

d'un phénomène de cavitation, des bulles vides se créant et implosant quand le liquide métallique traversait la pompe. Le physicien Denis Gabor, qui était l'un des meilleurs amis de Szilard à Berlin, rapporta plus tard que la pompe «hurlait comme un chacal». Un autre «témoin auditif» mentionna qu'elle «gémissait comme une sorcière». Korodi, lui, admettait qu'elle faisait un bruit d'eau turbulente. Un rapport final de la Société A.E.G. signale que le bruit dépendait de la force et de la vitesse de la pompe ; quelques modifications, telle une réduction de la tension appliquée au début de chaque course du piston, finirent par réduire le bruit à un niveau acceptable. Ce problème sonore était pourtant mineur : il ne doit pas faire oublier que les ingénieurs avaient réussi à imaginer l'emploi de métaux chimiquement réactifs. Un équipement spécial permettait de remplir la pompe sans oxydation (potentiellement explosive) du sodium et du potassium ; selon Korodi, le réfrigérateur aurait été sans danger, car les métaux liquides étaient enfermés dans un réservoir d'acier inoxydable soudé. De nombreux problèmes avaient été résolus, à l'exception de celui du bruit, quand le premier prototype complet fut construit, après deux ans d'études : le 31 juillet 1931, un réfrigérateur Einstein-Szilard fonctionna en continu au Centre de recherche de la Société A.E.G.

À des fins de comparaison avec les appareils existants, il fut monté dans le châssis d'un réfrigérateur de 120 litres, modèle G40 d'A.E.G. Avec son alliage liquide sodium-potassium et du pentane comme fluide réfrigérant, il consommait 136 watts seulement : l'efficacité était conforme aux calculs, mais la Société A.E.G., affaiblie par la dépression mondiale, jugea ces performances insuffisantes. De surcroît, les améliorations des réfrigérateurs classiques et l'effondrement économique rétrécissaient le marché potentiel ; notamment, le fréon, qui venait d'être présenté aux États-Unis, éliminait le danger des fuites (c'est bien après que l'on a compris que le fréon et les autres chlorofluorocarbures détruisaient l'ozone de la haute atmosphère).

Le travail se poursuivit toutefois pendant un an au Centre de recherches A.E.G., les ingénieurs améliorant les prototypes de pompe, dont ils changèrent le métal liquide : comme



4. ALBERT KORODI (1898-1995) fut chargé par Szilard de mettre au point les prototypes de réfrigérateurs inventés avec Einstein. Il tient dans ses mains le prix Tivadar Puskás de la Société scientifique hongroise des télécommunications, qu'il reçut en 1993.

l'échauffement interne de la pompe était suffisant pour fondre du potassium pur (la température de fusion est de 63 degrés), ils augmentèrent l'efficacité électrique de 16 à 26 pour cent. Toutefois, la Société A.E.G., ravagée par la crise économique, ne voulut pas poursuivre les études. Szilard essaya d'intéresser des constructeurs britanniques et américains, mais sans succès. Puis, en 1932, le Centre de recherches d'A.E.G. fut réduit de moitié, et tous les projets qui n'étaient pas stratégiques furent éliminés. Korodi aida à rédiger le rapport final de 104 pages sur le développement du réfrigérateur Einstein-Szilard : ce document intitulé *A.E.G. Technischer Bericht 689*, fut achevé le 16 août 1932 (l'original fut détruit pendant la Seconde Guerre mondiale, mais Korodi en avait gardé une copie).

Quelques mois après, l'accession d'Adolf Hitler au poste de chancelier marqua la fin de l'âge d'or de la physique à Berlin. Szilard s'envola pour l'Angleterre, puis pour l'Amérique, tandis qu'Einstein trouvait refuge à l'Institut des études avancées de Princeton. Korodi retourna à Budapest, où il trouva du travail à la Division hongroise de la Société *Philips*, s'intéressant aux télécommunications ; il mourut à Budapest le 28 mars 1995.

Physique appliquée

Pendant leurs sept années de collaboration, Szilard et Einstein remplirent plus de 45 demandes de brevets dans six pays. Aucun de leurs réfrigérateurs ne fut finalement commercialisé, mais leurs systèmes étaient d'ingénieuses applications de principes physiques. La pompe Einstein-Szilard était si intéressante et sûre qu'elle fut employée au refroidissement des sur-régénérateurs.

Toutes ces inventions permirent à Szilard de faire la carrière universitaire qu'il souhaitait, en Allemagne ; puis ses économies lui permirent de rester deux années de plus en Angleterre. Grâce à des collègues qui aidaient les scientifiques réfugiés à trouver des emplois à l'université, il en vint à étudier la physique nucléaire et conçut la réaction en chaîne à l'automne 1933. Ainsi les travaux de Szilard sur l'énergie atomique sont dus à l'argent des brevets déposés avec Einstein.

Alors que la couche d'ozone est menacée par les fluides réfrigérants, le problème traité par Szilard et Einstein est d'actualité. Pour ces deux physiciens, les inventions de réfrigérateurs de conception renouvelée furent plus qu'un bref interlude : depuis leur première collaboration en physique jusqu'à leurs efforts ultérieurs pour lutter contre la prolifération des armes nucléaires, les préoccupations scientifiques et l'engagement politique étaient étroitement mêlés.

Gene DANNEN étudie la vie de Leo Szilard depuis 15 ans ; il prépare un livre sur la naissance de l'âge nucléaire.

The Collected Works of Leo Szilard : Scientific Papers, sous la direction de Bernard T. Feld et Gertrud Weiss Szilard, MIT Press, 1972.

Leo Szilard : His Version of the Facts ; Selected Recollections and Correspondence, sous la direction de Spencer R. Weart et Gertrud Weiss Szilard, MIT Press, 1978.

Georg ALEFELD, *Einstein as Inventor*, in *Physics Today*, vol. 3, n° 5, pp. 9-13, mai 1980.

Richard S. BAKER et Manuel J. TESSIER, *Handbook of Electromagnetic Pump Technology*, Elsevier, 1987.

L'auteur propose une page Leo Szilard sur le réseau Internet à l'adresse : <http://www.peak.org/~danneng/szilard.html>

Le petit père Hadamard

LAURENT SCHWARTZ

Prototype du savant distrait, le mathématicien Jacques Hadamard fut au cœur de l'activité mathématique française pendant presque un siècle.

Le génie mathématique de Jacques Hadamard se doublait d'une grande douceur et d'une immense fermeté morale. Républicain, démocrate, il milita en faveur de Dreyfus lorsque celui-ci fut emprisonné (la femme de Dreyfus était née Hadamard), et, plus tard, il fit partie du Comité central de la Ligue des droits de l'homme : habitant dans la rue où la Ligue avait son siège, il assistait à toutes les réunions du lundi soir.

Je l'ai bien connu, car il était le mari d'une sœur de ma grand-mère maternelle. Je peux attester que sa distraction était extrême : un jour qu'Hadamard était parti pour une promenade en montagne, avec sa sœur, il lui proposa de s'asseoir un instant, pendant qu'il irait chercher des fougères, qu'il collectionnait avec passion. Après avoir ainsi herborisé un long moment, il rentra au chalet... ayant complètement oublié sa sœur, qui l'attendait toujours.

