

égal à 8, comme sur la figure, $d = 1$ et $e = 2$. Les longueurs sont alors :

- américain : $2 + 14\sqrt{5} = 33,30495\dots$
- européen : $14 + 2\sqrt{5} + 6\sqrt{8} = 35,443\dots$
- gavage : $14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53} = 36,9325\dots$

Pouvons-nous être certains que le laçage américain soit toujours le plus court ? Un traitement algébrique précis montre que si d et e sont non nuls et si n est au moins égal à 4, alors les laçages sont, dans l'ordre des longueurs croissantes : l'américain, l'euro-péen et celui dénommé gavage. Si $n = 3$, l'américain est encore le plus court, mais les deux autres sont égaux. Si $n = 2$, alors les trois laçages sont de même longueur, mais qui, autre qu'un mathématicien, se pré-occuperait d'un tel cas ? Cette approche algébrique est compliquée et ne nous éclaire pas sur ce qui rend tel ou tel laçage plus efficace.

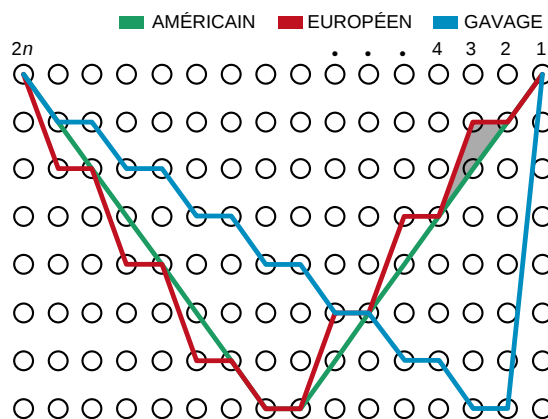
L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Attaquant le problème sous un autre angle, J. Halton observe qu'un artifice géométrique astucieux rend manifeste que le laçage américain est le plus court des trois. L'idée est inspirée de l'optique géométrique, l'étude des trajectoires des rayons lumineux.

Il y a longtemps, les mathématiciens ont découvert que la géométrie des rayons lumineux peut être rendue plus lumineuse (c'est le cas de le dire) en appliquant de judicieuses réflexions pour rendre rectilignes des trajectoires anguleuses. Par exemple, pour justifier la classique loi de la réflexion « l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence », on examinera un rayon lumineux frappant un miroir et rebondissant sur celui-ci. Si on envisage le symétrique de la deuxième partie de la trajectoire par rapport au plan du miroir (voir la figure 2), on obtient, avec la première partie, une trajectoire perçant ce plan et pénétrant le monde d'Alice au-delà du miroir.

Suivant le principe du temps de parcours minimal, une propriété générale des rayons lumineux énoncée par Pierre de Fermat, une telle trajectoire doit atteindre son but en un temps le plus court possible, ce qui, ici, signifie qu'elle doit être un segment de droite. Dessinons la normale au miroir au point d'incidence. Alors, l'angle noté m sur la figure est égal à l'angle d'incidence i ; de plus, les deux angles marqués x sont égaux, mais $m + x = 90$ degrés, et si r est l'angle de réflexion, $r + x = 90$ degrés. Par conséquent, $m = r = i$.

J. Halton utilise une extension de ces représentations géométriques pour les trois types de laçages. Il dessine un diagramme (voir la figure 3) fait de $2N$

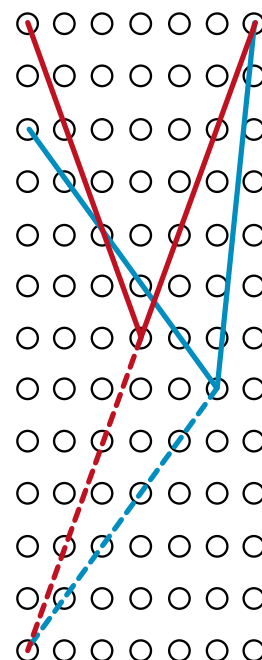


3. En utilisant la méthode de réflexion, on détermine quel est le laçage le plus court à partir de considérations géométriques. Les colonnes de numérotation impaire représentent les œillets de gauche, les colonnes paires les œillets de droite. Ainsi la représentation du laçage est réfléchi à chaque œillet. Le laçage américain est plus court que le laçage européen, puisque, dans chaque petit triangle (en gris), il suit un des côtés au lieu des deux autres.

colonnes d'œillets espacées verticalement d'une distance d . Deux colonnes successives sont espacées d'une distance e (nous avons réduit la valeur de e , mais la méthode fonctionne pour toutes les valeurs de d et de e). La dernière colonne représente la colonne des œillets de gauche, celle d'avant la colonne des œillets de droite, et ainsi de suite alternativement.

Les lignes polygonales zigzaguant au travers du diagramme correspondent aux laçages, mais avec un « truc » complémentaire. Partant de l'œillet du haut à gauche, on dessine le premier segment du laçage en joignant, de droite à gauche, la colonne 1 à la colonne 2, mais le segment suivant sera tracé entre les colonnes 2 et 3 au lieu de revenir de la colonne 2 à la colonne 1, comme sur une véritable chaussure : le segment réel est reflété comme si la colonne d'œillets était un miroir. On continuera ensuite de même, chaque segment étant reflété dans le miroir-colonne d'où il part. Alors le tracé zigzaguant entre deux colonnes d'œillets est remplacé par une ligne progressant toujours vers la gauche.

Les réflexions n'altérant pas la longueur d'un segment, cette représentation a exactement la même longueur que le laçage effectif qu'elle représente, avec un avantage supplémentaire toutefois : il est à présent facile de comparer les longueurs des laçages américain et européen. À part quelques segments où ils coïncident, le laçage américain décrit un côté d'un petit triangle là où le laçage européen parcourt les deux autres côtés. Comme la somme de deux côtés d'un triangle est supérieure au troisième côté, puisque la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, le laçage américain est, à l'évidence, le plus court.



4. Pour comparer le laçage européen et le gavage, on élimine les segments communs horizontaux. Les tracés réduits, reflétés sur des miroirs horizontaux, montrent finalement que le laçage européen est le plus court.

Il n'est pas aussi manifeste que le gavage est plus long que le laçage européen. La manière la plus simple de rendre cela clair est d'éliminer des deux tracés tous les segments horizontaux (il y en a $n - 1$ dans chacun d'eux, contribuant donc, pour la même longueur, aux deux tracés) ainsi que les deux paires de segments obliques de même longueur. Il en résulte deux représentations en forme de V ; on décalera le laçage européen pour qu'il parte de l'œillet en haut à droite. Si chaque parcours est à présent « redressé » par réflexion autour de l'axe horizontal passant par la pointe du V, il est alors clair que le laçage européen est le plus court, toujours parce qu'un côté d'un triangle est plus court que la somme des deux autres.

LE PLUS COURT LAÇAGE

Ces astucieux artifices de réflexion sont plus performants qu'on ne le pense. J. Halton les utilise pour prouver que le laçage américain en zigzag est le plus court de tous les laçages possibles. Plus généralement, les laçages de chaussures et l'optique à la Fermat sont des domaines de la théorie mathématique des géodésiques, les courbes de plus court chemin, dans diverses géométries. Les réflexions dans des miroirs répondent à des questions fondamentales en physique, et elles confirment l'absolue supériorité de la méthode américaine de laçage des chaussures.

Démographie et sens giratoire

CHRISTOPH PÖPPE

Les relations entre les mathématiques et la biologie sont souvent tortueuses et abstraites.

J'avais encore les jambes en coton quand je montais à l'intérieur de l'Arc de Triomphe. Au volant de sa petite voiture, mon hôtesse venait de me faire traverser l'immense place Charles de Gaulle avec tant de fougue que j'avais cru ma dernière heure arrivée. Comment traverser un tel chaos et survivre ? « C'est tout simple, m'avait-elle dit, d'abord, il faut viser, et puis on tire ! »

Après ce que je venais de vivre, j'appréciais la régularité de ces escaliers. Mon mouvement aurait été périodique, s'il n'avait été superposé à un mouvement ascendant quasi linéaire.

