

exemple), il remplit toute la boule, et non seulement la surface de la sphère qui la limite.

Ainsi la musique, que pratique Hadamard (il joue du violon) serait différente si notre Univers avait un nombre pair de dimensions ; en fait, les ondes décrites par une équation qui tient compte de phénomènes d'amortissement et de perturbations remplissent toujours la boule, comme dans le cas des dimensions paires. En outre, Hadamard donne un théorème de descente, qui permet de connaître les solutions aux dimensions inférieures, quand on connaît une solution dans une dimension donnée.

Restant dans cette problématique, de 1904 à 1921, il cherche les solutions complètes du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre : en termes physiques, ce problème consiste, par exemple, à chercher la forme d'une corde vibrante, à n'importe quel instant, quand on la lâche, à partir d'une forme imposée, chaque point de la corde étant lancé avec une vitesse imposée et les extrémités restant fixes.

À la Sorbonne, Hadamard expose les résultats de ses recherches, en se souciant toujours de faire part aux étudiants de son idée des problèmes bien posés : un problème est bien posé s'il a une solution et si, de plus, la solution dépend continûment des données ; une petite variation des données ne doit apporter qu'une petite variation des solutions.

Cette question de stabilité le passionne tant qu'elle le conduit à reprendre l'étude des géodésiques des surfaces, en montrant que, si l'on part d'un point avec une petite variation de la direction initiale, cela peut amener le trajet final à varier considérablement. Ainsi Hadamard pose le problème de la stabilité à long terme du Système solaire.

La fondation Silliman de l'Université Yale publie ce travail, dans un livre de 600 pages : *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Cette publication est un peu paradoxale, car l'argent donné par M. Silliman à l'Université Yale doit servir à « instituer annuellement une série de leçons destinées à démontrer la prévoyance, la sagesse et la bonté de Dieu, telles qu'elles se manifestent dans le monde tant naturel que moral. La conviction

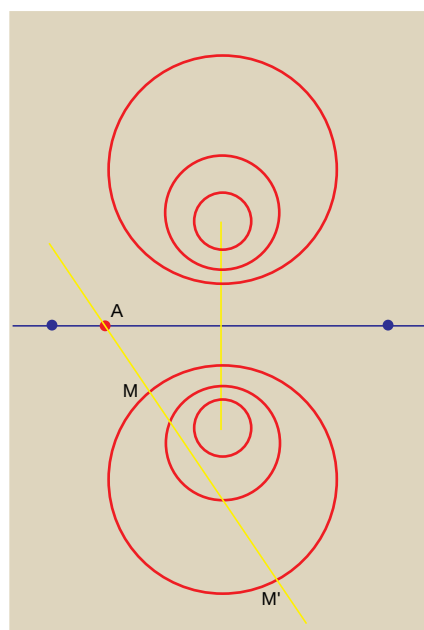
du testateur est que toute présentation bien ordonnée des faits de la nature ou de l'histoire contribue au but de cette fondation plus efficacement que n'importe quelle tentative de développement sur les principes de la doctrine ou de la foi ; et, en conséquence, il a entendu exclure du but de la fondation des leçons de théologie dogmatique ou polémique, et le réserver bien plutôt aux sujets empruntés aux domaines des sciences de la nature ou de l'histoire, tout particulièrement de l'astronomie, de la chimie, de la géologie et de l'anatomie.

Or Hadamard, bien qu'issu d'une famille juive d'Alsace, est absolument athée, et ses mathématiques ne sont ni des sciences de la nature, ni de l'histoire, ni de l'astronomie, ni enfin de la chimie, de la géologie ou de l'anatomie. Qu'importe ! Ce texte est utile à de nombreux mathématiciens, et ma propre théorie des distributions lui doit beaucoup : j'ai passé trois mois de vacances à l'étudier.