Nous verrons que cette distraction ne le quitta jamais, même dans les pires moments, pas plus que sa passion pour les fougères : il avait en permanence, dans sa poche, une loupe qui lui permettait d'identifier les spécimens, et son domicile était envahi par les herbiers.

Il était également passionné de champignons, et il les aimait sans doute autant pour leurs qualités gastronomiques que pour leur intérêt botanique : lors d'un voyage à l'étranger, il profita d'une escale de son avion

aux Açores pour aller chercher des spécimens, qu'il se fit servir au déjeuner ; à son voisin de table, qui lui en demandait, il les refusa, parce que, dit-il, leur identification n'était pas assurée. Sa passion pour la botanique lui faisait regretter que cette discipline ne fût pas enseignée dès l'école, parce qu'elle permettait aux enfants de faire de la science sans posséder les connaissances mathématiques qu'exige la physique, par exemple. Toutefois sa passion botanique ne lui faisait jamais oublier

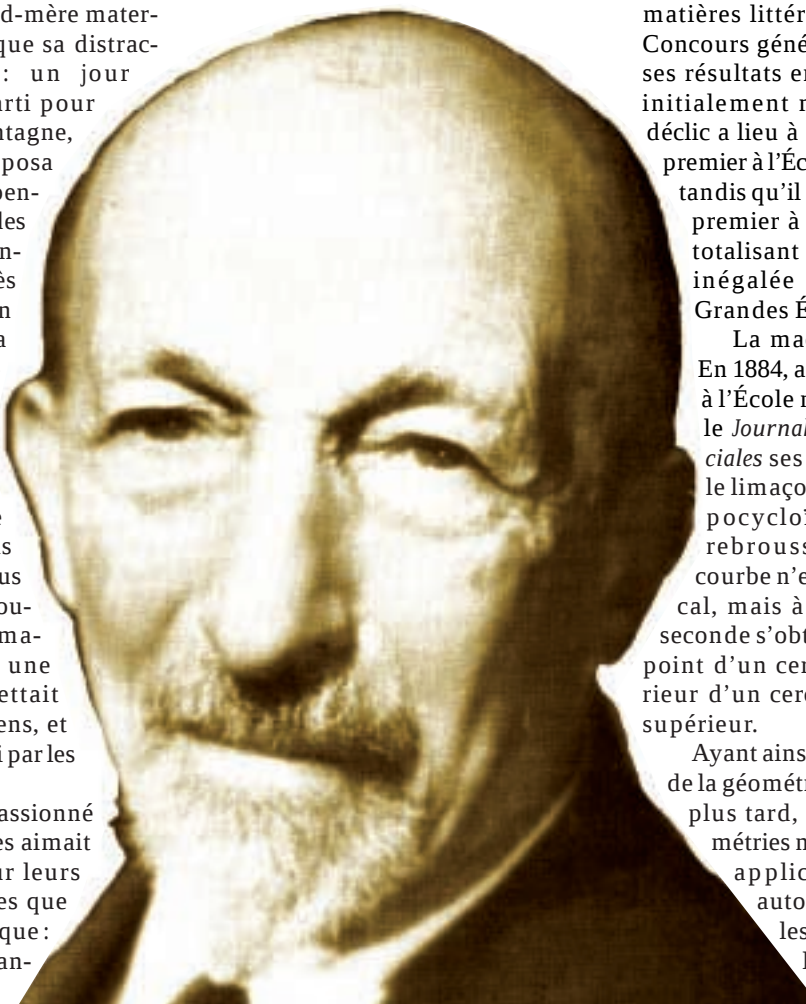
complètement les mathématiques... Car Hadamard était d'abord, et surtout, un très grand mathématicien.

Professeur médiocre, bon chercheur

Il n'avait pas de prédestination particulière pour les mathématiques. Né en 1865 d'un professeur de latin et d'une professeur de piano, Jacques Hadamard est d'abord un élève brillant, mais, alors qu'il excelle dans les matières littéraires (il a des prix du Concours général en grec et en latin), ses résultats en mathématiques sont initialement mauvais. Toutefois le déclin a lieu à temps pour qu'il entre premier à l'École normale supérieure, tandis qu'il est simultanément reçu premier à l'École polytechnique, totalisant une somme de points inégalée dans l'histoire des Grandes Écoles.

La machine est alors lancée. En 1884, alors qu'il n'est qu'élève à l'École normale, il publie dans le *Journal de mathématiques spéciales* ses premiers résultats sur le limaçon de Pascal et sur l'hypocycloïde à trois points de rebroussement : la première courbe n'est pas due à Blaise Pascal, mais à son père Étienne ; la seconde s'obtient en considérant un point d'un cercle qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon trois fois supérieur.

Ayant ainsi commencé par l'étude de la géométrie, il y reviendra 50 ans plus tard, pour évoquer les géométries non euclidiennes et leurs applications aux fonctions automorphes (par exemple, les fonctions définies sur le cercle et de période $\frac{2\pi}{3}$ sont automorphes).



1. JACQUES HADAMARD (1865-1963)

À sa sortie de l'École normale supérieure, Jacques Hadamard enseigne au lycée Buffon jusqu'en 1893, pendant qu'il prépare sa thèse, qu'il passe en 1892. Âgé de 27 ans, ses travaux d'analyse révèlent alors son génie.

Cette thèse porte sur les propriétés des séries de Taylor. Dans le cas de l'ensemble des nombres réels, ces séries sont des sommes de termes de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$. La question essentielle, pour ces séries, est de connaître l'intervalle maximal de centre x_0 (où x_0 est un nombre réel) pour lequel la série de Taylor converge vers la valeur $f(x)$ d'une fonction f ; l'intervalle maximal est nommé intervalle de convergence. Par exemple, à la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ correspond la série de Taylor de centre 0 : $1 + x + x^2/(1 \times 2) + x^3/(1 \times 2 \times 3) + x^4/(1 \times 2 \times 3 \times 4) + \dots$ pour un intervalle de convergence qui est toute la droite des nombres réels.

Hadamard s'intéresse plutôt aux développements en série de Taylor de fonctions holomorphes, c'est-à-dire des fonctions définies sur un ensemble ouvert du plan des nombres complexes et dérivables en tous points de cet ouvert (les nombres complexes sont de la forme $x + iy$, où x et y sont des nombres réels, et où i est tel que $i^2 = -1$; ils peuvent se représenter par les points d'un plan). Il trouve la formule du rayon de convergence (le rayon du plus grand disque du plan où le développement en série de Taylor converge) comme l'inverse de la limite supérieure, pour n tendant vers l'infini, de la racine n -ième des modules des coefficients de la série.