J'étais ainsi perdu dans mes pensées, faisant l'éloge de ce qui est prévisible, lorsque l'imprévisible se produisit ! À peine avais-je posé le pied sur la terrasse ensoleillée de l'Arc de Triomphe que je vis une inconnue dont mon regard n'arrivait plus à se détacher.

Quand il s'agit d'une inconnue, on commence par la nommer (« soit x le nombre réel cherché... »). Secrète-

ment, je la nommais Heidi, à cause de ses grands yeux enfantins, à la fois craintifs et désapprobateurs, qui fixaient le grouillement de la place, en contrebas. De toute évidence, elle venait de subir une épreuve semblable à la mienne ; cela m'aida à surmonter ma timidité et à l'aborder.

La circulation automobile n'est pas un thème idéal pour lier connaissance, mais, avant même de nous en rendre compte, nous étions en grande conversation, en train de refaire le monde. Allemande, comme moi, elle aimait l'ordre et craignait ce chaos, qu'elle jugeait typiquement français, et elle pensait qu'il était possible d'y remédier. Ne pourrait-on pas, par exemple, matérialiser les couloirs de circulation et les directions à prendre par un fléchage sur la chaussée ?

« Cela ne servirait pas à grand-chose, m'empressais-je de lui répondre, tout en analysant le problème de manière fondamentale. Tu penses certainement à des flèches qui indiqueraient, en tout point

de la place et à chacun des automobilistes, la direction qu'il doit suivre.

– Oui.

– Et disposées de telle manière que deux flèches provenant de directions différentes ne conduisent pas à un même point, ou qu'elles ne partent pas d'un même point dans des directions différentes ?

– Évidemment. Il s'agit d'éviter les collisions.

– Oui, mais les automobilistes n'auraient alors plus le choix de la rue par laquelle ils doivent quitter la place.

– Comment cela ?

– La trajectoire d'une voiture est une courbe sur cette place, et une flèche représente une tangente à cette courbe. Si tu as une telle indication en tout point de cette place et si tu arrives avec ta voiture en un point quelconque, il n'y aura qu'un seul chemin possible en respectant la signalisation. »

Elle me regarda alors d'un air si curieux que je m'empressais de poursuivre mon raisonnement : « Évidemment, on pourrait déjà matérialiser la présélection sur les rues d'accès et dresser des flèches de direction au-dessus de l'ensemble de la place, pour que les véhicules qui arrivent sur une file de présélection puissent, dès le départ, se répartir en fonction de leur voie de sortie. Toutefois, si l'on applique ce principe pour chacune des rues débouchant sur la place, il devient impossible d'éviter les croisements de files, ce qui va à l'encontre de la nature même du champ de vecteurs.

– Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs ?

– En chaque point, on trouve une indication de direction – qui constitue en fait également une indication de vitesse, mais cela n'a pas d'importance dans le cas présent. Des voitures qui suivraient un tel champ de vecteurs et qui ne pourraient pas s'éloigner à leur gré finiraient soit par tourner en rond sans fin, soit par s'approcher d'un point pour y rester bloquées. »

Heidi fronça les sourcils d'un air irrité : « Est-ce que cela signifie qu'elles vont toutes se heurter en ce point ? »

– Non, car le champ de vecteurs est continu. En s'approchant d'un point stationnaire, la vitesse des voitures se réduirait progressivement pour tendre vers zéro. Et d'ailleurs, ce sont des points... »

Je vis alors de la souffrance dans son regard, et avant que je puisse lui demander si elle se sentait mal, elle me devança et me demanda :

« Tu ne serais pas mathématicien ? »

– Si.

– C'est donc ça ! »

Que pouvais-je répondre à cela et à son expression résignée ? Silence confus...



Yann Arthus-Bertrand/Alitude

1. Une circulation sans croisements est impossible autour de l'Arc de Triomphe. Cet énoncé, démontrable mathématiquement, a des implications dans des domaines variés.

DYNAMIQUE DES POPULATIONS ET SENS GIRATOIRE

Puis les traits de Heidi se détendirent. Les yeux fermés, elle laissait le soleil caresser son visage et rayonnait, comme si elle pensait à quelque chose de très beau.

«À quoi penses-tu, me hasardai-je à lui demander?

– Je rêve à une île déserte.»

Mon imagination se mit à errer. Les mers du Sud, des palmiers, le soleil, Heidi et moi...

«Terre-Neuve, au large de la côte Est du Canada, reprit-elle. C'est très isolé, et près de la moitié de l'île est couverte par la toundra, des marécages et des marais. Le sol dégèle trois mois par an environ.

– Ah bon.

– C'est très intéressant.

– Vraiment?

– Oui, car les espèces de mammifères y sont rares.»

Elle ne se laissa pas démonter par mon air dubitatif et poursuivit : «Il y a des lièvres arctiques, des lièvres américains, des caribous, des lynx et quelques autres espèces de moindre importance. On observe une variation pluriannuelle très régulière des populations de ces animaux. Chaque fois que les lièvres américains sont très nombreux, le nombre des lynx augmente l'année suivante, ce qui entraîne ensuite une diminution du nombre de lièvres américains. L'effectif des lynx décroît alors, et ce processus se répète tous les dix ans environ. Les populations de caribous et de lièvres arctiques suivent ces variations avec un léger décalage. Le plus intéressant, dans tout cela, c'est que si l'on examine des caribous morts au printemps, on constate qu'ils ont la plupart du temps été mordus par des lynx (voir *Changement de proie dans un écosystème simple*, par Arthur Bergerud, *Pour la Science*, février 1984).

– Et ça te plaît d'aller disséquer des caribous morts dans les étendues glacées de Terre-Neuve?

– Mais oui! On a même remarqué que certains abcès purulents...

– Tu ne serais pas biologiste?

– Si.

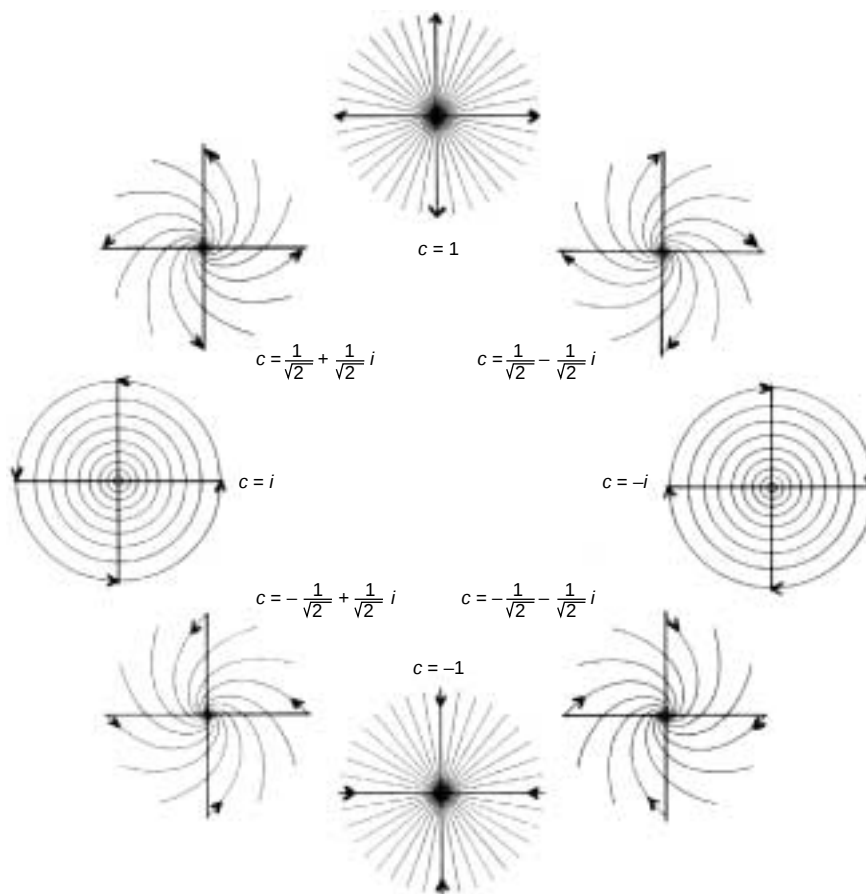
– C'est donc ça!»