Le rayonnement international

Hadamard est au faite de sa gloire quand il est nommé professeur au Collège de France, en 1909. Il y enseigne jusqu'en 1937, en même temps qu'à l'École polytechnique et à l'École centrale. Au Collège de France, la devise de ses séminaires du mardi et du vendredi est : « Généraliser pour simplifier ou pour mieux comprendre ». Parfois Hadamard cite également Poincaré : « Il n'y a pas des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas : il y a des problèmes plus ou moins résolus. » Les plus grands mathématiciens du monde s'honorent de venir présenter leurs travaux ou de commenter ceux d'autrui à ces séminaires. Paul Lévy a indiqué que, pour des étudiants avancés, Hadamard était un remarquable professeur, parce qu'il montrait toujours des mathématiques qu'il avait personnellement étudiées ; il insistait sur les idées générales et sur les erreurs qu'il importait d'éviter.

En contrepartie, il reste un piètre guide pour les jeunes. En 1931, quand il est élu à l'Académie des sciences, je suis en classe de Première et je veux le voir spécialement afin qu'il me conseille. Il me parle de la fonction ζ de Riemann, que je ne connais pas, et de la répartition des nombres

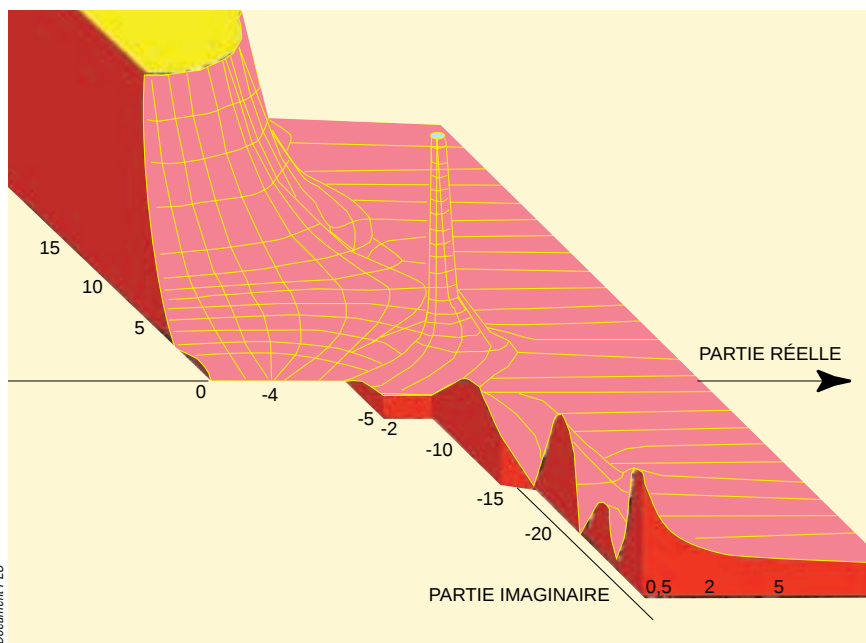


4. LES SIX CERCLES en rouge appartiennent à un même faisceau, dont l'axe radical est la droite bleue : pour chaque point A de la droite, le produit $AM \cdot AM'$ est identique, quel que soit le point A et quelle que soit la droite passant par A et coupant les cercles du faisceau en M et M'. Hadamard utilisa de tels faisceaux de cercles pour construire des points imaginaires (ici en bleu).

premiers. Je ne comprends rien : « Je trouve que tu n'es pas très compétent », me dit-il. L'entretien se poursuit néanmoins, et il aborde ensuite le trinôme du second degré, dont je lui dis la formule des racines par cœur : « Je vois que tu es très savant », remarque-t-il, ce qui me démontre, d'une part, que j'apprendrais difficilement avec lui, et, d'autre part, qu'il ne fait aucune différence entre le simple et le compliqué.

En 1932, il publie un livre monumental, commencé à Bordeaux : un traité de géométrie élémentaire en deux volumes, qui est mon livre de chevet quand je suis en classe de Terminale. Cet ouvrage contient un nombre incroyable de problèmes, mais il y a aussi des erreurs d'axiomatique : par exemple, sans s'en apercevoir, Hadamard démontre que la dimension de l'espace est égale à trois.