Par exemple, pour la fonction exponentielle étendue aux nombres complexes, le développement en série de Taylor s'écrit, autour de l'origine : $1 + z + z^2/(1 \times 2) + z^3/(1 \times 2 \times 3) + \dots$. Les modules des coefficients sont 1, 1, $1/2$, $1/6$, $1/24$... À cette suite de nombres correspond la suite de leurs racines n -ièmes, qui sont, pour n supérieur ou égal à 1 : $1^{1/1}$, $2^{1/2}$, $3^{1/3}$, $4^{1/4}$... La limite supérieure de cette suite, quand n tend

vers l'infini, est aussi sa limite, égale à 0, de sorte que le rayon de convergence est infini. Il est incroyable qu'il ait fallu attendre Hadamard pour obtenir ce résultat, alors que Taylor lui-même avait étudié les séries qui portent aujourd'hui son nom. Toutefois Hadamard cherche surtout, à partir d'une série de Taylor, à trouver des renseignements sur son prolongement analytique dans le reste du plan complexe. Dans sa thèse, Hadamard s'intéresse aux fonctions que l'on peut prolonger, dans tout le plan complexe, en fonctions méromorphes. Les fonctions

Taylor et son prolongement analytique deviendra la bible de tous ceux qui s'intéressent au sujet.

Toutefois Hadamard est alors enseignant de lycée, et il n'a aucune idée de la difficulté relative des divers sujets mathématiques; il ne parvient pas à se mettre au niveau des élèves. Le proviseur du lycée Buffon envisage des sanctions, mais on sait qu'Hadamard est un grand mathématicien, si bien que, sa thèse passée, le rectorat lui confie un poste d'assistant à l'Université de Bordeaux; il y reste de 1893 à 1897.

Nouvelles fonctions, nouveaux résultats mathématiques : à Bordeaux, Hadamard s'intéresse aux fonctions entières, c'est-à-dire aux fonctions dont le développement en série converge dans tout le plan complexe. Soucieux du comportement à l'infini de telles fonctions, il s'intéresse aux relations entre trois quantités : la décroissance à l'infini des coefficients du développement en série de Taylor de la fonction autour de l'origine; la croissance du maximum du module de la fonction sur des cercles concentriques, centrés sur l'origine, de rayon tendant vers l'infini (les fonctions étudiées associent un nombre complexe $f(z)$ à chaque nombre complexe z ; si on écrit $f(z)$ sous la forme

$x + iy$, leur module est égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$; et la répartition des zéros de la fonction dans le plan complexe (les zéros sont les points où la fonction s'annule).

Les nombres premiers

Ce travail, qui lui vaut le Grand Prix des sciences mathématiques, le conduit vers la théorie des nombres, avec un théorème qui donne la répartition des nombres premiers. Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) avait introduit une fonction nommée fonction *dzêta* qui, à un nombre complexe z , associe la somme $1/1^z + 1/2^z + 1/3^z + \dots$. Bien auparavant, le Suisse Leonhard Euler (1707-



Il fit mieux, un soir qu'il devait conduire deux parentes au bal. A dix heures, l'une de ces dames ayant paru « Mon cousin, dit-elle, il est temps. » Mais Zéphyrin, dont les regards ont rencontré l'ébauche d'un intéressant problème, répond : « Partez devant! Vous ne serez pas au pont Neuf que je vous aurai déjà rattrapées. »

2. LE SAVANT COSINUS, de Christophe, n'a rien à envier à Jacques Hadamard, qui oublia sa sœur en montagne parce qu'il s'était absorbé dans la récolte de fougères.

méromorphes sont des fonctions holomorphes dans un ensemble ouvert du plan complexe, sauf en un nombre discret de points qui sont des pôles; les fonctions méromorphes tendent vers l'infini en chacun de ces pôles. Autour des pôles, on exprime parfois ces fonctions par une série, dite de Laurent, qui comporte à la fois des termes élevés à des puissances positives et négatives : autour d'un pôle z_0 , une fonction f d'une variable complexe z s'écrit en effet : $a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \dots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$. La série tend vers l'infini au point z_0 si le coefficient a_{-k} est non nul; l'ordre du pôle est alors k . La publication intitulée *La série de*

1783) avait observé que cette somme est égale au produit de termes de la forme $1/(1-1/p^2)$, où les p sont les nombres premiers : Euler jetait ainsi un pont entre la géométrie analytique et la théorie des nombres. Reprenant le problème, Riemann observa que tous les zéros de la fonction autres que $-2, -4, -6, -8, \dots$ semblaient avoir une partie réelle égale à $1/2$ (voir la figure 5). Mieux encore, dans le cas où cette hypothèse (aujourd'hui nommée conjecture de Riemann) serait exacte, alors le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre n serait de l'ordre de $n/\log(n)$, pour les valeurs de n tendant vers l'infini.

Hadamard est gêné par la conjecture de Riemann, qui est indémontrée (elle a été vérifiée par ordinateur pour plusieurs millions de zéros, et le mathématicien britannique Godfrey Hardy a démontré qu'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ a $1/2$ comme partie réelle, mais elle reste indémontrée) ; aussi cherche-t-il un moyen de démontrer le théorème de la répartition des nombres premiers qui s'en affranchisse. Il le trouve, en fondant son étude sur des résultats moins ambitieux, mais démontrés, à savoir que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule jamais pour les nombres complexes de la forme $1 + iy$, où y est un nombre réel quelconque. Puis, à l'aide de cette ingénieuse astuce, il démontre le théorème de répartition des nombres premiers (le même théorème est également démontré par Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain).

Naturellement ce théorème ne donne qu'une place approchée du n -ième nombre premier, et la position exacte des nombres premiers ne pourrait être donnée que par une série infinie. Pouvaient-on trouver cette série ? Hadamard se convainc qu'il faudrait disposer d'une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Il poursuit son étude et trouve un théorème de symétrie de la fonction $\zeta(s)$. Son

mémoire est, à nouveau, couronné par l'Académie des sciences.

Ses remarquables capacités ainsi reconnues, il est nommé maître de conférences à la Sorbonne, en 1897. À ce poste, qu'il occupe jusqu'en 1909, il poursuit l'étude des fonctions de la variable complexe et obtient très rapidement ce que l'on nomme aujourd'hui le théorème du minimum de Hadamard : pour toute fonction f d'une variable complexe z , il existe une suite de cercles centrés sur l'origine et de rayon tendant vers l'infini, sur lesquels le minimum du module de la fonction est du même ordre de grandeur que l'inverse du maximum du module de la fonction.

Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, le maximum du module sur le cercle de rayon r est e^r , tandis que le minimum du module est e^{-r} ; dans cet exemple, le minimum du module est exactement égal à l'inverse du maximum du module (e^{-r} est égal à $1/e^r$), et la relation est vraie pour tous les cercles, car la fonction e^z ne s'annule jamais. Cependant, pour d'autres fonc-