À nouveau, silence confus. Je cherchai désespérément un sujet de conversation favorable.

Tout d'un coup, une idée me vint : «Mais c'est la même chose que les voitures autour de nous!»

Manifestement, Heidi ne comprenait pas.

«Mais si, poursuivis-je. Tu m'as dit toi-même que seuls les lynx et ces petits lièvres étaient importants.



Wilhelm Scharnowell

2. Courbes intégrales du champ de vecteurs complexe $u(z) = cz$ pour différentes valeurs de c . La position de chacune des figures obtenues dépend des coordonnées du point c dans le plan complexe. Contrairement à l'habitude, l'axe réel est ici dirigé vers le haut. Lorsque c varie le long de la circonférence d'un cercle, l'étoile prend la forme de spirales logarithmiques qui deviennent de plus en plus serrées jusqu'à former une famille de cercles.

– Le lièvre américain *Lepus americanus*, s'il te plaît, à ne pas confondre avec le lièvre arctique *Lepus arcticus*. Mais à part cela, c'est vrai.

– Et bien voilà! Puisque tu connais le nombre de lynx x et le nombre de lièvres y , tu peux marquer un point (x, y) dans un système de coordonnées.

– Ah...»

De nouveau, ce regard de madone douloureuse me poussa à enchaîner sans attendre :

«L'état de ton système est alors représenté par un point dans un plan – ou par deux nombres réels, ce qui revient au même. On détermine facilement le mouvement de ce point, qui représente l'état de la population animale, car je pense que si les lynx mangent les lièvres, l'inverse n'est pas vrai.

– Bravo!

– Et si les lièvres ne se font pas manger, ils vont se multiplier comme des lapins.

– Non, car leur comportement sexuel est très différent.

– Je voulais simplement dire que l'augmentation de leur effectif est pro-

portionnelle à leur nombre. Ce qui veut dire qu'en chaque point correspondant à un temps donné, la dérivée temporelle sera proportionnelle à ce nombre lui-même.

– La dérivée temporelle?

– Oui, le truc classique, $y(t+h)$ moins $y(t)$, divisé par h . Et ensuite, on fait tendre la valeur limite de h vers zéro.

– Tu veux dire que les lièvres d'aujourd'hui moins les lièvres d'hier, divisés par un jour, cela nous donne le nombre de lièvres nés par jour?

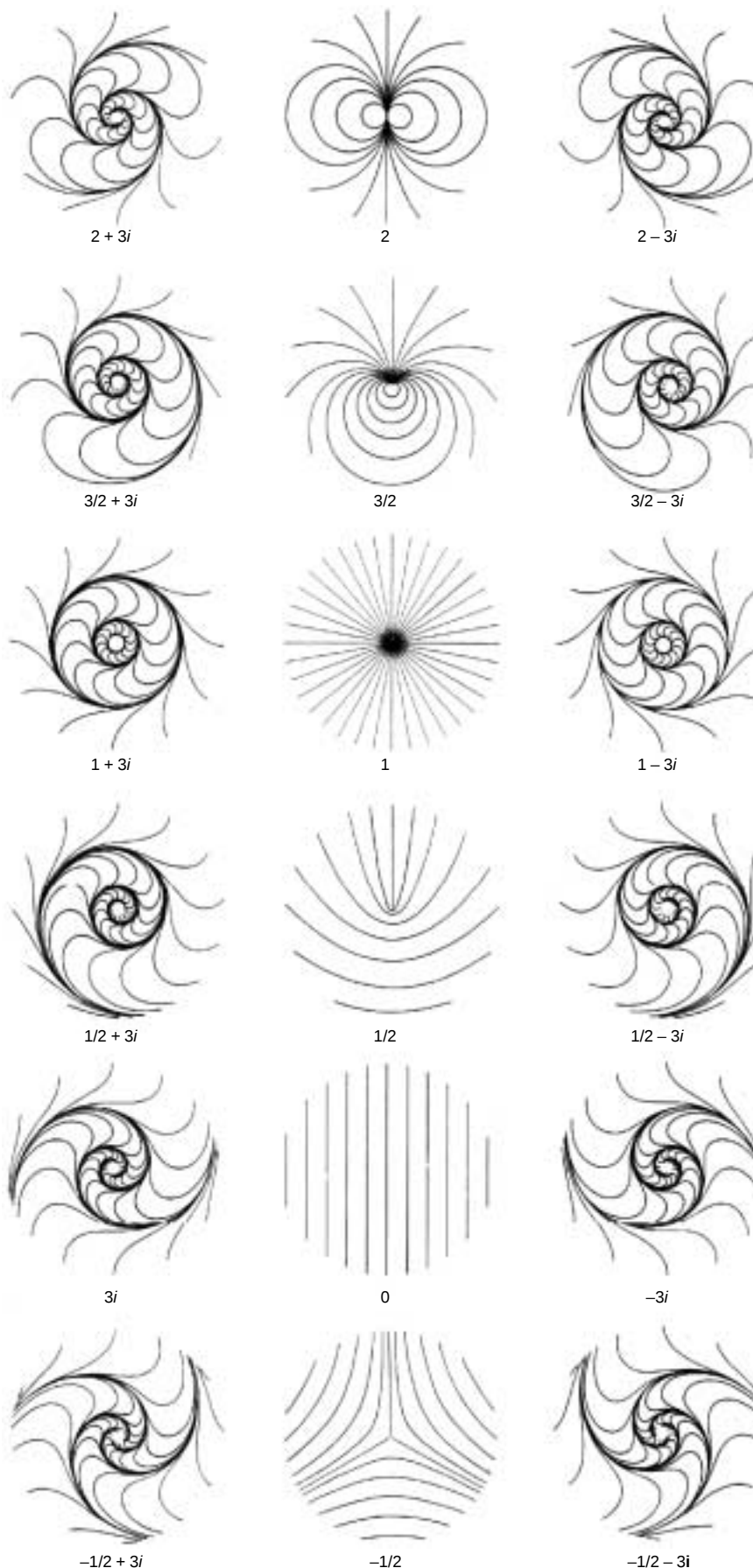
– Exactement. Et en plus, y dépend de manière continue de t , d'où $y(t+h)$ tend vers $y(t)$ lorsque h tend vers zéro, ce qui fait que le numérateur et le dénominateur de cette équation tendent tous deux vers une valeur infinitésimale, et alors tout dépendra de la valeur limite du quotient...

– Tendent vers une valeur infinitésimale? Comment vois-tu les choses? En millilièvres par seconde?

– C'est à peu près ça.»

Regard dévastateur :

«J'en étais sûre. les mathématiques ne sont que des bêtises. Un lièvre naît ou il ne naît pas. Je n'ai jamais entendu



Wilhelm Scharnowell

3. Diagrammes de la fonction complexe $u(z) = z^n$ pour différentes valeurs de l'exposant n . Cette valeur est indiquée pour chacune des figures obtenues.

parler d'une hase qui serait un tout petit peu enceinte!

– Ne prends pas le formalisme à la lettre. Imagine qu'il y ait un grand nombre de lièvres. Un de plus ou de moins ne fera pas grande différence. À ce stade, on ne peut plus juger si la population évolue de manière continue ou par incréments.

– Bon, je veux bien, mais pourquoi tenir des raisonnements si déroutants?

– Parce qu'on peut alors décrire tous les facteurs importants en termes mathématiques : reproduction, mort de faim, capture par un prédateur, prolifération des survivants...

– Mais ce n'est pas en se faisant dévorer qu'un lièvre fait plus de petits.

– Certainement pas, mais quand la nourriture est plus abondante, les portées sont plus nombreuses.

– D'accord, mais tout dépend aussi de la probabilité avec laquelle les lynx attrapent les lièvres. Comment peux-tu prédire de manière exacte combien de millièmes de lynx vont naître en plus par seconde grâce à la consommation de lièvres?

