

■ POUR LA
SCIENCE

Avril 1997

édition française de
**SCIENTIFIC
AMERICAN**

Immunothérapie
des cocaïnomanes

Les galaxies fantômes

Le Néolithique au Sahara

L'interférométrie radar

La forme du tambour

L'alphabet au Japon

La communication
des bactéries



L'expérimentation animale

Bloc-notes de Didier Nordon

Tribune des lecteurs

Jeu-concours

Conversation de mathématiciens
par Pierre Tougne

Science et finance

Les tendances du hasard?
par Christian Walter

Point de vue

L'indispensable médiatisation
par Alexandre Meinesz

Les inattendus de la science

Les inattendus des fractales
par Benoit Mandelbrot



Présence de l'histoire

La mystification d'Alan Sokal
par Pierre Thuillier

Science et gastronomie

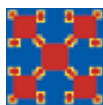
Questions de frites

Perspectives scientifiques :

La faille du tunnel de Toulon
Bactéries thermophiles
Mini-grenouille
Les mystères de la fécondation
De l'essence au lisier
Points chauds
Nager pour vivre
Les haies et les bosquets
Un réseau quantique
Les oscillations de Bloch

Savoir technique

Les machines à sous



Visions mathématiques

Sable et géométrie
par Roger Iss



L'expérience du mois

Le briquet pneumatique
par Paul Boutié et Ioannis Manos



Analyses de livres

– *Calcul scientifique*, Lionel Sainsaulieu
– *Introduction au calcul scientifique*, Brigitte Lucquin et Olivier Pironneau

– *Le prix du bien-être*, Édouard Zarifian
– *Longitude. L'histoire vraie d'un génie solitaire qui résolut la plus grande énigme scientifique de son temps*, Dava Sobel
– *Toutes les tortues du monde*, Frank Bonin, Bernard Devaux et Alain Dupré

Débat

L'expérimentation animale : utilité et éthique 33

par Andrew Rowan

Les expériences menées sur les animaux sont au cœur de la recherche biomédicale. Quel est leur coût? Quel est leur intérêt?

Leurres et gaspillage 34

par Neal Barnard et Stephen Kaufman

Les conditions des expérimentations animales sont trop artificielles pour reproduire celles d'une maladie humaine.

Progrès et sécurité 37

par Jack Botting et Adrian Morrison

L'efficacité des médicaments et des protocoles opératoires est validée par l'expérimentation animale.

L'expérimentation vitale 40

par Pierre Tambourin

L'expérimentation animale fait progresser la biologie et la médecine, mais elle doit être acceptable sur le plan éthique.

L'évolution de l'expérimentation animale 42

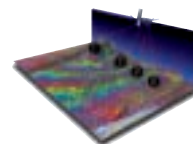
par Madhusree Mukerjee

que et le public se préoccupent de plus en plus du bien-être des animaux, ce qui modifie les conditions de leur utilisation par les chercheurs.

L'interférométrie radar par satellite 48

par Didier Massonnet

Des radars en orbite à des centaines de kilomètres de la Terre détectent de faibles mouvements de sa surface.



L'émergence précoce du Néolithique au Sahara 56

par Ginette Aumassip

Il y a plus de 9 500 ans, dans le Sahara, des hommes prennent conscience qu'ils peuvent agir sur leur environnement.

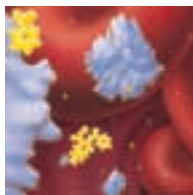


L'immunothérapie des cocaïnomanes

par Donald Landry

De nouvelles substances, dérivées de molécules fabriquées par le système immunitaire, combattraient les effets de la cocaïne.

64



Les tambours liquides

par Maria Brazovskaia, Catherine Even et Pawel Pieranski

La mesure des fréquences de vibration de la peau d'un tambour en cristal liquide confirme que des formes différentes donnent parfois les mêmes fréquences : on ne peut pas entendre la forme d'un tambour !

68



Les galaxies fantômes

par Gregory Bothun

En dix ans, les astronomes ont découvert plus d'un millier de galaxies géantes de faible luminosité. Cette population modifie nos idées sur l'évolution des galaxies et la répartition de la masse dans l'Univers.

