

ments nécessaires à l'énoncé du théorème des nombres premiers sont l'arithmétique élémentaire et la notion de limite de l'analyse réelle. Il était donc naturel de chercher une démonstration élémentaire de ce théorème ; après une contribution importante de Norbert Wiener en 1932, comme corollaire de sa théorie générale, c'est en 1949 qu'on eut la réponse, positive, par Paul Erdős et Atle Selberg.

Une deuxième question fondamentale est de discerner parmi les propriétés des nombres entiers celles qui sont essentielles pour obtenir la loi de répartition des nombres premiers. Arne Beurling a ainsi fondé en 1938 la théorie des nombres premiers généralisés et des nombres entiers généralisés : les nombres premiers généralisés sont les suites de nombres réels tendant vers l'infini, et les nombres entiers généralisés sont les nombres réels que l'on forme en multipliant entre eux les nombres premiers généralisés. A. Beurling a établi que les nombres premiers généralisés vérifient le théorème des nombres premiers quand les nombres entiers généralisés ont une répartition suffisamment régulière.

Après Hadamard et la Vallée-Poussin, de nombreux mathématiciens ont tenté de dessiner les limites de la régularité de la répartition des nombres premiers. Le premier théorème d'oscillation fut l'œuvre de John Littlewood qui, en 1914, infirma une conjecture de Gauss en démontrant que $\pi(n) - \text{li}(n)$ change de signe une infinité de fois quand n tend vers l'infini. Plus récemment, dans les années 1980, Helmut Maier a montré que la densité des nombres premiers entre n et $n + \log(n)^s$ n'est pas équivalente à $1/\log(n)$ quand n tend vers l'infini, cela pour tout nombre s fixé.

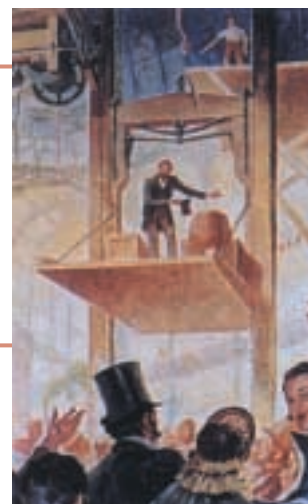
Notre siècle a surtout revisité le crible d'Ératosthène et précisé considérablement le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique. Toutefois, 138 ans après sa formulation, l'hypothèse de Riemann, indémontrée, reste un obstacle au développement de la théorie des nombres premiers.

Michel BALAZARD est mathématicien à l'Université de Bordeaux.

Gérald TENENBAUM et Michel MENDÈS-FRANCE, *Les nombres premiers*. Que sais-je?, P.U.F. (à paraître)

La sûreté des ascenseurs

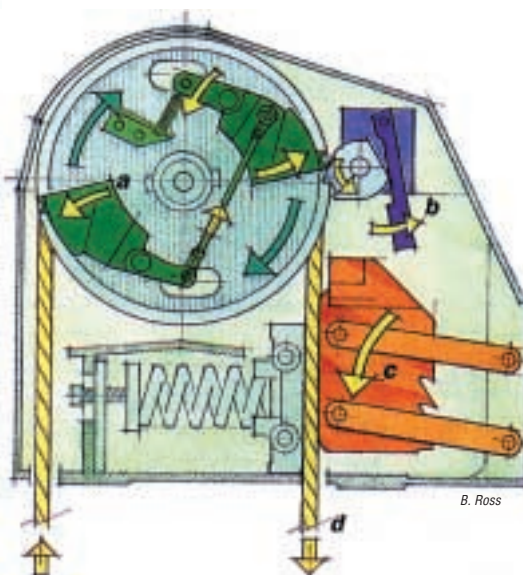
En 1854, à l'exposition du Crystal Palace de New York, Elisha Graves Otis descendait au-dessus de la foule sur une plate-forme lorsqu'un assistant coupa le câble auquel celle-ci était accrochée. Le «parachute» inventé par Otis empêcha la plate-forme de tomber. Trois ans plus tard, le premier ascenseur, mû par la vapeur, transportait des passagers dans le magasin *E. V. Haughwout & Company* de New York.