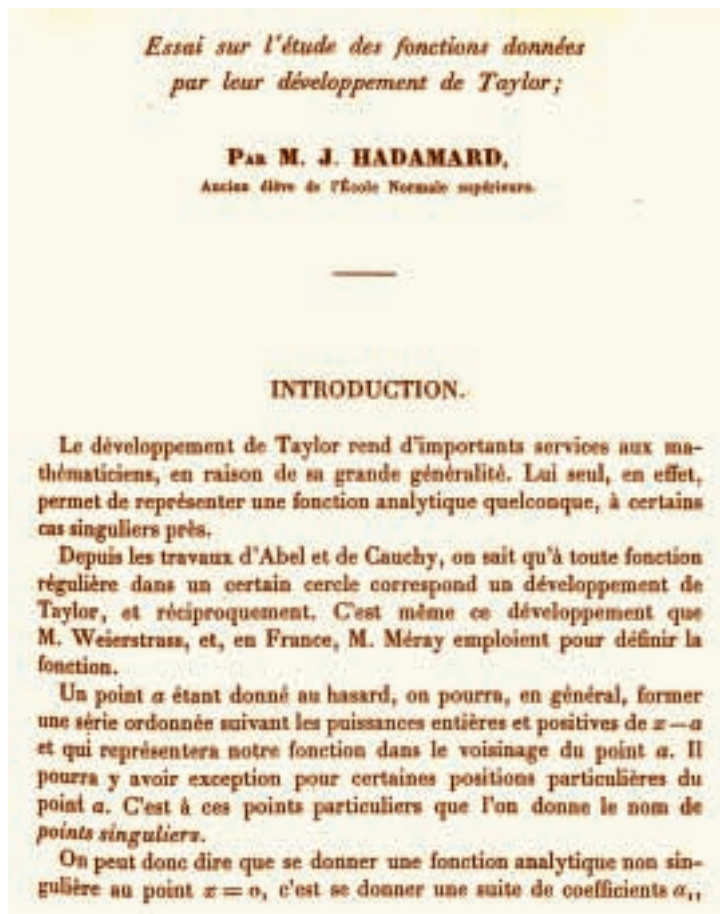
tions, seul le résultat donné par le théorème du minimum subsiste.

Puis, en 1898, un an seulement après sa nomination, il étudie les surfaces de courbure totale négative ayant un nombre fini de nappes s'étendant jusqu'à l'infini (un cylindre d'axe vertical, par exemple, est une surface à deux nappes : un point peut partir vers l'infini soit vers le haut, soit vers le bas ; sa courbure est nulle).

Pour cette étude, il considère les géodésiques, c'est-à-dire les courbes analogues aux grands cercles de la sphère. Sur ces surfaces à courbure totale négative (chacun de leurs points est analogue à une selle de cheval), les géodésiques sont de trois types : soit elles sont fermées ou asymptotiquement proches de courbes fermées ; soit elles s'étendent à l'infini en restant sur une des nappes ; soit des segments entiers de ces géodésiques s'approchent successivement d'une série de géodésiques fermées, la longueur de ces segments croissant jusqu'à l'infini. Hadamard analyse les propriétés de l'ensemble des tangentes aux géodésiques.

Hadamard passe ainsi à la topologie. En fait, il mène plusieurs études de front, puisque, en 1903, il publie ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* : depuis ses contacts avec le physicien Pierre Duhem, à l'Université de Bordeaux, Hadamard s'intéresse à la physique.

À propos de la propagation des ondes et de l'équation des ondes, il met en évidence les comportements différents des ondes dans des espaces de dimensions différentes, montrant notamment une différence importante entre les dimensions paires et impaires : dans les espaces de dimension impaire, tel le nôtre, le son qui est émis à partir d'un point rayonne en restant sur une sphère dont le rayon croît à vitesse régulière (la vitesse du son) ; en revanche, dans les espaces de dimension paire (un plan, par



3. L'UN DES PREMIERS RÉSULTATS notables d'Hadamard porte sur des fonctions données par des séries de Taylor, de la forme $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$

exemple), il remplit toute la boule, et non seulement la surface de la sphère qui la limite.

Ainsi la musique, que pratique Hadamard (il joue du violon) serait différente si notre Univers avait un nombre pair de dimensions ; en fait, les ondes décrites par une équation qui tient compte de phénomènes d'amortissement et de perturbations remplissent toujours la boule, comme dans le cas des dimensions paires. En outre, Hadamard donne un théorème de descente, qui permet de connaître les solutions aux dimensions inférieures, quand on connaît une solution dans une dimension donnée.

Restant dans cette problématique, de 1904 à 1921, il cherche les solutions complètes du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre : en termes physiques, ce problème consiste, par exemple, à chercher la forme d'une corde vibrante, à n'importe quel instant, quand on la lâche, à partir d'une forme imposée, chaque point de la corde étant lancé avec une vitesse imposée et les extrémités restant fixes.

À la Sorbonne, Hadamard expose les résultats de ses recherches, en se souciant toujours de faire part aux étudiants de son idée des problèmes bien posés : un problème est bien posé s'il a une solution et si, de plus, la solution dépend continûment des données ; une petite variation des données ne doit apporter qu'une petite variation des solutions.

Cette question de stabilité le passionne tant qu'elle le conduit à reprendre l'étude des géodésiques des surfaces, en montrant que, si l'on part d'un point avec une petite variation de la direction initiale, cela peut amener le trajet final à varier considérablement. Ainsi Hadamard pose le problème de la stabilité à long terme du Système solaire.

La fondation Silliman de l'Université Yale publie ce travail, dans un livre de 600 pages : *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Cette publication est un peu paradoxale, car l'argent donné par M. Silliman à l'Université Yale doit servir à « instituer annuellement une série de leçons destinées à démontrer la prévoyance, la sagesse et la bonté de Dieu, telles qu'elles se manifestent dans le monde tant naturel que moral. La conviction

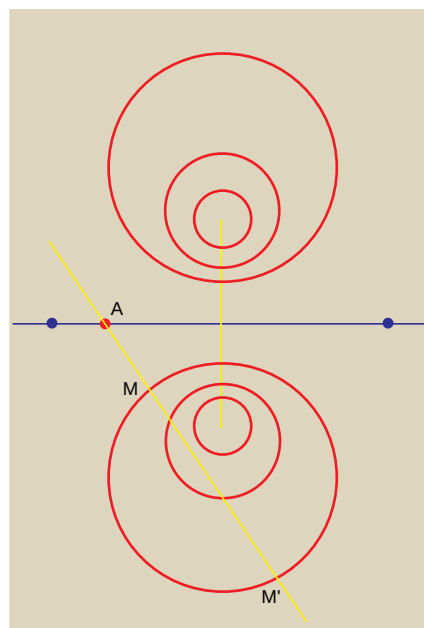
du testateur est que toute présentation bien ordonnée des faits de la nature ou de l'histoire contribue au but de cette fondation plus efficacement que n'importe quelle tentative de développement sur les principes de la doctrine ou de la foi ; et, en conséquence, il a entendu exclure du but de la fondation des leçons de théologie dogmatique ou polémique, et le réserver bien plutôt aux sujets empruntés aux domaines des sciences de la nature ou de l'histoire, tout particulièrement de l'astronomie, de la chimie, de la géologie et de l'anatomie.

Or Hadamard, bien qu'issu d'une famille juive d'Alsace, est absolument athée, et ses mathématiques ne sont ni des sciences de la nature, ni de l'histoire, ni de l'astronomie, ni enfin de la chimie, de la géologie ou de l'anatomie. Qu'importe ! Ce texte est utile à de nombreux mathématiciens, et ma propre théorie des distributions lui doit beaucoup : j'ai passé trois mois de vacances à l'étudier.