– Je ne peux pas le dire de manière précise, mais, de nouveau, ces effets de hasard se compensent lorsqu'on considère des populations importantes. C'est pourquoi l'on peut dire avec certitude qu'il suffit de connaître l'état des populations à un instant pour pouvoir prévoir comment les populations évoluent ensuite. C'est ce qu'on appelle une équation différentielle : à chaque état est associée une indication définissant l'évolution de cet état à l'instant suivant. Ou en termes géométriques : à chaque point du plan est associé une flèche de direction.»

On devinait le combat intérieur que se livrait Heidi. Devait-elle prendre mes paroles au sérieux? En tout cas, elle sembla prête à suivre ce raisonnement, du moins provisoirement. Elle enchaîna, en effet : «Si maintenant les lynx sont rares et les lièvres nombreux, alors x est petit et y grand, et l'état du système sera décrit par un point situé en haut dans un système de coordonnées. Si tel est le cas, les lynx disposeront d'une nourriture abondante et se multiplieront, de sorte que le nombre des lièvres diminuera en conséquence. Et, si je comprends bien, il pendra de ce point une flèche dirigée en bas à droite.

– C'est tout à fait ça! Les flèches sont nommées des vecteurs, et l'ensemble des flèches forme un champ de vecteurs. Tout cela n'est qu'un détail terminologique.

– Me voilà bien avancée, qu'est-ce que j'en tire?

– Peut-être une solution de l'équation différentielle, qui constituerait une prévision de l'évolution de la population. Ou,

du moins, une représentation générale de celle-ci.

– Comment cela ? N'y a-t-il pas toujours une solution à cette équation ?

– Si. Le principe d'existence pour le problème de la valeur initiale dans le cas des équations différentielles ordinaires à terme lipschitzien...»

De nouveau, ce regard douloureux. J'avalai en vitesse le reste de ma phrase et lui dis : « Il y a généralement une solution, mais, la plupart du temps, on ne peut pas la calculer à l'aide de formules. Le problème est de dessiner dans le plan une courbe ayant son origine en un point donné, de sorte que sa tangente en tout point corresponde à la flèche de direction de ce point.

– Ah bon ! C'est comme si les voitures devaient suivre la flèche de direction. Ce n'est pourtant pas très difficile !

– Plus que tu ne le penses. Tu dois imaginer qu'une telle flèche est associée à chaque point. C'est-à-dire que, dès que tu suis la direction indiquée sur une distance infiniment petite, c'est de nouveau une autre direction qui s'impose. Ce n'est possible que si les directions ne changent pas brusquement d'un point à un autre.

– Et qu'est-ce que ça donne, comme courbes ?

– Cela dépend. Imagine que toutes les flèches pointent vers un lieu précis. Les courbes convergeront alors, elles aussi, vers ce point, et une voiture, par exemple, sera alors attirée vers ce point comme par un aimant. Lorsqu'on trace de telles courbes, on obtient une série de lignes qui rappelle les lignes de champ d'un aimant. Un tel point s'appelle un attracteur (voir le bas de la figure 2).

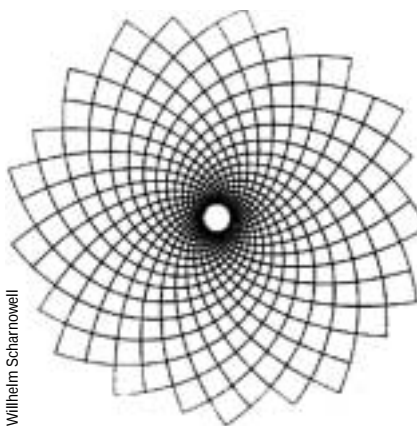
– Mais aucune force ne provient de ce point.

– Ce n'est pas indispensable, lui dis-je, histoire de faire avancer notre aventure. On peut se sentir attiré par quelqu'un sans que ce quelqu'un vous tire à lui.»

ATTRACTEURS ET PANNEAUX STOP

« Ben voyons, s'exclama une jeune femme qui nous avait écoutés ; les moustiques sont bien attirés par les lampadaires. Et le serpent jarretière à flancs rouges : à peine une femelle sort-elle de son trou qu'elle répand une phéromone et que les mâles se précipitent sur elle par centaines pour essayer de s'accoupler (voir *Pour la Science*, janvier 1983, p. 68). »

Heidi passait apparemment ses vacances avec une collègue. Pour me tirer d'embarras, il fallait vite que je trouve un autre exemple : « Suppose que tu viennes de descendre d'une rame de métro et que tu cherches la sortie. Tu vas



Wilhelm Scharnowell

4. Paire de familles de courbes orthogonales pour les champs de vecteurs cz et icz avec $c = 1 + i(\sqrt{5} - 1)/2$. La même figure peut être interprétée comme les quatre familles de courbes de $u(z) = \sqrt[4]{c^4 z^4}$, et dont seulement deux se distinguent par leur sens de passage.

alors suivre le premier panneau *Sortie* : tu peux définir un tel panneau comme un attracteur, mais pas de manière absolue, car tu ne restes à l'arrêt que de manière transitoire devant lui.

– Mais il existe généralement plusieurs sorties.

– Dans ce cas, le champ de vecteurs qui décrit ton mouvement possède plusieurs attracteurs. Représente-toi un paysage vallonné où chaque point est associé à une flèche qui indique la direction de plus grande pente. Voilà qui constitue notre champ de vecteurs. Prenons maintenant une boule qui roule vers le bas dans ce paysage : elle suivra la courbe intégrale de l'équation différentielle. Tous les points les plus bas où elle s'arrêtera, faute de pente dans toutes les directions, pourront être définis comme des attracteurs.

– Et si on la pose très délicatement sur un sommet ?

– Elle reste sur place, car le sommet est un point stationnaire, mais pas un attracteur : dès qu'on la déplace légèrement, elle se met à rouler.

– Bon, je veux bien, mais lorsque la courbe est dirigée vers un attracteur, emprunte-t-elle le chemin le plus court ?

– Pas forcément. On peut tout à fait envisager que les flèches ne soient pas directement dirigées vers l'attracteur, mais qu'elles en dévient d'un certain angle. La courbe décrit alors une spirale qui vient se terminer sur l'attracteur. Si l'on augmente cet angle jusqu'à une valeur de 90 degrés, les spirales se transforment en une série de cercles concentriques.

– Des cercles ?

– Oui : tu décris un cercle lorsque tu cours toujours de manière perpendiculaire à la direction qui vise un point défini.

– Ça, je le savais !

– Qu'il s'agisse de spirales divergentes ou convergentes, toute cette famille de courbes peut être décrite par une formule unique où l'on fait varier la valeur de l'angle (voir la figure 2).

– Et de quel type est la flèche qui est associée à ce point attracteur central ?

– Une flèche de longueur zéro. Un panneau *Stop*, en quelque sorte.

– Et quand toutes les flèches s'éloignent de lui ?

– Encore un panneau *Stop*.

– Ainsi, il existerait des panneaux *Stop* qui fonctionnent par attraction et d'autres par répulsion ?

– D'une certaine manière. Il en existe même qui sont attracteurs sur les côtés, mais qui repoussent devant et derrière, un peu comme un col entre deux montagnes. D'autres encore possèdent de nombreux secteurs dont certains attirent et d'autres repoussent.»

Heidi me regarda, comme si elle doutait de ma santé mentale, alors qu'il aurait été si simple de calculer la valeur de l'angle à proximité du point zéro entre z et $u(z) = z^3$ et de vérifier qu'effectivement il variait alternativement en étant tantôt plus petit et tantôt plus grand que 90 degrés. Je lui épargnai cette explication.

« C'est bizarre, dit Heidi. Qu'advient-il alors des courbes intégrales ?

– Elles prennent leur source au point critique...

– Au quoi ?