Il introduit des points imaginaires du plan, sans faire référence aux nombres imaginaires de l'ensemble des nombres complexes, puisqu'il veut une œuvre purement géométrique. Il considère les couples de cercles : si deux cercles ne se coupent pas (en deux points), définit-il, alors ils se coupent en deux points imaginaires conjugués.



5. LE MODULE de la fonction ζ de Riemann, définie dans le plan complexe, est indiqué ici par la cote des points de la surface en rose. Cette fonction ne s'annule, pense-t-on, que pour les nombres de partie réelle égale à $1/2$.

gués ; si quatre cercles appartiennent à un même faisceau, alors les couples de cercles définissent les mêmes couples de points imaginaires conjugués. Un faisceau de cercles engendré par deux cercles donnés est l'ensemble des cercles ayant avec l'un quelconque des deux cercles, pour axe radical, l'axe radical des deux cercles ; cet axe radical est la droite qui est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles, la puissance d'un point A par rapport à un cercle étant le produit $AM \cdot AM'$, où M et M' sont les intersections d'une droite passant par le point A et coupant le cercle en deux points.

Si Hadamard avait utilisé des nombres, sa tâche aurait été simplifiée : de même que l'on obtient le plan des nombres complexes en ajoutant aux nombres réels (ensemble R) des nombres imaginaires (le plan C des nombres complexes est ainsi l'ensemble des nombres de la forme $R + iR$), il aurait pu ajouter au plan $R \times R$, les nombres $iR \times R$ pour former l'ensemble $(R \times R) + i(R \times R)$.

Cependant il veut qu'aucune coordonnée, aucune relation analytique, aucune trigonométrie ne vienne «troubler» ce beau monument géométrique. Cédant à l'entêtement de l'époque, il fait ainsi quelque chose de monumental sous une forme acrobatique.

Enfin, en 1937, après avoir publié plus de 300 textes mathématiques, il part à la retraite, à l'âge de 72 ans : les pro-

fesseurs au Collège de France prennent normalement leur retraite à 70 ans, mais ses deux enfants morts pendant la Première Guerre mondiale lui valent ces deux années supplémentaires. La Seconde Guerre mondiale éclate alors, et il doit quitter la France. Prévoyant de partir pour les États-Unis, en transitant par l'Espagne, il séjourne d'abord à Toulouse, ainsi que mes parents.

Cosinus jusqu'au bout

Avec l'âge, sa distraction ne s'améliore pas : un jour, avec mon frère Bertrand, il va acheter des œufs chez un marchand qui ne consent qu'à vendre six œufs par foyer. Hadamard n'appartient pas au même foyer que celui de mes parents, mais il y a un risque que le marchand refuse de donner six œufs à Bertrand et six œufs à Hadamard, de sorte que mon grand-oncle et mon frère sont convenus qu'ils feront comme s'ils ne se connaissent pas. Toutefois, lors du trajet pour aller à la boutique, il tutoie mon frère sans cesse et, même chez le commerçant, il continue de lui parler. C'est seulement en quittant la boutique que, se souvenant soudain des précautions convenues, il dit à mon frère : «Au revoir, cher Monsieur, enchanté d'avoir fait votre connaissance». Il part, pendant que mon frère reste atterré dans la boutique, craignant de ne pas être servi. Pis encore, après quelques mètres, il

revient sur ses pas, ayant à nouveau oublié les conventions, et dit à Bertrand : «Au fait, tu diras à ta mère de...»

Peu après, ayant difficilement obtenu son visa américain, il finit par quitter la France, arrive en Espagne au terme d'un voyage compliqué et... s'aperçoit qu'il a oublié son visa. Il faut reprendre les formalités.