Le rayonnement international

Hadamard est au faite de sa gloire quand il est nommé professeur au Collège de France, en 1909. Il y enseigne jusqu'en 1937, en même temps qu'à l'École polytechnique et à l'École centrale. Au Collège de France, la devise de ses séminaires du mardi et du vendredi est : « Généraliser pour simplifier ou pour mieux comprendre ». Parfois Hadamard cite également Poincaré : « Il n'y a pas des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas : il y a des problèmes plus ou moins résolus. » Les plus grands mathématiciens du monde s'honorent de venir présenter leurs travaux ou de commenter ceux d'autrui à ces séminaires. Paul Lévy a indiqué que, pour des étudiants avancés, Hadamard était un remarquable professeur, parce qu'il montrait toujours des mathématiques qu'il avait personnellement étudiées ; il insistait sur les idées générales et sur les erreurs qu'il importait d'éviter.

En contrepartie, il reste un piètre guide pour les jeunes. En 1931, quand il est élu à l'Académie des sciences, je suis en classe de Première et je veux le voir spécialement afin qu'il me conseille. Il me parle de la fonction ζ de Riemann, que je ne connais pas, et de la répartition des nombres

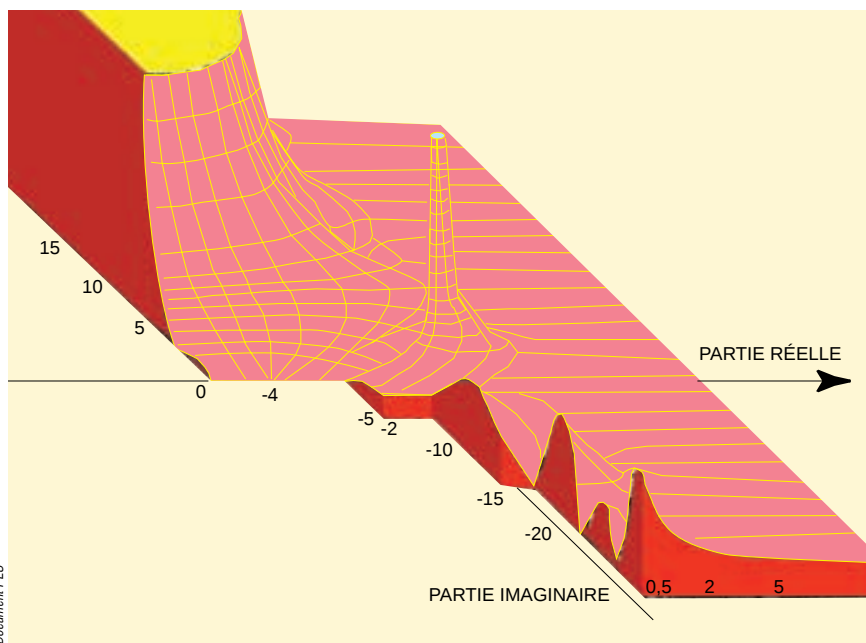


4. LES SIX CERCLES en rouge appartiennent à un même faisceau, dont l'axe radical est la droite bleue : pour chaque point A de la droite, le produit $AM \cdot AM'$ est identique, quel que soit le point A et quelle que soit la droite passant par A et coupant les cercles du faisceau en M et M'. Hadamard utilisa de tels faisceaux de cercles pour construire des points imaginaires (ici en bleu).

premiers. Je ne comprends rien : « Je trouve que tu n'es pas très compétent », me dit-il. L'entretien se poursuit néanmoins, et il aborde ensuite le trinôme du second degré, dont je lui dis la formule des racines par cœur : « Je vois que tu es très savant », remarque-t-il, ce qui me démontre, d'une part, que j'apprendrais difficilement avec lui, et, d'autre part, qu'il ne fait aucune différence entre le simple et le compliqué.

En 1932, il publie un livre monumental, commencé à Bordeaux : un traité de géométrie élémentaire en deux volumes, qui est mon livre de chevet quand je suis en classe de Terminale. Cet ouvrage contient un nombre incroyable de problèmes, mais il y a aussi des erreurs d'axiomatique : par exemple, sans s'en apercevoir, Hadamard démontre que la dimension de l'espace est égale à trois.

Il introduit des points imaginaires du plan, sans faire référence aux nombres imaginaires de l'ensemble des nombres complexes, puisqu'il veut une œuvre purement géométrique. Il considère les couples de cercles : si deux cercles ne se coupent pas (en deux points), définit-il, alors ils se coupent en deux points imaginaires conjugués.



5. LE MODULE de la fonction dzêta de Riemann, définie dans le plan complexe, est indiqué ici par la cote des points de la surface en rose. Cette fonction ne s'annule, pense-t-on, que pour les nombres de partie réelle égale à $1/2$.

gués ; si quatre cercles appartiennent à un même faisceau, alors les couples de cercles définissent les mêmes couples de points imaginaires conjugués. Un faisceau de cercles engendré par deux cercles donnés est l'ensemble des cercles ayant avec l'un quelconque des deux cercles, pour axe radical, l'axe radical des deux cercles ; cet axe radical est la droite qui est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles, la puissance d'un point A par rapport à un cercle étant le produit $AM \cdot AM'$, où M et M' sont les intersections d'une droite passant par le point A et coupant le cercle en deux points.

Si Hadamard avait utilisé des nombres, sa tâche aurait été simplifiée : de même que l'on obtient le plan des nombres complexes en ajoutant aux nombres réels (ensemble R) des nombres imaginaires (le plan C des nombres complexes est ainsi l'ensemble des nombres de la forme $R + iR$), il aurait pu ajouter au plan $R \times R$, les nombres $iR \times R$ pour former l'ensemble $(R \times R) + i(R \times R)$.

Cependant il veut qu'aucune coordonnée, aucune relation analytique, aucune trigonométrie ne vienne «troubler» ce beau monument géométrique. Cédant à l'entêtement de l'époque, il fait ainsi quelque chose de monumental sous une forme acrobatique.

Enfin, en 1937, après avoir publié plus de 300 textes mathématiques, il part à la retraite, à l'âge de 72 ans : les pro-

fesseurs au Collège de France prennent normalement leur retraite à 70 ans, mais ses deux enfants morts pendant la Première Guerre mondiale lui valent ces deux années supplémentaires. La Seconde Guerre mondiale éclate alors, et il doit quitter la France. Prévoyant de partir pour les États-Unis, en transitant par l'Espagne, il séjourne d'abord à Toulouse, ainsi que mes parents.

Cosinus jusqu'au bout

Avec l'âge, sa distraction ne s'améliore pas : un jour, avec mon frère Bertrand, il va acheter des œufs chez un marchand qui ne consent qu'à vendre six œufs par foyer. Hadamard n'appartient pas au même foyer que celui de mes parents, mais il y a un risque que le marchand refuse de donner six œufs à Bertrand et six œufs à Hadamard, de sorte que mon grand-oncle et mon frère sont convenus qu'ils feront comme s'ils ne se connaissent pas. Toutefois, lors du trajet pour aller à la boutique, il tutoie mon frère sans cesse et, même chez le commerçant, il continue de lui parler. C'est seulement en quittant la boutique que, se souvenant soudain des précautions convenues, il dit à mon frère : «Au revoir, cher Monsieur, enchanté d'avoir fait votre connaissance». Il part, pendant que mon frère reste atterré dans la boutique, craignant de ne pas être servi. Pis encore, après quelques mètres, il

revient sur ses pas, ayant à nouveau oublié les conventions, et dit à Bertrand : «Au fait, tu diras à ta mère de...»