Otis Elevator Company

LE LIMITEUR DE VITESSE

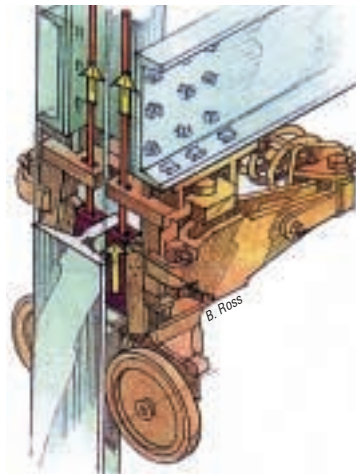
Lorsque la vitesse de descente d'un ascenseur dépasse une limite prédéfinie, des masses articulées sur un disque en rotation s'écartent de l'axe (a) sous l'effet de la force centrifuge et actionnent un loquet (b) qui libère à son tour une mâchoire mobile (c). En tombant, la mâchoire bloque le câble du limiteur (d).



B. Ross

LA SÛRETÉ

Si l'action du limiteur de vitesse ne ralentit pas assez la chute de la cabine, une sûreté est enclenchée. La tension du câble du limiteur actionne une tringlerie fixée sur la cabine. Une paire de coins est alors libérée : leur blocage sur le rail de guidage arrête la cabine.



B. Ross

L'usage du treuil est ancien. Cet appareil a facilité la tâche des constructeurs des pyramides égyptiennes et celle des bâtisseurs de cathédrales du Moyen Âge. Toutefois,

faute d'un mécanisme de freinage de sécurité efficace, ces premiers ascenseurs étaient peu sûrs et aucun passager ne s'y aventurait. Tout changea en mai 1854 : Elisha Graves Otis présenta le premier système mécanique, nommé parachute, qui, à l'aide de ressorts et de pièces de serrage, prévient la chute libre de la cabine.

Les mécanismes de sûreté des ascenseurs ont été beaucoup améliorés depuis. Néanmoins, les principes mis au point par Otis sont toujours en usage, même dans les plus hauts immeubles du monde. Dans les ascenseurs modernes, si la cabine descend trop vite, un limiteur de vitesse coupe le courant électrique et enclenche un frein. Si la cabine ne s'arrête pas, une sûreté située sous la cabine est activée : des coins viennent serrer les rails de guidage. La cabine s'arrête alors en moins de deux secondes.

Ce parachute fait de l'ascenseur l'un des moyens de transport les plus sûrs. Les 440 000 ascenseurs installés en France transportent sans dommages 100 millions de passagers par jour.

William SHEERAN, Société Otis

Du courant dans les roches

PASCAL BERNARD

On détecte les courants électriques dans les roches afin de prévoir les séismes.

Des courants électriques dans le sous-sol permettraient-ils de prévoir les éruptions volcaniques et les séismes ? Dès 1794, l'Italien Filomarino, duc de La Torre, a recherché de tels signaux à l'aide d'un électromètre qu'il promenait sur les pentes du Vésuve en éruption. Il a fallu près de deux siècles pour que des expériences effectuées en laboratoire relancent les recherches des géophysiciens sur le terrain ; dans les régions sismiques, ils tentent d'extraire les signes électriques avant-coureurs des séismes.

Cette recherche a été ravivée par l'observation d'un potentiel électrique entre les deux faces d'une roche où circule un courant d'eau. Les sels dissous dans l'eau des pores ou des fissures libèrent des ions positifs et négatifs ; dans certaines roches, les ions porteurs d'une charge particulière se fixent à la surface des grains solides, laissant dans le liquide un excédent d'ions de charge électrique opposée. L'eau qui circule dans la matrice perméable déplace ces ions en solution, mais pas les ions associés aux grains, et le déplacement de ces particules chargées engendre un courant électrique. Expérimentalement on mesure ainsi

qu'une eau modérément chargée de sels, poussée à travers une roche perméable par une différence de pression de une atmosphère, produit une tension électrique de quelques dizaines de millivolts. L'intensité du courant électrique est proportionnelle à la vitesse d'écoulement et, donc, à la différence de pression entre les faces d'entrée et de sortie de l'eau.