Aux États-Unis, il trouve difficilement un poste, car beaucoup de savants allemands y sont déjà réfugiés. Dans une université, il est reçu par le président, qui lui exprime la difficulté de lui donner une chaire. Hadamard lui montre alors des photographies accrochées au mur ; il y est représenté : n'est-ce pas un titre suffisant à pouvoir enseigner ? Le président lui demande quelques jours de réflexion, mais, quand Hadamard revient, on lui notifie qu'aucun poste n'est disponible... et il observe que sa photographie a disparu du mur. Tristes moments...

Finalement, Hadamard est accueilli à New York, où il attend la fin de la guerre avant de revenir en France. Sur la fin de sa vie, il continue de s'intéresser à l'histoire, à l'épistémologie, publiant de nombreux articles sur l'invention, sur l'histoire des mathématiques, sur l'enseignement. Il croit à l'intuition, compare les impressions de Poincaré à ce qu'il a ressenti. Son essai sur ce sujet est imprimé en 1945 aux États-Unis.

Le «petit père Hadamard», comme les mathématiciens le nomment avec respect et admiration (dans *Les Mots*, Sartre a fait une erreur en prétendant que l'on ne qualifie de «père» que des personnes vieilles et pauvres), reste alerte et actif, s'engageant politiquement pour de nombreuses causes. Comme il est presque communiste (ses enfants le sont ardemment), il fait partie d'une délégation de savants français invités en Union soviétique avec Élie Cartan et Pierre Joliot-Curie. Lors d'une visite du Musée de la Révolution, à Moscou, il s'étonne de ne voir aucune mention de Trotsky. Il lui est répondu que Trotsky était un traître, qui ne doit donc pas figurer dans le musée. «Oui, mais il a joué un rôle dans la révolution. Est-ce un musée des récompenses, ou un musée de la révolution ?» Joliot-Curie lui dit qu'il est naïf de croire qu'il pourrait réformer le régime soviétique, mais Hadamard lui répond que Trotsky serait

dans le musée si tout le monde avait réagi. Jusqu'à la fin de sa vie, il assiste également à de nombreux séminaires Bourbaki, ce groupe de jeunes mathématiciens qui, au sortir de la guerre, veulent fonder les mathématiques sur des bases axiomatiques assurées. Hadamard pose invariablement des questions en fin d'exposé, afin de vérifier ses interprétations de la terminologie utilisée par les orateurs : les mathématiques ont tant changé, depuis la fin du XIX^e siècle !

Il est également souvent invité à l'étranger, et, au cours d'un épique voyage en Chine, il promet à ses hôtes d'écrire pour ce pays un livre sur les équations aux dérivées partielles. Il le commence à l'âge de 80 ans, mais, dix ans après, il n'en est qu'au huitième des 22 chapitres prévus, et il est si préoccupé qu'il n'en dort plus et que sa vie est un enfer. Sa femme me demande d'intervenir ; la discussion dure plusieurs heures, après lesquelles il consent à envoyer son manuscrit en l'état. Les huit chapitres réalisés partent alors pour la Chine dans un paquet non recommandé et mal ficelé, sans photocopie ; le paquet mettra plusieurs mois à arriver, et le livre paraîtra après sa mort.

Soulagé, il peut ainsi continuer à se réjouir du succès de ses élèves : Lagrange avait dit : « Il est doux de voir pousser dans le jardin d'autrui les plantes dont on a semé les graines. » Hadamard ajoutait : « Rien ne peut être plus précieux pour le savant que de se sentir dépassé dans les chemins mêmes qu'il a commencé à tracer. »

En 1962, toutefois, il perd sa femme et son petit-fils, tandis que sa fille Cécile est déjà décédée. Alors que je suis à New York, il m'écrit qu'il est triste et qu'il a perdu l'envie de vivre. Il décède peu après, en 1963, à l'âge de 98 ans et demi, laissant une œuvre immense, portant sur des sujets remarquablement variés.

Laurent SCHWARTZ est mathématicien ; il a reçu la médaille Fields en 1950.

Inventeurs et scientifiques, dictionnaire de biographies, éditions Larousse, 1994.

Dictionary of Scientific Biographies, éditions Scribners.