Peu après, ayant difficilement obtenu son visa américain, il finit par quitter la France, arrive en Espagne au terme d'un voyage compliqué et... s'aperçoit qu'il a oublié son visa. Il faut reprendre les formalités.

Aux États-Unis, il trouve difficilement un poste, car beaucoup de savants allemands y sont déjà réfugiés. Dans une université, il est reçu par le président, qui lui exprime la difficulté de lui donner une chaire. Hadamard lui montre alors des photographies accrochées au mur ; il y est représenté : n'est-ce pas un titre suffisant à pouvoir enseigner ? Le président lui demande quelques jours de réflexion, mais, quand Hadamard revient, on lui notifie qu'aucun poste n'est disponible... et il observe que sa photographie a disparu du mur. Tristes moments...

Finalement, Hadamard est accueilli à New York, où il attend la fin de la guerre avant de revenir en France. Sur la fin de sa vie, il continue de s'intéresser à l'histoire, à l'épistémologie, publiant de nombreux articles sur l'invention, sur l'histoire des mathématiques, sur l'enseignement. Il croit à l'intuition, compare les impressions de Poincaré à ce qu'il a ressenti. Son essai sur ce sujet est imprimé en 1945 aux États-Unis.

Le «petit père Hadamard», comme les mathématiciens le nomment avec respect et admiration (dans *Les Mots*, Sartre a fait une erreur en prétendant que l'on ne qualifie de «père» que des personnes vieilles et pauvres), reste alerte et actif, s'engageant politiquement pour de nombreuses causes. Comme il est presque communiste (ses enfants le sont ardemment), il fait partie d'une délégation de savants français invités en Union soviétique avec Élie Cartan et Pierre Joliot-Curie. Lors d'une visite du Musée de la Révolution, à Moscou, il s'étonne de ne voir aucune mention de Trotsky. Il lui est répondu que Trotsky était un traître, qui ne doit donc pas figurer dans le musée. «Oui, mais il a joué un rôle dans la révolution. Est-ce un musée des récompenses, ou un musée de la révolution ?» Joliot-Curie lui dit qu'il est naïf de croire qu'il pourrait réformer le régime soviétique, mais Hadamard lui répond que Trotsky serait

dans le musée si tout le monde avait réagi. Jusqu'à la fin de sa vie, il assiste également à de nombreux séminaires Bourbaki, ce groupe de jeunes mathématiciens qui, au sortir de la guerre, veulent fonder les mathématiques sur des bases axiomatiques assurées. Hadamard pose invariablement des questions en fin d'exposé, afin de vérifier ses interprétations de la terminologie utilisée par les orateurs : les mathématiques ont tant changé, depuis la fin du XIX^e siècle !

Il est également souvent invité à l'étranger, et, au cours d'un épique voyage en Chine, il promet à ses hôtes d'écrire pour ce pays un livre sur les équations aux dérivées partielles. Il le commence à l'âge de 80 ans, mais, dix ans après, il n'en est qu'au huitième des 22 chapitres prévus, et il est si préoccupé qu'il n'en dort plus et que sa vie est un enfer. Sa femme me demande d'intervenir ; la discussion dure plusieurs heures, après lesquelles il consent à envoyer son manuscrit en l'état. Les huit chapitres réalisés partent alors pour la Chine dans un paquet non recommandé et mal ficelé, sans photocopie ; le paquet mettra plusieurs mois à arriver, et le livre paraîtra après sa mort.

Soulagé, il peut ainsi continuer à se réjouir du succès de ses élèves : Lagrange avait dit : « Il est doux de voir pousser dans le jardin d'autrui les plantes dont on a semé les graines. » Hadamard ajoutait : « Rien ne peut être plus précieux pour le savant que de se sentir dépassé dans les chemins mêmes qu'il a commencé à tracer. »

En 1962, toutefois, il perd sa femme et son petit-fils, tandis que sa fille Cécile est déjà décédée. Alors que je suis à New York, il m'écrit qu'il est triste et qu'il a perdu l'envie de vivre. Il décède peu après, en 1963, à l'âge de 98 ans et demi, laissant une œuvre immense, portant sur des sujets remarquablement variés.

Laurent SCHWARTZ est mathématicien ; il a reçu la médaille Fields en 1950.

Inventeurs et scientifiques, dictionnaire de biographies, éditions Larousse, 1994.

Dictionary of Scientific Biographies, éditions Scribners.

Dictionnaire des mathématiques, Alain Bouvier et Michel George, sous la direction de François Le Lionnais. Presses Universitaires de France, 1979.

Le centenaire du théorème des nombres premiers

MICHEL BALAZARD

En 1896, Jacques Hadamard, à Bordeaux, et Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain, démontrent indépendamment le théorème des nombres premiers. C'est l'événement principal d'une aventure scientifique commencée il y a plus de deux millénaires.

Les nombres premiers sont les nombres entiers naturels supérieurs à 1 et divisibles seulement par eux-mêmes et par 1. Leur importance se manifeste par le théorème fondamental de l'arithmétique : tout nombre entier s'écrit de manière unique, à l'ordre près des facteurs, comme produit de nombres premiers ; ainsi 126 est égal au produit $2 \times 3 \times 3 \times 7$. Euclide démontre au livre IX des *Éléments* que les nombres premiers sont en nombre infini : si $a, b, c, \dots$ sont des nombres premiers, alors $a \times b \times c \dots + 1$ est premier ou admet un diviseur premier différent de $a, b, c, \dots$. On pressent ainsi, dans ce théorème antique, la théorie analytique des nombres : l'étude de l'interaction des deux opérations fondamentales, addition et multiplication, ainsi que le conflit entre les structures qu'elles définissent.

Comment identifier les nombres premiers ? Ératosthène, bibliothécaire à Alexandrie, découvrit le crible qui porte son nom et qui permet de faire la liste des nombres premiers inférieurs à une borne définie. On commence par écrire à la suite tous les nombres entiers inférieurs à la borne fixée, et on balaie la liste de la façon suivante : on garde 2 et on barre tous ses multiples ; on garde 3 et on barre tous ses multiples ; etc. Les nombres qui ne sont pas barrés sont les nombres premiers, dont la contemplation n'a cessé de provoquer perplexité et inspiration. Comment distinguer une structure, une loi sous-jacente à l'apparent désordre des nombres premiers ?