Depuis une vingtaine d'années, de nombreuses expériences de laboratoire sur des roches de différents types – granites, calcaires, grès, basaltes, etc. – et de différentes perméabilités – pores, fissures – ont affiné et quantifié cette théorie. Cet effet d'électrofiltration n'est pas une création artificielle de laboratoire : il a été révélé depuis plusieurs décennies dans la nature par des prospections qui employaient des couples d'électrodes enterrées, distantes de plusieurs dizaines, voire plusieurs milliers de mètres ; en outre, il semble lié aux fortes circulations d'eau sur les pentes des massifs montagneux ou dans les sites hydrothermaux. Toutefois cette corrélation reste qualitative, en raison de notre ignorance des écoulements souterrains. De plus, ces effets sont parfois fortement perturbés, voire masqués par le bruit électro-

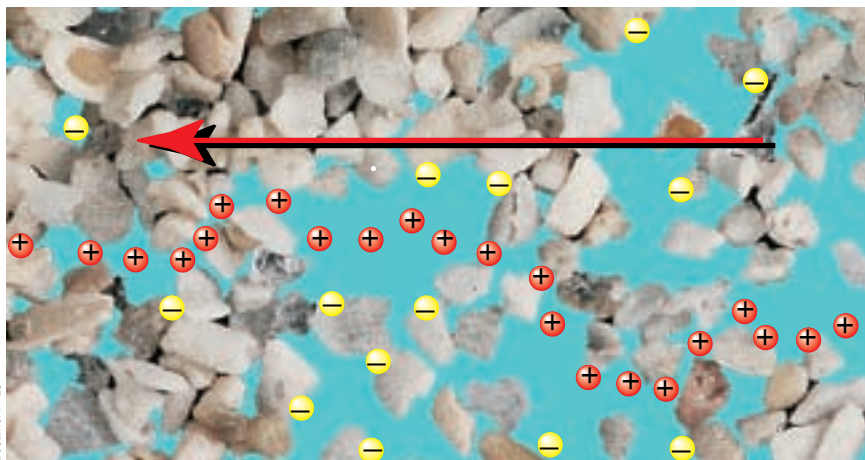
tellurique naturel, qui atteint quelques millivolts à quelques centaines de millivolts par kilomètre. Les sources de ce bruit sont variées : pour l'essentiel, ce sont les courants électriques dans l'ionosphère, à 70 kilomètres d'altitude au-dessus du site, eux-mêmes engendrés par les particules chargées provenant du Soleil et par les orages atmosphériques de la planète ; des orages locaux peuvent avoir aussi une influence directe.

Malgré ces bruits naturels, et malgré les parasites artificiels – trains, lignes électriques, industries, etc. –, des géophysiciens curieux ont installé des lignes électrotelluriques dans nombre d'endroits sismiques de la planète et enregistré des perturbations de potentiel avant des séismes, notamment au Japon et en Grèce. Bien que les corrélations observées soient faibles, ces perturbations ont souvent été pressenties comme des signaux précurseurs des séismes. Des mécanismes variés ont été proposés pour les expliquer, tels des effets piézo-électriques liés aux variations de contrainte tectonique, mais l'électrofiltration reste le mécanisme privilégié, car c'est celui qui transformerait le plus efficacement de l'énergie mécanique en énergie électrique, au sein de l'écorce terrestre, baignée d'eau.

Les corrélations avec les séismes, si elles ne sont pas fortuites, résulteraient donc de fortes perturbations des circulations d'eau souterraine avant les séismes. Comme la nucléation de la rupture sismique sur une faille se produit à une dizaine de kilomètres sous la surface, les circulations de fluides précurseurs, qui seraient déclenchées par des déformations aisé-miques rapides ou par la fracturation hydraulique entre aquifères à des pressions différentes, s'effectueraient à ces profondeurs. Comment le champ électrique associé est-il alors détectable en surface, alors qu'il décroît avec le cube de la distance ? Des instabilités de fluides, plus proches de la surface, seraient-elles alors déclenchées par ces mêmes déformations profondes ? Ce seraient sans doute des sources électriques moins puissantes...

DU LABORATOIRE AU TERRAIN

D'autre part, nous n'avons qu'une vague idée de l'importance de ces phénomènes à l'échelle de la croûte terrestre. Les seules expériences bien contrôlées concernent des échantillons de roches de quelque dix centimètres de long, avec une mesure de l'effet électrocinétique entre les faces de l'échantillon, directement là où se produit le courant (voir la figure 2) ; or les géophysiciens s'intéressent à des sources bien plus grandes, qui atteignent des centaines, voire des milliers de mètres.