– Au niveau du panneau *Stop* à plusieurs côtés, et elles partent dans des directions divergentes vers l'extérieur pour faire demi-tour et revenir en direction du même point – à moins qu'il n'existe d'autres panneaux *Stop*. Le résultat final ressemble à une fleur avec des pétales (voir la figure 5). »

À cette évocation poétique, les deux biologistes s'intéressèrent de nouveau à mes considérations mathématiques. Je profitais de ce regain d'intérêt pour amener un autre exemple : « Il existe également des familles de courbes qui ressemblent à une coquille d'escargot ou au dessin des graines d'un tournesol (voir les figures 3 et 5).

– Ah oui... Et les feuilles ou les coquilles d'escargots poussent-elles en suivant de telles lois de formation ? »

C'était exactement la question qu'il ne fallait pas me poser : il existe certes des formules mathématiques qui engendrent une foule de courbes très jolies dont certaines rappellent des formes biologiques, mais il n'existe pas de corrélation directe entre les formes mathématiques et les formes biologiques qui leur ressemblent. Non pas qu'on ne puisse appliquer des formules mathématiques pour

expliquer la forme de la coquille d'un escargot, mais le problème est bien plus compliqué que la recherche d'un champ de vecteurs dans un plan.

D'autre part, et indépendamment, les équations différentielles constituent un thème central des mathématiques. On y cherche, par exemple, à déterminer la forme du champ de vecteurs bidi-

mensionnel et celle de leurs courbes intégrales. Elles servent d'exemples pour de nombreux systèmes complexes, mais pas pour leurs qualités esthétiques, car de belles images apportent rarement la gloire en mathématiques!

Il est d'ailleurs significatif que l'on doive les plus belles collections de telles figures non pas à des mathématiciens, mais à

des personnes telles que Wilhelm Scharnowell (1922-1991), qui était ingénieur à Dortmund (Allemagne), ainsi qu'à Friedrich Zauner, professeur en retraite à Villach (Autriche), et à son fils Erhard Zauner. Nous ne pouvons montrer ici qu'une toute petite sélection choisie parmi le grand nombre de figures qu'ils ont tracées au cours de dizaines d'années de travail.

Diagrammes de fonctions complexes d'après Friedrich Zauner et Wilhelm Scharnowell

Un champ de vecteurs bidimensionnel est une paire de fonctions (f, g) de deux variables qui associent un point du plan $(f(x, y), g(x, y))$ à chaque point (x, y) . À chaque champ de vecteurs correspond un système d'équations différentielles qui s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

On peut considérer le point $(f(x, y), g(x, y))$ comme un vecteur qui prend son origine au point (x, y) . Une solution de l'équation différentielle est constituée par une courbe dont les tangentes sont ces vecteurs.

Deux nombres réels peuvent toujours être regroupés en un nombre complexe que l'on écrit sous la forme $z = (x, y)$ ou bien $z = x + iy$: x est la partie réelle et y la partie imaginaire du nombre z . De la même manière, on peut contracter les composants f et g d'un champ de vecteurs en une fonction complexe $u(z) = f(x, y) + ig(x, y)$. Le nombre i , l'unité imaginaire, est égal à la racine carrée de -1 .

Ce regroupement formel est intéressant parce qu'il permet de multiplier des nombres complexes comme s'il s'agissait de nombres réels. On calcule avec ces nombres presque comme d'habitude, tout en observant que $i^2 = -1$.

Chaque nombre complexe a deux racines carrées, de signes opposés ; les vecteurs qui leur correspondent dans le plan sont de longueur égale et dans des directions opposées. Chaque nombre complexe possède trois racines cubiques, quatre racines quadruples, etc. Les vecteurs qui correspondent à ces racines d'ordre n sont également de même longueur, et leurs extrémités forment un polygone régulier à n côtés.

Ce mode d'écriture complexe permet de se concentrer sur des champs de vecteurs $u(z)$ que l'on peut décrire sans prendre en compte la partie imaginaire et la partie réelle de u ou de z . Il s'agit en règle générale de fonctions dites analytiques qui ont des comportements intéressants. Ces « diagrammes de fonctions analytiques » ne représentent pas complètement la fonction analytique (cela est impossible, car il faudrait disposer d'un espace à quatre dimensions), mais des courbes intégrales (la représentation graphique) de l'équation différentielle dont le champ de vecteurs constitue la fonction analytique. Par chaque point du plan passe une telle courbe intégrale ; il s'agit par conséquent d'effectuer le bon choix, quand on crée un programme informatique. Les critères pour y parvenir sont multiples : les courbes ne doivent par exemple pas être trop resserrées ni trop dispersées (ce qui n'est pas toujours facile à obtenir en raison de leur tendance à se concentrer en certains points), et l'image d'ensemble doit refléter les symétries du champ de vecteurs. De telles exigences sont difficiles à formaliser dans un programme informatique ; il serait en effet extrêmement difficile de déléguer à un ordinateur l'énorme travail manuel qui se cache derrière ces images (environ huit heures pour un diagramme de difficulté moyenne).

Pour des raisons esthétiques, l'axe réel (qui constitue le plus souvent l'axe de symétrie) des diagrammes de Zauner et de Scharnowell n'est pas dirigé vers la droite, mais plutôt vers le haut.

Une courbe intégrale ne donne pas une image complète de la solution d'une équation différentielle, car la vitesse et la direction correspondant à ces courbes ne sont pas indiquées. Un tel défaut devient un avantage pour certaines images qui sont fondées non pas sur une seule fonction, mais sur plusieurs. Si l'on doit, par exemple, extraire une racine pour des exposants demi-entiers (*deuxième, quatrième et sixième lignes sur la figure 3*), à chaque point du plan seront attachés deux vecteurs dirigés en sens contraire. Cela est admissible, car la courbe intégrale est dirigée de manière tangentielle par rapport aux deux vecteurs. Une racine cubique donnera naissance à trois familles de courbes qui se recoupent en chaque point avec un angle de 120 degrés.

Des formules telles que z^{1+3i} ne sont pas seulement à double sens comme la racine carrée, mais à sens multiple et infini. Les puissances d'exposant complexe sont en effet définies par la fonction exponentielle complexe et sa fonction inverse – le logarithme complexe : $z^{1+3i} = \exp((1+3i) \ln z)$. Dans le plan complexe, il existe un nombre infini de fonctions inverses possibles de la fonction exponentielle. Il n'est donc pas possible de décider dès le départ quel est le logarithme qu'il faudra appliquer parmi les nombreux possibles. C'est pour cette raison que l'on obtient un nombre infini de familles de courbes qui se retrouvent superposées : l'ambiguïté existe uniquement sur la vitesse et non sur la direction, ce qui permet d'obtenir malgré tout une image homogène.

Lorsqu'on fait pivoter de 90 degrés tous les vecteurs d'un champ de vecteurs (ce qui correspond à la multiplication par i), on obtient un nouveau champ de vecteurs. Ses courbes intégrales coupent toujours à angle droit celles de l'ancien champ de vecteurs, comme le montre la figure 5. Lorsque le champ de vecteurs est un champ de potentiel, comme dans une région de montagnes, les courbes de niveau de ce paysage de collines sont toujours perpendiculaires aux courbes intégrales du champ de vecteurs. Si l'on combine les deux principes ainsi énoncés, les familles de courbes pourront être représentées par des courbes de niveau. Ceci constitue une aide précieuse, car il est relativement aisé de programmer un ordinateur pour colorer des points situés à la même hauteur (ou appartenant à une zone de hauteur définie).

Le choix approprié de la fonction $u(z)$ permet d'obtenir des courbes aux propriétés données. Si l'on désire avoir un point critique en un point a du plan, il suffira de donner à u une valeur nulle en ce point. On y parvient en remplaçant z par $z - a$ dans la fonction u . Une symétrie dans la loi de formation se traduit généralement par une symétrie dans la famille de courbes.