84



La communication des bactéries 76

par Richard Losick et Dale Kaiser

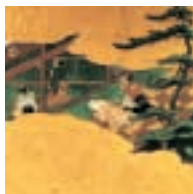
Les bactéries échangent des messages chimiques entre elles, ainsi qu'avec les plantes et les animaux. Ce besoin de communiquer expliquerait l'extraordinaire variété des molécules synthétisées par les micro-organismes.



L'introduction de l'alphabet latin au Japon 90

par Florian Coulmas

Les Japonais s'étonnèrent de l'écriture alphabétique des premiers Européens admis dans leur pays, au XVII^e siècle. Aujourd'hui encore, l'alphabet européen leur semble une modernité exotique.



La science de la loi de Murphy 100

par Robert Matthews

Les désagréments de la vie quotidienne ne sont pas le fruit du hasard : la vérité est que le monde entier vous en veut personnellement.



Le naturel et l'artificiel

Le romantisme est une perpétuelle tentation. Le retour à la nature, un désir récurrent. Voyez-vous une chemise en coton aux couleurs «naturelles» dans un étalage : ne vous semble-t-elle pas plus confortable que la chemise voisine, aux couleurs «artificielles» et en fibres synthétiques? Le naturel est une qualité qui s'attache à notre âme et la force d'aimer.

Ce qui dérange, c'est que ce manichéisme, le bon naturel opposé au mauvais artificiel, est d'appréciation délicate. Le coton a été transformé par sélection depuis que l'homme le cultive : il est bien différent de ce que l'évolution avait fourni aux premiers Égyptiens. La plante est protégée et alimentée par des insecticides, des herbicides, des engrais, qui n'existent pas à l'état de nature. Après la récolte – mécanisée –, ses fibres sont traitées dans des machines industrielles qui cardent, filent et tissent. Les colorants qui la teintent, les additifs chimiques qui en renforcent l'éclat et la texture, n'apparaissent pas explicitement dans la chemise finie. Même si les colorants ont les mêmes structures chimiques que les molécules naturelles, la différence est qu'ils sont confectionnés à partir de dérivés du pétrole.

Le grand mot est lâché : la fibre synthétique la plus connue, le Nylon, est confectionnée à partir d'acide adipique et d'hexaméthylène diamine, extraits du pétrole. Donc le Nylon est artificiel. Or ce pétrole est d'origine tout à fait naturelle : il est le résultat de la transformation de plantes accumulées dans les sédiments pendant des centaines de millions d'années. Si le pétrole est d'origine végétale, et si le coton est traité, où est la différence de nature?

Ces arguments frisent le sophisme et paraissent plaider en faveur de l'industrie chimique. Tel n'est pas le propos. La constatation est plus incisive : les artisans ingénieux modifient les produits naturels en fonction de leurs besoins et, si le qualificatif d'artificiel est «ce qui passe par une usine de traitement», il n'existe plus de produits naturels. Pourrait-on quantifier les transformations des matériaux pour établir un degré de naturalité, comme le suggère le chimiste Roald Hoffmann? Tâche difficile. Chassez l'artificiel, il revient au galop...

Il n'empêche, notre âme, romantique, nous incite à préférer le coton au Nylon, le bois au plastique, le paysage au chromo. Tant que nous savons les distinguer.

Philippe BOULANGER

Vers un manque de pots ?

Extrait d'une lettre envoyée par le ministre de la Recherche au directeur général du CNRS. «Vous avez bien voulu attirer mon attention sur un point qui, si nul remède n'y était apporté, pourrait rapidement devenir inquiétant : la tendance à l'embonpoint constatée chez trop de chercheurs. L'origine de ce regrettable phénomène réside sans nul doute dans le nombre excessif de pots de thèse auxquels ils participent. Je vous prie donc de faire en sorte que le maximum de deux pots de thèse par jour et par université ne soit en aucun cas dépassé. À cette fin, et pour diminuer le nombre de thèses, vous veillerez à relever suffisamment le niveau exigé des candidats avant qu'ils ne soient autorisés à soutenir.»