1. Le mécanisme de l'électrofiltration : les ions négatifs restent fixés aux grains des roches, tandis que les ions positifs sont entraînés avec l'eau.

Pour mieux cerner ces phénomènes électrocinétiques en vraie grandeur, et passer du qualitatif au quantitatif, une équipe associant l'Institut de physique du Globe de Paris, l'École normale supérieure, le Commissariat à l'énergie atomique et le Centre de géophysique de Garchy a organisé une première expérience sur le terrain. Le site choisi fut celui du Mayet-de-Montagne, près de Vichy, où plusieurs forages dans le granite recoupent, à 200 mètres de profondeur, une zone altérée subhorizontale de quelques mètres d'épaisseur et de forte perméabilité. Lors de l'expérience, on pompait l'eau d'un des forages afin de provoquer une circulation d'eau importante, dont les effets électrocinétiques étaient enregistrés par deux magnétomètres et par un réseau de 15 électrodes installées, tant en profondeur, à proximité de la zone altérée, qu'en surface.

Après avoir résolu les multiples problèmes que pose une telle expérimentation (signaux parasites des clôtures électriques, dévidage de kilomètres de câbles à travers bois et champs, creusement de longues tranchées pour que ces mêmes câbles échappent à la curiosité masticatoire des vaches, etc.), nous avons enregistré un signal électrique qui a d'abord semblé décevant : le bruit électrique continu était de forte amplitude – 200 millivolts sur des lignes de 50 mètres de long ! – et d'une période caractéristique comprise entre 5 et 10 secondes. À ce niveau de bruit, ni le pompage ni le rééquilibrage ultérieur de l'aquifère n'engendraient de signal perceptible.

En revanche, l'élimination des bruits parasites par un filtrage fait apparaître un signal électrique systématique dans les dix minutes qui suivent l'arrêt de la pompe, décroissant en proportion de la hauteur d'eau dans le puits, enregistrée en parallèle. Il s'agit donc bien d'un signal d'électrofiltration, avec des différences de potentiel maximales de l'ordre de 10 millivolts pour 100 mètres de distance, pour une perturbation de hauteur d'eau d'environ une atmosphère. En outre, un signal magnétique se distingue légèrement du bruit de fond au moment où l'on enregistre le signal électrique ; il faudra cependant attendre l'analyse détaillée de l'ensemble de ces données, incluant celles du magnétomètre de référence, pour conclure à un effet magnétique clairement identifié.

Ce signal n'est pas d'interprétation facile, car les différences de potentiel entre les électrodes ne décroissent pas nettement avec la distance, ce qui témoignerait d'une forte hétérogénéité des propriétés électriques du massif granitique. Dans les zones sismiques, pour les mêmes raisons d'hétérogénéité électrique de la croûte, l'éventuelle détection



2. Échantillon de roche (cylindre) où l'on fait circuler de l'eau ; une différence de potentiel électrique apparaît entre les faces d'entrée et de sortie de l'eau.



3. Descente d'une électrode dans un des puits de Mayet-de-Montagne.

d'une source électrique profonde par des réseaux d'électrodes ou de magnétomètres installés en surface ne permettra sans doute pas de localiser ni de caractériser cette source de manière précise : d'autres mesures géophysiques complémentaires seront indispensables pour comprendre les processus physiques de déformation profonde. C'est

dans cet esprit que nous établissons aujourd'hui un réseau de surveillance continue du golfe de Corinthe, dans le cadre du projet européen GAIA. L'expérience du Mayet-de-Montagne devrait faciliter les interprétations des mesures magnétotelluriques, appuyées par les observations sismologiques, géodésiques et hydrogéologiques.

Pascal BERNARD est sismologue à l'Institut de physique du Globe.

POZZI de l'E.N.S., V. BARTHES du C.E.A., G. OGANESSIAN et G. NOZIERES de Garchy.

L'expérience du Mayet-de-Montagne a été réalisée par P. PINETTES, P. BERNARD, et F. CORNET de l'I.P.G.P., L. JOUNIAUX et J.-P.

Archimède(s), l'émission franco-allemande de vulgarisation scientifique d'ARTE, présente ce sujet les mardi 4 et 11 mars à 20 heures.