F. Zauner, E. Zauner et E. Scharnowell ont justement établi cette relation entre les mathématiques et le monde vivant que l'on aimerait tant voir, mais qui n'existe pas si l'on se fonde sur les mathématiques et la biologie. Ils se sont appuyés sur une conception de l'Univers qui s'oppose en de nombreux points à la pensée des naturalistes : l'anthroposophie du philosophe Rudolf Steiner (1861-1925). Scharnowell a ainsi commenté ses dessins (voir la figure 3) :

«Ce qui se passe à droite et à gauche de la médiane verticale est déterminé par une rotation à droite et par une rotation

à gauche, c'est-à-dire déterminé par une polarité droite-gauche... Nous retrouvons également une telle polarité droite-gauche dans la silhouette humaine sous la forme de la symétrie droite-gauche par rapport à un miroir... Au-dessus et au-dessous de la "ligne des étoiles", l'aspect de la figure dépend d'une polarité intérieur-extérieur qui s'exprime sous la forme de courbes sortantes et rentrantes. Cette polarité s'exprime chez l'homme, au-dessus et au-dessous de la ligne de cœur, sous la forme de l'homme des sens et des nerfs (centré au niveau de la tête) et de l'homme du métabolisme et des

membres (dont le centre est situé dans le bas-ventre). Nous trouverons ainsi dans la partie supérieure une tendance à des formes sortantes matérialisées au niveau du crâne par les formations osseuses qui l'entourent, alors que la partie inférieure du corps présente ce mouvement de calice ouvert vers l'extérieur sous la forme du creux du corps qui accueille les organes de la nutrition ainsi que les organes d'excrétion et de reproduction.»

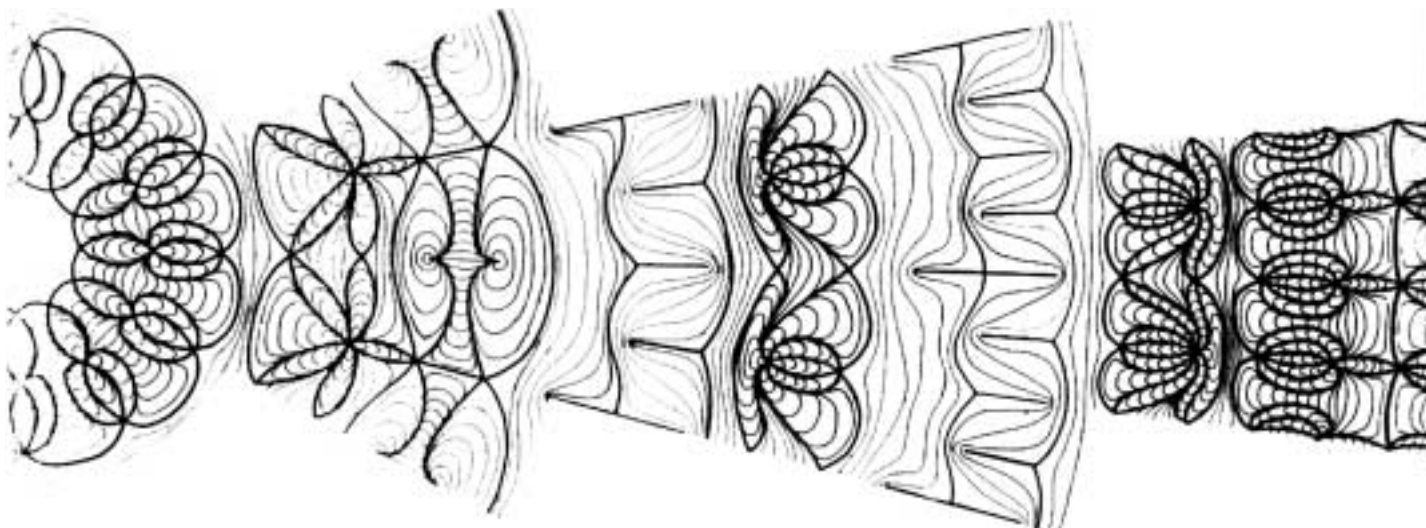
J'essayai prudemment d'intéresser Heidi à ces idées, tout en lui faisant remarquer que j'avais chez moi une collection de ces images vraiment admirables, et



Wilhelm Scharnowell

5. Familles de courbes intégrales de champs de vecteurs complexes. En haut à gauche : $iz^{3/2}(z-5)^{1/2}$. En haut à droite : $z^{5/4+3i}$. En bas à gauche : $z^{7/4}$. Le dernier diagramme comporte deux

familles de courbes orthogonales (superposées) associées au champ de vecteurs $z^{7/2}(z^5-5^5)^{3/2}$ et au même champ multiplié par i . La coloration fait ressortir les symétries engendrées par ces formules.



6. La fonction qui a engendré ce diagramme est un polynôme du degré 158 divisé par un poly-

– Même si un attracteur s'y trouve ?
 – Le point situé à l'extérieur ne le ressent pas. L'attraction est une propriété qui ne peut être ressentie qu'à proximité immédiate de l'attracteur.»

Heidi esquissa un pas de recul.

«Mais si l'intégralité de la courbe fermée constituait un attracteur ?

– Comment cela se pourrait-il ?

– La courbe de résolution graphique s'enroule en une spirale toujours plus resserrée autour de l'attracteur, jusqu'à ce qu'on ne puisse finalement plus la distinguer de lui. Un peu comme une boule qui tomberait dans une rigole circulaire : s'il n'y avait pas de frottement, elle tournerait éternellement.

– C'est comme pour l'échidné, s'exclama de nouveau la collègue de Heidi (voir *Les échidnés*, par Peggy Rismiller et Roger Seymour, *Pour la Science*, avril 1991). Les mâles tournent autour d'une femelle prête à l'accouplement et finissent par creuser un sillon circulaire. Ils continuent à tourner jusqu'à ce que l'un d'entre eux prenne le dessus dans cette cohue, et qu'il...»

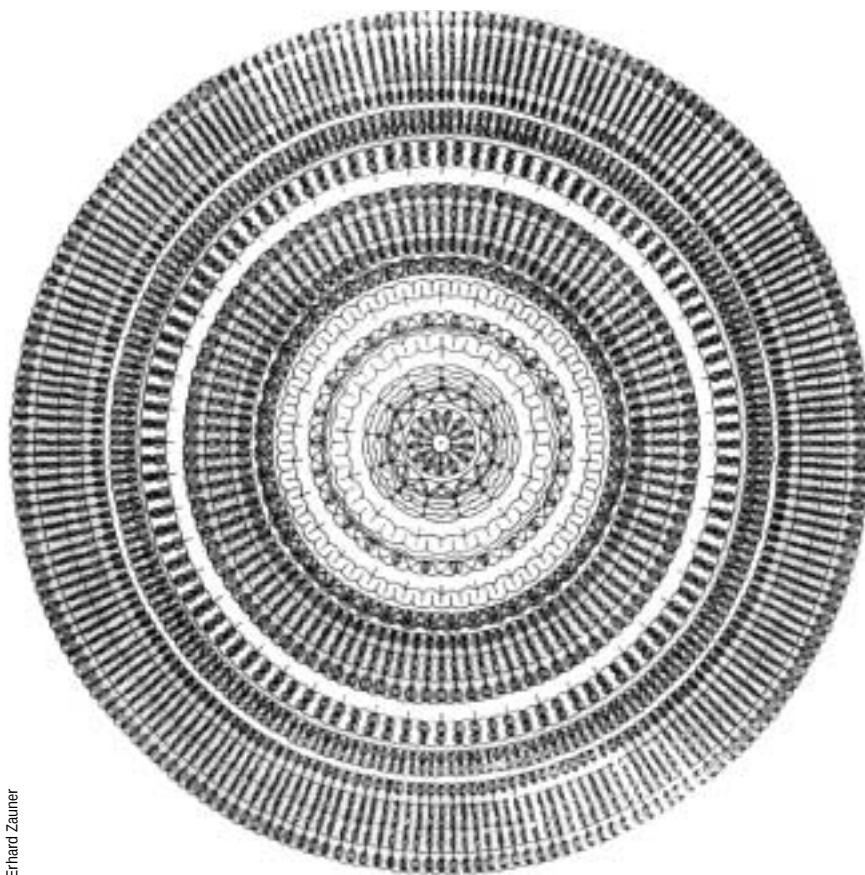
J'essayais de changer de sujet :

«La situation semble analogue, mais je crains qu'elle ne puisse pas s'expliquer en terme de champs de vecteurs. Si un domaine du plan est dépourvu de tout point critique et qu'à la périphérie de ce domaine, aucune flèche ne pointe vers l'extérieur, alors chaque solution doit tendre vers une courbe refermée sur elle-même.