La nature imite l'art

C'est un malheur, j'imagine, pour les archéologues qui s'y étaient trompés, d'apprendre que les peintures sacrées trouvées dans une grotte du mont Bego (Alpes-Maritimes) ne seraient finalement pas des peintures, mais des lichens ou des algues ayant poussé selon des formes régulières.

C'est un bonheur, j'imagine, pour les peintres modernes d'apprendre qu'une telle confusion a été possible. Depuis les visiteurs péremptoires qui affirment : «Moi aussi, je peux faire n'importe quoi, et appeler ça de l'art moderne !», jusqu'au fameux âne Boronali dont la queue, trempée dans la peinture et promenée au hasard sur une toile,

produisit un effet qui fut pris pour une œuvre véritable – tout semblait démontrer que les artistes modernes étaient d'exceptionnels fumistes.

La preuve est désormais faite : les artistes d'autrefois ne valaient pas mieux, puisqu'on a pu prendre pour des têtes humaines peintes par eux de simples lichens ayant poussé en cercle. Sans doute, un jour, entendra-t-on des visiteurs s'exclamer : «Moi aussi, je peux faire n'importe quoi, et appeler ça de l'art pariétal !»

Le juste et l'aléatoire

Summum jus, summa injuria, disaient les Anciens. Ils avaient tout prévu...

Dans mon université, les mathématiques recrutent cette année deux maîtres de conférences. Le nombre de candidats est de 150. Cette proportion, banale en nos temps de chômage et de restrictions, place la commission de choix dans une situation étrange. Quoi qu'elle décide, elle est certaine d'agir de façon parfaitement juste et injuste à la fois.

Parmi les 150 candidats, il y en a en effet 30, 40, 50 peut-être qui sont excellents. Il faudrait que la commission agisse en dépit de tout bon sens pour ne pas choisir les élus parmi ceux-là. Mais, quels que soient ces deux élus, la commission aurait pu en choisir deux autres, qui auraient été exactement aussi dignes du succès.

Ma conclusion est que, si, après le premier tri, la commission s'en remettait au tirage au sort, elle n'agirait probablement pas plus mal, elle perdrait sûre-

ment moins de temps, et elle se ferait peut-être moins d'illusions sur elle-même.

Je n'oserais pas cette suggestion, si un illustre devancier n'avait ouvert la voie. Le mathématicien André Weil, dit-on, prônait le recours à l'aléatoire pour les examens. Parmi les candidats, on sait *a priori* qu'un tiers sera reçu quel que soit le sujet, et un tiers collé. Quant au troisième tiers, tout dépend pour lui du hasard qui fait ou non sortir tel sujet. Alors, dans ce troisième tiers, autant tirer au sort les reçus. En plus, cela éviterait les copies à corriger. Weil allait jusqu'à suggérer aussi qu'on tire au sort les résultats retenus pour publication dans les revues de recherche. Les mathématiques ne sont pas les ennemies de la paresse.

Les euros sont fatigués

Nos dirigeants nous houspillent : le changement d'unité monétaire est pour bientôt, et nous ne nous préparons pas.

Nos dirigeants ont raison. Soyons sérieux : préparons-nous. Quels effets le remplacement du franc par l'euro aura-t-il ?

D'abord, les petits enfants – à force d'entendre des phrases comme : «Je n'ai pas un euro sur moi» ou «Je suis à sec, je n'ai plus un euro» – les petits enfants croiront que l'unité s'appelle le neuro ; ils en déduiront qu'un neurologue est un conseiller financier. Il faudra les détromper. En grandissant, familiarisés avec le pluriel, ils changeront de liaison : deux-z-euros, trois-z-euros, les-z-euros sont arrivés. D'où, devenus adultes, des formulations plaisantes. Par exemple :

– Alors, il te l'a donnée, ton augmentation, le patron ?

– Tu parles, oui. Zéro zeuro, il m'a accordé.

Ce qui prouve au passage que zéro est une forme de pluriel tout à fait singulière.