Dictionnaire des mathématiques, Alain Bouvier et Michel George, sous la direction de François Le Lionnais. Presses Universitaires de France, 1979.

Le centenaire du théorème des nombres premiers

MICHEL BALAZARD

En 1896, Jacques Hadamard, à Bordeaux, et Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain, démontrent indépendamment le théorème des nombres premiers. C'est l'événement principal d'une aventure scientifique commencée il y a plus de deux millénaires.

Les nombres premiers sont les nombres entiers naturels supérieurs à 1 et divisibles seulement par eux-mêmes et par 1. Leur importance se manifeste par le théorème fondamental de l'arithmétique : tout nombre entier s'écrit de manière unique, à l'ordre près des facteurs, comme produit de nombres premiers ; ainsi 126 est égal au produit $2 \times 3 \times 3 \times 7$. Euclide démontre au livre IX des *Éléments* que les nombres premiers sont en nombre infini : si $a, b, c, \dots$ sont des nombres premiers, alors $a \times b \times c \dots + 1$ est premier ou admet un diviseur premier différent de $a, b, c, \dots$. On pressent ainsi, dans ce théorème antique, la théorie analytique des nombres : l'étude de l'interaction des deux opérations fondamentales, addition et multiplication, ainsi que le conflit entre les structures qu'elles définissent.

Comment identifier les nombres premiers ? Ératosthène, bibliothécaire à Alexandrie, découvrit le crible qui porte son nom et qui permet de faire la liste des nombres premiers inférieurs à une borne définie. On commence par écrire à la suite tous les nombres entiers inférieurs à la borne fixée, et on balaie la liste de la façon suivante : on garde 2 et on barre tous ses multiples ; on garde 3 et on barre tous ses multiples ; etc. Les nombres qui ne sont pas barrés sont les nombres premiers, dont la contemplation n'a cessé de provoquer perplexité et inspiration. Comment distinguer une structure, une loi sous-jacente à l'apparent désordre des nombres premiers ?

Après Euclide, la première avancée fut celle de Leonhard Euler, le « Prince des mathématiciens », qui démontra en 1737 que la somme des inverses des nombres entiers n est égale au produit de termes de la forme $1/(1 - 1/p)$, où les nombres p sont les nombres pre-

miers ; comme on sait, par ailleurs, que la somme des inverses des nombres entiers est infinie, le produit des termes $1/(1 - 1/p)$ l'est aussi, ce qui revient à dire que la somme des inverses des nombres premiers est infinie.

Le théorème fondamental de l'arithmétique est condensé dans l'égalité d'Euler. Comme l'a écrit André Weil, cette formule marque la naissance de la théorie analytique des nombres. On nomme aujourd'hui produit eulérien toute égalité de ce type entre une somme où interviennent les nombres entiers et un produit où figurent les nombres premiers.

Le résultat d'Euler ouvre la voie pour les généralisations suivantes. La première publication où figure une conjecture précise concernant la répartition des nombres premiers semble être l'*Essai sur la théorie des nombres*, d'Adrien-Marie Legendre : en 1798, ce dernier annonce que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n , quantité qu'il note $\pi(n)$, doit être de la forme $An/(B \log(n) + C)$. Il affirmera cette conjecture en 1808 en écrivant $\pi(n) = n/(\log(n) - 1,08366)$.

Auparavant, vers 1792, Carl Friedrich Gauss avait été conduit à une conjecture similaire en comptant les nombres premiers dans les tranches successives de 1 000 nombres entiers, ainsi qu'il l'écrivit dans une lettre à l'astronome allemand Johann Encke, en 1848 : Gauss conjecturait que la densité de nombres premiers proches de n est approximativement $1/\log(n)$, de sorte qu'une bonne approximation de $\pi(n)$ doit être donnée par l'intégrale de $1/\log(x)$, quand x est compris entre 0 et n (c'est ce que l'on nomme le logarithme intégral). Qu'on suive Gauss ou Legendre, on arrive à la conclusion que