– Et alors ?

– Cela pourrait devenir intéressant.

Si toutes les flèches sont dirigées vers un point, le système adopte à la longue cet état, quel que soit l'état dans lequel il se trouvait auparavant ou quelles que soient les perturbations subies. Le nombre des animaux devient à la longue constant. Si la courbe n'atteint pas un tel état d'équi-



Erhard Zauner

lui demandai si elle ne voulait pas venir les voir un jour.

Elle ne voulut même pas savoir où j'habitais. Elle en était revenue à la vie des animaux de Terre-Neuve, de sorte que je dus reprendre le train en marche :

«Imagine qu'une des courbes du champ de vecteurs du plan lynx-lièvres se referme sur elle-même.

– Comment cela ?

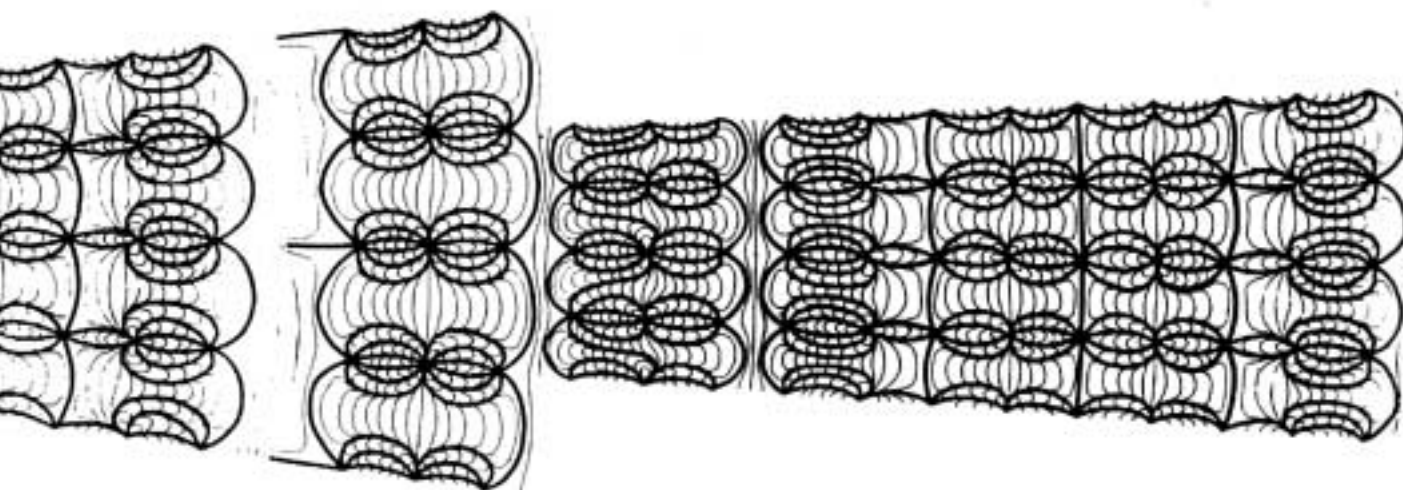
– Essaie d'abord de te le représenter. La démonstration viendra plus tard.

– Bon, admettons. mais ne m'impose pas quelque chose d'aussi repoussant qu'une démonstration.

– D'accord. Une courbe fermée divise le plan en une zone intérieure et une zone extérieure, et aucune des courbes qui appartiennent au champ de vecteurs ne peut passer de l'intérieur à l'extérieur ou vice versa.

– Comment cela ?

– Les familles de courbes qui appartiennent au même champ de vecteurs ne peuvent pas se croiser, car il existerait, au point de croisement, deux tangentes distinctes. Par conséquent, celui qui se trouve à l'extérieur d'une courbe fermée et qui suit le champ de vecteurs ne peut jamais passer à l'intérieur.



nôme de degré 156. Dessin à la main, exécuté par Erhard Zauner. La figure de gauche montre le motif complet, et la partie supérieure décrit

l'agrandissement d'un secteur qui permet de vérifier que les courbes intégrales couvrent effectivement la totalité du plan sans aucune lacune.

libre, ni ne disparaît vers l'infini, elle devra forcément se dérouler quelque part dans le plan lynx-lièvres.

– Cela va donner un drôle de graffiti.
– Justement pas, car la courbe ne peut pas se recouper. Elle ne peut pas non plus se coller contre elle-même, bien que les tangentes deviendraient égales en pareil cas. Il apparaît donc que cette courbe doit être refermée sur elle-même, et la solution serait alors de nature périodique, car cet état se reproduirait à chaque tour de courbe.

– C'est ce qui expliquerait le mouvement de balancier que l'on observe tous les dix ans entre les lynx et les lièvres ?

– Pour ainsi dire.

– Je n'en reviens pas ! Tu me racontes les histoires les plus absurdes sur des fractions de lièvre par seconde infiniment petites, tu affirmes que le hasard ne joue aucun rôle, tu me gâches le soleil parisien avec tes flèches directionnelles que l'on ne peut pas voir et avec tes points qui ne sont plus attractifs qu'abordés de côté, et tout ce non-sens finit par donner quelque chose qui colle avec la réalité ?
– Cela n'a rien d'étonnant. S'il est vrai que la nature ne cadre que très approximativement avec les théories mathématiques...

– Je dirais plutôt l'inverse...

– ... Il n'en reste pas moins que, dans le cas présent, la solution périodique reste stable, car le système est capable de reprendre son comportement périodique après une perturbation qui n'a pas été trop forte. Si, par exemple, un lièvre échappe de manière imprévisible aux griffes d'un lynx, cela n'aura à la longue aucune conséquence dramatique.

– Et que se passe-t-il si l'on libère d'un coup de nombreux lièvres au moment même où leur population est en train d'augmenter ?

– Alors, le prochain maximum de lièvres sera plus marqué, et le prochain cycle présentera des oscillations plus importantes, mais à la longue, le système s'équilibrera.

– Et si l'on fait la même chose au moment où les lynx sont en force ?

– Alors ils attaqueront les lièvres de plus belle. Et les retardataires seront condamnés à mourir d'inanition. Mais en principe, les règles qui s'appliquent au premier cas restent valables.

– Est-ce que cela veut dire qu'on peut calculer si un écosystème est stable ?

– En principe oui, à condition que le modèle mathématique se rapproche suffisamment de la réalité.

– Mais est-ce que vous, les mathématiciens, vous ne pourriez pas tout simplement partir de la réalité ?

– Nous n'aimons pas cela, c'est trop compliqué. Il nous est beaucoup plus simple de bricoler une théorie et de l'adapter ensuite à la réalité.

– Et si plus de deux espèces animales interviennent ?

– Dans ce cas, les choses se compliquent. La série de solutions périodiques stables n'est valable que dans un espace à deux dimensions. Nous nous retrouvons dans le cas du problème à N corps en mécanique céleste. Un soleil et une planète se déplacent sur des trajectoires bien établies l'un par rapport à l'autre, mais dès qu'un troisième corps céleste entre dans la danse, le chaos menace !»

La collègue d'Heidi vint nous rejoindre et commença à nous expliquer de manière détaillée comment deux mâles échidnés se disputaient les femelles. Je dus me faire à l'idée que Heidi ne se serait de toute façon pas intéressée à l'apparence remarquable d'un attracteur en trois dimensions – qui ne serait en fait ni bidimensionnel, ni tridimensionnel, mais se situerait

quelque part entre les deux, tout comme l'attracteur en forme de papillon de Lorenz, entre-temps devenu célèbre. Toujours est-il que de telles quantités sont définies dans le jargon spécialisé comme *étrange*.

Pendant que je subissais ma leçon de choses sur l'échidné, Heidi avait brusquement disparu. Avait-elle pris la fuite de peur d'entendre d'autres mathématiques ? Je dévalai les escaliers quatre à quatre et m'enfonçai sous terre jusqu'à la station de métro – pour la voir monter dans une rame et assister à la fermeture des portes du wagon...