Les mélanges de cartes

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le difficile passage de l'ordre au désordre, ou les illusions du mélange.

Avec des cartes, on peut jouer à plusieurs (belote, bridge, poker, etc.), faire des patiences, réaliser des tours de magie ou faire semblant d'y déchiffrer l'avenir. On peut aussi manipuler les cartes pour le simple plaisir de découvrir des structures mathématiques. On expérimente ainsi très concrètement les notions d'ordre et de désordre : l'ordre, c'est un paquet classé, le désordre, c'est un paquet battu. Le passage du premier état au second s'appelle le mélange, moins simple à pratiquer qu'on ne le pense.

RETOUR AU DÉPART

Pour bien mélanger – croit-on – il suffit de faire n'importe quoi avec application et assez longtemps ! Erreur : un théorème de théorie des groupes indique qu'il ne faut pas trop s'appliquer. Ce théorème énonce que « tout élément d'un groupe fini possède une puissance qui est l'identité ». Appliqué aux opérations de mélange d'un jeu de cartes, qui forment un groupe fini, le théorème indique que si vous effectuez de manière répétée le même mélange, vous reviendrez toujours à votre

point de départ, c'est-à-dire à l'ordre initial du paquet. Le nombre de fois qu'il faut appliquer l'opération de mélange pour revenir au paquet initial est la *période* de l'opération.

L'opération d'inversion d'un paquet (la première carte devient la dernière, la seconde l'avant-dernière, etc.) a une période 2 : si vous inversez deux fois un paquet, vous revenez bien sûr à votre point de départ. Ce retour, le théorème l'affirme, n'est pas exceptionnel mais général.

Examinons un second exemple de mélange un peu plus intéressant et que nous appellerons le *mélange binaire*. Il comprend trois étapes :

(1) On prend le paquet dans la main, faces en dessous.

(2) On retourne la première carte et on la place à gauche sur la table, on retourne la deuxième carte et on la place à droite sur la table, et ainsi de suite alternativement à gauche et à droite, ce qui constitue deux nouveaux paquets.

(3) Toutes les cartes ainsi disposées, on place le paquet de droite sur celui de gauche (remarquez que la carte initialement sous le paquet y subsiste, de même que la carte du dessus).

Avec un jeu de 32 cartes, cette opération, répétée cinq fois, redonne l'ordre de départ : sa période est 5. Si vous partez d'un jeu complètement classé – 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as – dans l'ordre trèfles, carreaux, cœurs, piques –, après trois opérations de mélange binaire, le jeu est classé par niveaux : les quatre « 7 », puis les quatre « 8 », etc. Vous aviez cru mélanger consciencieusement le paquet, alors que vous êtes passé d'un ordre à un autre avant de revenir à l'ordre initial. Pour 52 cartes, la période du mélange binaire est 8, et le jeu est classé par niveaux après six étapes.

L'arithmétique permet d'en savoir plus sur le mélange binaire : pour 2^n cartes, la période est n . Le résultat général est que, pour un jeu de $2m$ cartes, la période est le plus petit entier p tel que $2^p - 1$ soit divisible par $2m - 1$. Le petit théorème de Fermat indique que si q est un nombre premier qui ne divise pas k , alors $k^{q-1} - 1$ est divisible par q . Ici (en prenant k égal à 2 et q égal à $2m - 1$), on obtient que, si $2m - 1$ est un nombre premier, alors $2^{2m-2} - 1$ est divisible par $2m - 1$: ainsi, lorsque $2m - 1$ est un nombre premier, $2m - 2$ opérations de mélange binaire suffisent toujours pour replacer un jeu de $2m$ cartes dans son ordre initial.

Si, dans la dernière étape du déroulement du mélange binaire, on place le paquet de gauche sur celui de droite (au lieu de droite sur gauche), on obtient une opération de mélange très différente, que nous désignerons par la *variante du mélange binaire*, dont la période est 10 avec 32 cartes. Il apparaît alors deux étapes intermédiaires où les cartes sont classées par niveaux (une fois par niveaux croissants, une fois par niveaux décroissants), et, de plus, à la fin de l'étape 5, le jeu est dans l'ordre inversé.

La période de la variante du mélange binaire avec 52 cartes est 52, et chaque

