq faces triangulaires conviennent à chaque angle. Il s'agit de l'icosaèdre tronqué, dont la forme est utilisée pour les ballons de football. Piero calcule la surface et le volume de ces polyèdres. Un solide à 72 faces (à droite) repris des dessins de Léonard de Vinci et construit à partir du dodécaèdre de Piero, qui affirme être le premier à en avoir calculé l'aire et le volume. Ce volume présente un intérêt artistique et architectural lié à la conception des coupoles. Ces représentations sont tirées du manuscrit *De divina proportion* de Luca Pacioli, l'élève le plus connu de Piero della Francesca en mathématiques.

trouve les mêmes problèmes avec les mêmes erreurs.

Le caractère expérimental du *Trattato d'abaco* est toutefois confirmé par la manière dont Piero affronte d'autres équations, du troisième au sixième degré, en proposant des formules de résolution correctes, soit pour une seule équation (il doit en avoir vérifié le résultat), soit pour des équations provenant d'une classe établie de problèmes. En voici un exemple : calculez à combien de deniers par mois est prêtée une lire (une lire vaut 240 deniers) en

sachant que 100 liras donnent 160 liras au terme de quatre années. Le résultat est donné par l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 96\,000, \text{ qui est du type :}$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x = b$$

(avec $a = 20$ et $b = 96\,000$), et que l'on peut écrire :

$$(x^2 + 2ax + a^2)^2 = b + a^4.$$

L'équation est correctement résolue par Piero d'une manière que l'on résume aujourd'hui par la formule :

$$x = \sqrt[4]{(a^4 + b)} - a \\ = (\sqrt[4]{256\,000} - 20) \text{ deniers.}$$

On vérifie que la formule de Piero est générale, dans la mesure où elle résout correctement non seulement cette équation, mais toutes celles qui proviennent de la classe de problèmes suivante : calculez à combien de deniers est prêtée une lire par mois en sachant que C liras, au terme de quatre années, donnent M liras. En effet, on parvient toujours à l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 160\,000 M/C - 160\,000, \\ \text{résolue par la formule précédente :}$$

La mathématique en représentation

La récente célébration du 500^e anniversaire de la mort de Piero della Francesca a remis à l'honneur sa peinture, redécouverte depuis le XIX^e siècle, et ses travaux en mathématiques. Le temps est venu de renverser les termes habituels de la critique, qui signale que ce peintre était aussi géomètre à ses heures, en relevant que la grande originalité de ce mathématicien est qu'il était peintre.

Les recueils modernes réunissant l'œuvre graphique de Piero négligent les figures de ses traités de mathématiques, ouvrages qu'il a pourtant soigneusement illustrés. L'intérêt de Piero pour les mathématiques est indissociable de son indéniable génie pictural. Les planches de ses traités ne comportent pas que des tracés de géométrie pratique : ils recèlent un catalogue des modèles idéaux et architecturaux que les peintres et autres praticiens des arts du trait et du dessin ne manquèrent pas d'exploiter. Les manuscrits de Piero ont été lus : l'usure des nombreuses copies de son traité de perspective l'atteste. En outre, en 1568, Daniele Barbaro en a repris de nombreux extraits dans son propre traité de perspective. Une partie du *Libellus de quinque corporibus regularibus* de Piero a été reprise par Luca Pacioli, élève de Piero, dans le traité *De divina proportionem*, illustré en partie par Léonard de Vinci et imprimé à Venise en 1509. Pacioli a aussi repris, dans un autre traité, de nombreux résultats du traité d'abaque de Piero. L'influence de ce dernier s'est même étendue à son illustre homologue allemand Albrecht Dürer, auteur, lui aussi, d'une géométrie pratique, imprimée à Nuremberg en 1525.

De prospectiva Pingendi, le traité de perspective de Piero della Francesca, a été rédigé dans les années 1470 à 1480. Il fut retrouvé seulement au XIX^e siècle et imprimé pour la première fois en 1899. La première mention officielle de l'existence de ce traité est due aux mathématiciens Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles qui, dans un rapport présenté le 12 décembre 1853 à l'Académie des sciences, s'exprimaient en ces termes : « Pietro della Francesca, appelé aussi Pietro dal Borgo San Sepolcro, du nom de sa ville natale, excellent peintre du XV^e siècle, qui passait aussi pour le plus savant géomètre de l'époque est regardé comme le principal promoteur de la perspective linéaire. »

Ce traité manuscrit est le premier à expliciter la construction dite « légitime » de Filippo Brunelleschi, fondée sur une double projection orthogonale (plan et profil), et à valider géométriquement la méthode de Leo Battista Alberti, premier énoncé connu d'une règle pour la perspective centrale, abrégée de celle de Brunelleschi. On peut de surcroît attribuer à Piero della Francesca plusieurs résultats novateurs. Il établit la loi numérique générale du raccourcissement des distances dans la perspective centrale. Le géomètre Girard Desargues (1591-1661) en donnera la formulation générale en imaginant le concept d'involution, connu aujourd'hui sous la forme du birapport ou rapport anharmonique : il montre la conservation du rapport des rapports de distances par projection centrale. Piero réalise la première description de l'utilisation du point de distance comme point de construction (le point de distance est un point de fuite secondaire vers lequel convergent des diagonales) et les premières constructions, en peinture, de projections centrales sur des plans horizontaux, théorisant ainsi le trompe-l'œil d'ornement, gisant (au sol ou sur un table) ou plafonnant. Cette dernière innovation contient en germe les principes du trompe-l'œil architectural, du décor plafonnant monumental en trompe-l'œil, de l'ombre portée, du décor de théâtre illusionniste et de l'anamorphose plane. Ces innovations conduiront à l'émergence de la géométrie projective au XIX^e siècle.