Le métro parisien constitue un cas typique de solution périodique du problème de transport à courte distance. Afin de conserver sa stabilité à la solution et d'éviter que les voyageurs pressés ne retardent le départ en se précipitant au dernier moment, l'accès à certains quais est pourvu de portillons automatiques. C'est ainsi qu'on évite des perturbations qui risqueraient d'influencer trop profondément le système.

Je restais là, planté sur le quai, en me disant que je n'étais qu'une perturbation d'un système périodique qui était arrivée au mauvais moment.

Christoph PÖPPE est journaliste à la revue *Spektrum der Wissenschaft*.

Earl A. CODDINGTON ET **Norman LEVINSON**, *Theory of Ordinary Differential Equation*, McGraw-Hill, 1955.

Martin BRAUN, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, éditions Springer, 1991.

Edward BELTRAMI, *Von Krebsen und Kriminellen*, Vieweg, Brunswick / Wiesbaden, 1993.

Wilhelm SCHARNOWELL, *Schaubilder komplexer Funktionen*, à compte d'auteur, Dortmund 1983.

Géologie

Carte géologique de la France au millionième.

Éditions du BRGM, 1996.

La première carte géologique de la France au millionième a été réalisée en 1889, l'année de l'Exposition universelle de Paris ; elle fournissait la première synthèse géologique du territoire français, à une époque où l'exploitation du charbon et des minéraux était active. Quatre éditions lui ont succédé, en 1905, 1933, 1955, 1968, chacune correspondant à un progrès marquant de l'exploitation géologique de notre territoire et de l'interprétation des structures géologiques. Depuis le siècle dernier, la France avait successivement été couverte par des cartes au 1/500 000, au 1/320 000, au 1/80 000 et au 1/50 000. Aujourd'hui on dispose de cartes géologiques détaillées à cette échelle pour 85 pour cent du territoire français ; en vente partout, elles fournissent un inventaire géologique précieux.

La sixième édition est la première qui fasse la synthèse de cette nouvelle couverture géologique, au 1/50 000. Depuis plus de 100 ans, la façon d'aborder les problèmes s'est, naturellement, considérablement modifiée. On est progressivement passé d'une période exploratoire, essentiellement descriptive, à des périodes de plus en plus explicatives, dominées par des concepts renouvelés. Cette sixième édition est la première qui succède à la révolution de la tectonique des plaques et qui essaie de prendre en compte les nombreux modèles géodynamiques qui en ont résulté. Elle correspond donc à une étape importante de l'étude de notre patrimoine minéral.

La nouvelle carte donne immédiatement une impression de nouveauté et de progrès. Les couleurs sont lumineuses et artistiquement contrastées. Les 32 couleurs utilisées pour les roches sédimentaires respectent la succession des teintes adoptée sur le plan international et permettent d'avoir une information immédiate.

On peut la lire de trois façons. C'est d'abord une carte murale qui, à distance, donne une bonne idée d'ensemble de la géologie de la France. C'est ensuite une carte à contours géologiques fins, beaucoup plus précis qu'auparavant ; elle fournit des informations régionales qui la rendent digne d'être emportée sur le

terrain. C'est enfin un document à déchiffrer avec soin, parfois à la loupe, car il contient de nombreuses informations, exprimées par des symboles et par des surcharges. Passons en revue les plus importantes des nouveautés.

Les bassins : des courbes de niveau discrètes indiquent, en tout point, l'épaisseur approximative des sédiments accumulés dans les bassins et dans leur prolongement en mer. On voit ainsi le bassin de Paris se prolonger dans la Manche, et l'on apprécie la forte épaisseur des sédiments du bassin du Sud-Est (jusqu'à dix kilomètres !) et du Tertiaire du golfe du Lion.

Des informations structurales : sommaires dans les éditions précédentes, les informations structurales prennent ici une grande importance ; leur expression est fondée sur l'excellente carte tectonique de la France au millionième, qui fut publiée en 1980. On a d'abord figuré avec soin beaucoup plus de failles, en distinguant, pour la première fois, mais hélas pas systématiquement, les chevauchements, les décrochements et les failles normales, classées par importance dans une certaine mesure. La lecture de la carte s'en trouve améliorée. Les grands charriages apparaissent immédiatement dans les Alpes, où seuls les spécialistes s'y retrouvaient, et, surtout, on voit bien ceux de la chaîne hercynienne, qui s'étendait dans le Sud de l'Europe il y a plus de 300 millions d'années et dont on ne montrait guère, jusqu'à présent, que les aspects pétrographiques, en négligeant totalement la tectonique.

Tout a changé, et, à la suite d'une révolution cartographique, le visage du Massif central a été entièrement modifié. On est enfin en présence d'une chaîne à part entière, avec de grandes nappes de charriage. Ce changement est d'autant plus important que de nouveaux symboles structuraux ont été créés pour la tectonique profonde, concernant les gneiss, les micaschistes et les granites. On a figuré, pour la première fois, la trace de la «foliation» (ou débit en feuillets des roches déformées à chaud). On trouve en outre des indications précieuses sur les roches métamorphiques. Des symboles en distinguent les principaux faciès (schistes verts, schistes bleus, amphibolites, granulites, éclogites), localisant par une étoile la présence de coésite (variété de «quartz» de haute pression), qui s'est formée à plus de 100 kilomètres de profondeur. On localise ainsi les régions où se sont produites des subductions continentales et où l'exhumation des roches profondes a été rapide.

Les granites : ils ont été traités d'une manière nouvelle. Jusqu'alors, on avait

pris l'habitude de réserver les couleurs rouges pour représenter les différentes variétés de granites, sans se préoccuper de leur âge. Ainsi pouvait-on repérer du premier coup d'œil les massifs de granites, mais avec l'inconvénient de n'avoir aucune précision sur leur âge. Différentes nuances de rouge furent utilisées pour donner des informations pétrographiques et géochimiques, et tout le monde s'habitua à cette double signification des couleurs – l'une chronologique pour sédiments, l'autre pétrographique pour granites.

Les auteurs de la nouvelle carte ont innové : ils ont introduit pour les granites 23 couleurs, à signification chronologique, qui se trouvent en compétition avec les 32 couleurs de sédiments. Les teintes vont du brun au rouge, violet pour les granites anciens, et hélas au jaune pour les granites alpins, ce qui ne manquera pas de perturber les géologues, pour qui le jaune correspond, depuis toujours, à des sédiments d'âge tertiaire. Un tableau «radiochronologique» donne la correspondance entre les 23 couleurs de granites et l'échelle en millions d'années. C'est ainsi, par exemple, que la couleur 19 correspond à un intervalle compris entre –305 et –285 millions d'années. En mettant l'accent sur l'âge des granites, cette innovation fournit sans contester une information nouvelle ; toutefois l'essai ne me paraît pas encore concluant, pour les raisons exposées plus loin.

Considérations géodynamiques : pour la première fois, des informations géodynamiques sont exprimées par des symboles superposés aux couleurs des roches plutoniques et volcaniques. On distingue ainsi le magmatisme de l'«extension continentale (qui se manifeste par des fossés d'effondrement), de «marge active» (bordure de continent sous lequel s'enfonce un océan), de l'«accrétion océanique» (qui se produit aux rides médio-océaniques) et d'«orogène de collision» (chaîne qui s'érige quand deux continents entrent en collision, l'un s'enfonçant sous l'autre). Ces indications permettent au lecteur de se raccorder aux modèles géodynamiques en cours. On repère ainsi, rapidement, les nombreux restes de l'océan alpin et les rares témoins des océans hercyniens.

Cependant la notion de collision devrait être explicitée. Dans les Vosges, par exemple, le volcanisme du Carbonifère inférieur est à la fois de «marge active» et de «collision» ; en Corse du Nord, il n'est pas raisonnable d'attribuer le volcanisme extensif du Fango à la collision. Les hésitations sont aggravées par les «cartouches structuraux», qui présentent, à l'échelle du