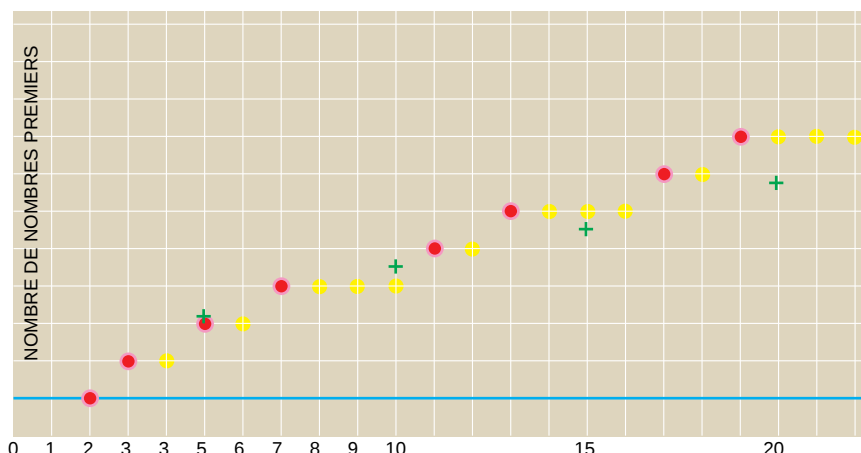
Après Euclide, la première avancée fut celle de Leonhard Euler, le « Prince des mathématiciens », qui démontra en 1737 que la somme des inverses des nombres entiers n est égale au produit de termes de la forme $1/(1 - 1/p)$, où les nombres p sont les nombres pre-

miers ; comme on sait, par ailleurs, que la somme des inverses des nombres entiers est infinie, le produit des termes $1/(1 - 1/p)$ l'est aussi, ce qui revient à dire que la somme des inverses des nombres premiers est infinie.

Le théorème fondamental de l'arithmétique est condensé dans l'égalité d'Euler. Comme l'a écrit André Weil, cette formule marque la naissance de la théorie analytique des nombres. On nomme aujourd'hui produit eulérien toute égalité de ce type entre une somme où interviennent les nombres entiers et un produit où figurent les nombres premiers.

Le résultat d'Euler ouvre la voie pour les généralisations suivantes. La première publication où figure une conjecture précise concernant la répartition des nombres premiers semble être l'*Essai sur la théorie des nombres*, d'Adrien-Marie Legendre : en 1798, ce dernier annonce que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n , quantité qu'il note $\pi(n)$, doit être de la forme $An/(B \log(n) + C)$. Il affirmera cette conjecture en 1808 en écrivant $\pi(n) = n/(\log(n) - 1,08366)$.

Auparavant, vers 1792, Carl Friedrich Gauss avait été conduit à une conjecture similaire en comptant les nombres premiers dans les tranches successives de 1 000 nombres entiers, ainsi qu'il l'écrivit dans une lettre à l'astronome allemand Johann Encke, en 1848 : Gauss conjecturait que la densité de nombres premiers proches de n est approximativement $1/\log(n)$, de sorte qu'une bonne approximation de $\pi(n)$ doit être donnée par l'intégrale de $1/\log(x)$, quand x est compris entre 0 et n (c'est ce que l'on nomme le logarithme intégral). Qu'on suive Gauss ou Legendre, on arrive à la conclusion que



Le nombre de nombres premiers entre 1 et un nombre quelconque n est approximativement égal à $n/\log(n)$ (croix vertes) ; le quotient de ces deux nombres tend vers un (droite bleue). Cette loi constitue le théorème des nombres premiers. Il fut démontré par Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée-Poussin, en 1896.

le rapport de $\pi(n)$ et de $n/\log(n)$ doit tendre vers 1, quand n tend vers l'infini. C'est cet énoncé que l'on nomme le théorème des nombres premiers.

Un siècle après Euler, en 1837, Peter-Gustav Lejeune-Dirichlet réussit à généraliser en profondeur le raisonnement du mathématicien suisse pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $a.n + b$, où a et b n'ont pas de facteur commun : par exemple, il existe une infinité de nombres premiers dans la suite 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37... parce qu'elle s'écrit $5n + 7$, 5 et 7 étant premiers entre eux.

Si ce résultat n'apporte rien en ce qui concerne le théorème des nombres premiers, le mémoire de Dirichlet représente un progrès méthodologique considérable, notamment parce qu'il inaugure l'utilisation en arithmétique des séries dont le terme général est la somme, pour n compris entre 1 et l'infini, de termes a_n / n^z (z est un nombre complexe) et qui sont aujourd'hui nommées séries de Dirichlet.

Le pas suivant est fait par Pafnouti Lvovitch Tchébychev, dans deux mémoires parus en 1852. Il montre que la formule de Legendre ne peut pas être asymptotiquement vérifiée quand n tend vers l'infini : la constante 1,08366 doit être remplacée par 1 et, en un certain sens, seul le logarithme intégral permet d'approcher correctement $\pi(n)$. Pour compter le nombre de nombres premiers, il définit la fonction $\theta(n)$ égale à la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à n . Puis il donne des encadrements numériquement explicites de $\theta(n)$, dont une conséquence frappante est le postulat de Bertrand :

pour n supérieur à 3, il existe toujours un nombre premier supérieur à n et inférieur à $2n - 2$ (par exemple, entre 6 et 10, on trouve le nombre premier 7).

En 1859 paraît l'article de Bernhard Riemann *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* («Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné») : en quelques pages, Riemann établit un programme de travail pour les décennies à venir ; il montre l'importance fondamentale de la série de Dirichlet dont les coefficients sont tous égaux à 1 : $1 + 1/2^z + 1/3^z + 1/4^z \dots$. L'idée nouvelle est d'étudier cette fonction (aujourd'hui nommée fonction *dzêta*, ζ) dans le plan des nombres complexes : Riemann montre qu'elle a alors de remarquables propriétés de symétrie, et il étudie les nombres complexes z qui vérifient $\zeta(z) = 0$ (ce sont les «zéros» de la fonction *dzêta*), en écrivant une formule qui relie la fonction π et ces zéros.

Les démonstrations sont seulement esquissées, mais Riemann établit une nette différence entre les assertions pour lesquelles il a réuni un faisceau d'arguments qui lui semblent suffisants, et qui seront effectivement démontrés avant la fin du XIX^e siècle, et une conjecture selon laquelle les zéros de partie réelle positive ont tous une partie réelle égale à $1/2$: «Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude». C'est l'hypothèse de Riemann, qui est aujourd'hui le problème ouvert le plus célèbre des mathématiques.

L'article de Riemann a eu une profonde influence sur le développement des mathématiques. Pour démontrer les affirmations qu'il contient, il a fallu mettre au point des pans entiers d'analyse mathématique. Ainsi, la théorie des fonctions entières, c'est-à-dire des séries qui convergent dans tout le plan complexe, s'édifie à partir de 1876 avec les travaux de Carl Weierstrass (1815-1897), d'Edmond Laguerre (1834-1886), de Henri Poincaré (1854-1912), et de Jacques Hadamard, qui obtient le Grand Prix des sciences mathématiques avec son mémoire *Étude sur les propriétés des fonctions entières, et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, paru en 1893.

Dans son mémoire de 1893, Hadamard démontre la décomposition de la fonction *dzêta* en produit de facteurs qui dépendent de ses zéros, ce qui, au vu de l'écriture de *dzêta* comme produit eulérien, établit une correspondance remarquable entre les nombres premiers et les zéros de la fonction *dzêta*.

En 1895, H. von Mangoldt en déduit une formule explicite pour la fonction de Tchébychev $\theta(n)$. Malheureusement, sans information suffisante sur la répartition des zéros de la fonction *dzêta*, on ne peut en déduire la relation asymptotique qui constituerait le théorème des nombres premiers.