Piero della Francesca est le premier, dans l'histoire de la géométrie et *a fortiori* du dessin scientifique et technique, à proposer des représentations réglées et reproductibles des solides de l'espace, tant en perspective cavalière qu'en perspective centrale. De ce point de vue, il y a un « avant Piero », où la reproduction est improbable, et un « après Piero » qui s'est traduit, dans l'histoire des sciences et des techniques, par la reproductibilité des entreprises humaines, avec pour horizon la possibilité de la production en série. L'avènement de la science rationnelle et l'émergence du monde industriel en Occident sont passés par l'invention de la perspective centrale et de ses avatars, la perspective cavalière et le dessin technique.

Jean-Pierre LE GOFF, IUFM et IREM de Caen.

6. VUE CAVALIÈRE DE L'ICOSAÈDRE inclus dans le cube, tirée du *Libellus de quinque corporibus regularibus* (Petit livre à propos des cinq corps réguliers) de Piero della Francesca. Le dessin est autographe, le texte d'un copiste inconnu. Piero explique minutieusement comment chacune des six faces du cube contient une arête de l'icosaèdre placée en situation médiane. Cette construction n'est pas dans le livre xv des *Éléments* d'Euclide (écrit en réalité bien après Euclide), et il est probable que Piero souhaite en souligner l'originalité : elle montre en particulier que six des arêtes de l'icosaèdre, bien choisies, sont orthogonales deux à deux. Piero della Francesca est le premier à fournir une visualisation de polyèdres en trois dimensions.

$$x = (\sqrt[4]{160\,000\,M/C} - 20) \text{ deniers.}$$

Cette généralisation n'est toutefois pas donnée par Piero. Au contraire, la formule est faussement présentée comme la résolution de l'équation générale $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$ (avec des coefficients quelconques), et le problème financier apparaît comme un simple exemple de sa validité. Il n'en reste pas moins qu'il a réussi à résoudre une équation particulière du quatrième degré, ainsi que d'autres du troisième et du cinquième degré qui peuvent être obtenues à partir du même problème si l'on applique la durée de trois et de cinq années. Certaines de ces formules ne se trouvent que dans les ouvrages de Piero et peuvent donc lui être attribuées. La découverte peu après, par d'autres mathématiciens, de la formule de résolution des équations du troisième degré vient sans doute de cette habileté dans la manipulation des coefficients, dont Piero a accéléré la mise en place, et de l'encouragement fourni par de tels succès partiels.



La notation algébrique utilisée par Piero est aussi originale ; on la retrouve, avec quelques variantes, chez plusieurs autres mathématiciens de l'époque, mais elle a rapidement disparu, ne laissant derrière elle qu'une trace de l'intérêt intense pour l'algèbre. Tout cela confirme la participation active de Piero au débat algébrique de la seconde moitié du XV^e siècle.

Piero della Francesca, peintre mathématicien, a été l'un des premiers techniciens qui surent devenir des scientifiques. Ce phénomène, conjointement avec l'intérêt des scientifiques pour les techniques, a été décisif dans la «révolution scientifique» de la Renaissance.

Enrico GAMBA est professeur d'histoire des mathématiques à l'Université catholique de Brescia. Vico MONTEBELLI est professeur de mathématiques appliquées.

Davis M. DALY, *Piero della Francesca's Mathematical Treatises*, Longo, Ravenne, 1977.

G.C. ARGAN et R. WITTKOWER, *Perspective et histoire au Quattrocento*, Éditions de la Passion, Paris 1990.

J.-P. LE GOFF, *Aux confins de l'art et de la science : le De prospectiva pingendi de Piero della Francesca*, in : D. Bessot, Y. Hellegouarch et J.-P. Le Goff (éditeurs), *Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du colloque ADERHEM de Caen (octobre 1986) diffusion IREM de Basse-Normandie, Caen 1991.

P. COLMAR, *La perspective en jeu*, Éditions Gallimard, Paris, 1992.

D. BESSOT et J.-P. LE GOFF, *Mais où est donc passée la troisième dimension ?*, in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, Paris, 1993.

Piero della FRANCESCA, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Edizione nazionale, Giunti, Florence, 1995.

Les mathématiciens, Bibliothèque Pour la Science, 1996.

Thomas BANCHOFF, *La quatrième dimension*, collection Univers des sciences, Pour la Science, 1996.