Il appartient à Hadamard et à la Vallée-Poussin de conclure. Chez l'un comme chez l'autre, la démonstration comporte deux parties : d'abord prouver que la fonction *dzêta* n'a pas de zéro dont la partie réelle serait égale à 1 ; puis en déduire le théorème des nombres premiers. En revanche, les deux mathématiciens parviennent à ces fins par des raisonnements très différents. L'assertion concernant les zéros de la fonction *dzêta* est l'objet d'une démonstration courte et élégante, par Hadamard.

Un siècle après, où en est la théorie des nombres premiers ? Tout d'abord, il a fallu exposer les résultats de 100 années de recherche et les ordonner en une théorie cohérente. En 1909, Edmund Landau développe en un millier de pages les conquêtes du XIX^e siècle, en y incorporant de nombreux résultats et simplifications. En 1932, A. Ingham fait preuve de plus de concision et insiste sur les avancées importantes du premier tiers du XX^e siècle.

Ensuite a lieu une importante réflexion critique sur les démonstrations originales de 1896 : les seuls élé-

ments nécessaires à l'énoncé du théorème des nombres premiers sont l'arithmétique élémentaire et la notion de limite de l'analyse réelle. Il était donc naturel de chercher une démonstration élémentaire de ce théorème ; après une contribution importante de Norbert Wiener en 1932, comme corollaire de sa théorie générale, c'est en 1949 qu'on eut la réponse, positive, par Paul Erdős et Atle Selberg.

Une deuxième question fondamentale est de discerner parmi les propriétés des nombres entiers celles qui sont essentielles pour obtenir la loi de répartition des nombres premiers. Arne Beurling a ainsi fondé en 1938 la théorie des nombres premiers généralisés et des nombres entiers généralisés : les nombres premiers généralisés sont les suites de nombres réels tendant vers l'infini, et les nombres entiers généralisés sont les nombres réels que l'on forme en multipliant entre eux les nombres premiers généralisés. A. Beurling a établi que les nombres premiers généralisés vérifient le théorème des nombres premiers quand les nombres entiers généralisés ont une répartition suffisamment régulière.

Après Hadamard et la Vallée-Poussin, de nombreux mathématiciens ont tenté de dessiner les limites de la régularité de la répartition des nombres premiers. Le premier théorème d'oscillation fut l'œuvre de John Littlewood qui, en 1914, infirma une conjecture de Gauss en démontrant que $\pi(n) - \text{li}(n)$ change de signe une infinité de fois quand n tend vers l'infini. Plus récemment, dans les années 1980, Helmut Maier a montré que la densité des nombres premiers entre n et $n + \log(n)^s$ n'est pas équivalente à $1/\log(n)$ quand n tend vers l'infini, cela pour tout nombre s fixé.

Notre siècle a surtout revisité le crible d'Ératosthène et précisé considérablement le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique. Toutefois, 138 ans après sa formulation, l'hypothèse de Riemann, indémontrée, reste un obstacle au développement de la théorie des nombres premiers.

Michel BALAZARD est mathématicien à l'Université de Bordeaux.

Gérald TENENBAUM et Michel MENDÈS-FRANCE, *Les nombres premiers*. Que sais-je?, P.U.F. (à paraître)

La sûreté des ascenseurs

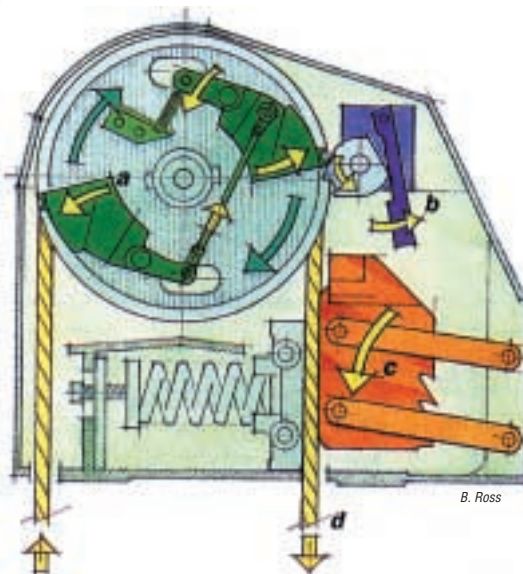
En 1854, à l'exposition du Crystal Palace de New York, Elisha Graves Otis descendait au-dessus de la foule sur une plate-forme lorsqu'un assistant coupa le câble auquel celle-ci était accrochée. Le «parachute» inventé par Otis empêcha la plate-forme de tomber. Trois ans plus tard, le premier ascenseur, mû par la vapeur, transportait des passagers dans le magasin *E. V. Haughwout & Company* de New York.



Otis Elevator Company

LE LIMITEUR DE VITESSE

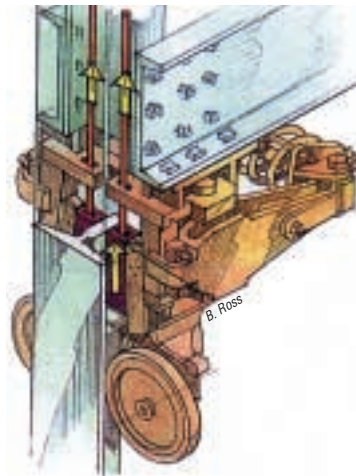
Lorsque la vitesse de descente d'un ascenseur dépasse une limite prédéfinie, des masses articulées sur un disque en rotation s'écartent de l'axe (a) sous l'effet de la force centrifuge et actionnent un loquet (b) qui libère à son tour une mâchoire mobile (c). En tombant, la mâchoire bloque le câble du limiteur (d).



B. Ross

LA SÛRETÉ

Si l'action du limiteur de vitesse ne ralentit pas assez la chute de la cabine, une sûreté est enclenchée. La tension du câble du limiteur actionne une tringlerie fixée sur la cabine. Une paire de coins est alors libérée : leur blocage sur le rail de guidage arrête la cabine.



B. Ross

L'usage du treuil est ancien. Cet appareil a facilité la tâche des constructeurs des pyramides égyptiennes et celle des bâtisseurs de cathédrales du Moyen Âge. Toutefois,

faute d'un mécanisme de freinage de sécurité efficace, ces premiers ascenseurs étaient peu sûrs et aucun passager ne s'y aventurait. Tout changea en mai 1854 : Elisha Graves Otis présenta le premier système mécanique, nommé parachute, qui, à l'aide de ressorts et de pièces de serrage, prévient la chute libre de la cabine.

Les mécanismes de sûreté des ascenseurs ont été beaucoup améliorés depuis. Néanmoins, les principes mis au point par Otis sont toujours en usage, même dans les plus hauts immeubles du monde. Dans les ascenseurs modernes, si la cabine descend trop vite, un limiteur de vitesse coupe le courant électrique et enclenche un frein. Si la cabine ne s'arrête pas, une sûreté située sous la cabine est activée : des coins viennent serrer les rails de guidage. La cabine s'arrête alors en moins de deux secondes.

Ce parachute fait de l'ascenseur l'un des moyens de transport les plus sûrs. Les 440 000 ascenseurs installés en France transportent sans dommages 100 millions de passagers par jour.

William SHEERAN, Société Otis