L'ADN, ressort moléculaire

J.-F. ALLEMAND • A. BENSIMON • D. BENSIMON • F. CARON • D. CHATENAY
PH. CLUZEL • V. CROUETTE • CH. HELLER • R. LAVERY • A. LEBRUN
T. STRICK • J.-L. VIOVY

Les physiciens et les biologistes explorent les propriétés élastiques de l'ADN. Ils parviennent à manipuler des molécules d'ADN isolées et découvrent ainsi de nouvelles formes de la molécule.

Les biologistes savent depuis longtemps que l'hérédité est contenue dans la cellule, essentiellement sous la forme d'une longue molécule : l'ADN. L'information génétique est enregistrée dans cette molécule par un codage chimique, fondé sur quatre sous-unités, ou nucléotides ; chaque nucléotide est composé d'un groupe sucre, d'un groupe phosphate et d'une des quatre bases : l'adénine (A), la thymine (T), la guanine (G) et la cytosine (C). L'ADN existe normalement sous la forme d'une double hélice qui permet aux bases des deux brins de s'apparier en paires A-T et G-C. Ainsi les deux brins de la molécule portent des copies complémentaires du même message génétique.

Il était alors tentant de comparer cette longue molécule (ou polymère) à une bande magnétique sur laquelle était inscrit le programme de la vie. Dans cette analogie, les chromosomes sont, en quelque sorte, des bobines permettant d'enrouler proprement une molécule d'ADN de dix centimètres de long (pour l'espèce humaine) dans un volume de l'ordre d'un micromètre (ou millionième de mètre) au cube. Cependant, depuis quelques années, cette description semble simpliste : si l'information génétique reste fondamentale, les propriétés mécaniques (dynamiques et statiques) du support de cette information (la molécule d'ADN) se révèlent d'une importance cruciale pour le fonctionnement des cellules.

C'est une surprise, car la monotonie de la structure chimique, avec la répétition de quatre types de sous-unités seulement, n'encourageait pas des explorations chimiques approfondies.

Contrairement aux protéines, dont les chaînes latérales des 20 sortes d'acides aminés permettent de savants repliements et des propriétés catalytiques remarquables, l'ADN semble «cacher» ses bases au centre d'une structure hélicoïdale monotone.

Torsions et entortillements

Tout d'abord, on a observé que la séquence des bases engendrait des modulations de la structure hélicoïdale de l'ADN et de ses propriétés mécaniques : la séquence des bases induit des changements du pas de la double hélice, des courbures locales de la molécule et des variations des distances et des angles de liaisons entre les paires de bases. Un exemple est donné par l'étude du mode d'action de l'enzyme nommée désoxyribonucléase I. Cette protéine coupe les brins d'ADN ; on a longtemps cru qu'elle agissait en des points aléatoires de la séquence, mais une étude fine a révélé que l'enzyme agit en coupant l'ADN en des sites préférentiels où la molécule d'ADN est plus flexible.

Plus récemment, l'étude des phénomènes de recombinaison dans le micro-organisme *Escherichia coli* a montré qu'une autre enzyme, nommée Rec A, assure la formation de triples brins d'ADN stables : dans ces structures, un troisième brin identique à l'un des deux brins de la double hélice, vient se loger parallèlement au brin de même séquence, dans le grand sillon de la double hélice initiale. Sontanément, une triple hélice ne se forme pas quand on mélange une double hélice d'ADN avec l'un des deux brins, et le nouveau mode d'appariement

résulte d'un étirement de la double hélice, à la suite de son interaction avec l'enzyme Rec A. Autrement dit, l'extensibilité de l'ADN pourrait jouer un rôle dans les mécanismes cellulaires de reconnaissance par la séquence.

Depuis une dizaine d'années, on comprend que l'ADN peut également être surenroulé ou sous-enroulé : la double hélice peut être comme un cordon de téléphone qui a été tourné sur lui-même, soit dans le sens de l'enroulement de base, soit dans le sens contraire. On a compris que les propriétés de torsion et de superhélicité sont de deux types : locales ou à longue distance. Dans les effets locaux, la superhélicité négative (sous-enroulement) peut induire ou faciliter la séparation des deux brins d'une double hélice (cette séparation joue un rôle dans le démarrage de la transcription et de la réplication). La superhélicité peut aussi déclencher des changements de structure, la double hélice adoptant une forme de croix ou s'enroulant dans le sens inverse du sens habituel.

D'une manière plus subtile, un changement de torsion de la molécule provoque des entortillements de l'axe de la double hélice en des structures dites «plectonémiques» ou «solénoïdales», à la façon d'un cordon de téléphone (voir la figure 3). Ces repliements qui rapprochent des séquences éloignées permettent ainsi l'interaction de gènes distants sur l'ADN. Ils créent aussi des courbures locales qui favorisent l'action de certaines enzymes.

Les effets à longue distance sont faciles à imaginer : une contrainte de torsion locale peut se propager ou se diluer par relaxation le long d'une