Ni neuro ni zeuro, les journaux emploieront le terme correct : euro. Lequel, Dieu soit loué, leur autorisera ces titres spirituels dont ils raffolent. Le cours de l'euro réagit-il vivement à quelque événement ? L'euro tique. Les marchés financiers européens embarrassent-ils leurs rivaux américains et japonais ? La zone euro gêne. Le cours de l'euro est-il artificiellement maintenu ? L'euro ment ou, si on préfère les assonances aux jeux de mots, L'euro leurre. Ce n'est là qu'un avant-goût. Je sens que nous allons en voir bien d'autres... Heureux euro, heureuse Europe !

Le meilleur des mondes

Telle théorie trouve tout à coup une application dans un domaine qui en semblait très éloigné ; ainsi, la théorie des groupes en physique ; la topologie ou la théorie de l'information en biologie moléculaire. Faut-il se réjouir ?

Cela dépend. L'optimiste dira : «C'est merveilleux. Pour que, 50 ou 100 ans après sa naissance, cette théorie trouve une application inattendue, imprévisible pour ses auteurs, c'est que, vraiment, ils avaient touché du doigt une vérité profonde.»

Le pessimiste dira, au contraire : «C'est terrible comme nous sommes conditionnés. Nous avons trouvé un outil puissant. Du coup, nous sommes incapables d'interpréter un problème neuf autrement que par le biais de cet outil ancien. Ce sont nos lunettes qui déterminent ce que nous voyons, pas la réalité. Incapables d'assimiler le nouveau, nous le ramenons toujours au déjà connu.»

Entre celui qui accepte le réductionnisme et celui qui le refuse, il y a toute la différence entre l'optimiste et le pessimiste. Autant dire que ces deux types d'esprits sont inconciliables.

Ignorance (para) normale

Dans *Le paranormal ignoré* (voir «Bloc-Notes», *Pour la Science*, février 1997), Didier Nordon fait référence à un article de Bertrand Méheust. Celui-ci écrit, entre autres, qu'«il n'est pas de plus puissant tabou, dans le domaine de la connaissance, que l'interdit sur la métapsychique» et que les scientifiques ne se donneraient plus la peine d'examiner ces phénomènes dans des revues prestigieuses.

La science n'est pas un «univers fermé». C'est, au contraire, l'échange d'arguments et l'expérimentation. Les savants du paranormal n'apportent toutefois aucune expérimentation qui viendrait corroborer leurs théories. La communauté scientifique devrait-elle faire ces expériences à leur place ?

Les parapsychologues et autres adeptes des sciences occultes semblent oublier les nombreux cas de fraude et de ridicule notoire qui ont caractérisé ces sciences occultes en général et la parapsychologie en particulier. Cette dernière s'est distinguée par l'affaire Uri Geller, un illusionniste qui, pour des raisons commerciales, se prétendait en relation avec des puissances extranaturelles. Un deuxième cas, de ridicule plus que de fraude, est celui de Rhine. Fondateur de l'Institut de parapsychologie de Durham, Rhine a cru qu'un cheval pouvait lire ses pensées. Il était en réalité abusé par le propriétaire du cheval. C'est un illusionniste qui a démasqué l'affaire. Rhine n'a d'autre part guère publié que les observations qui corroboraient ses dires. Quant à son successeur, Levy, il a été prié de démissionner pour fraude : il avait falsifié des données.

La fraude n'est pas le propre des sciences occultes. Elle existe également en science, à la différence toutefois que la connaissance scientifique est bâtie sur un grand nombre d'expérimentations et que ce ne sont pas quelques cas de fraude qui altèrent la validité de ce grand nombre d'expériences. En parapsychologie, c'est l'inverse : il y a très peu d'expériences concluantes et, quand il y en a, on constate qu'il y a des problèmes de fraude.

Pierre DEBUSSCHERE, Bruxelles

Bertrand Méheust, relayé par D. Nordon, somme la science, entité abstraite, ou les chercheurs scientifiques, autorités tutélaires, de se prononcer sur le paranormal ignoré. Mais la science se constitue là où il y a un chercheur scientifique, nulle part ailleurs. S'il n'y en a pas à tel endroit, c'est peut-être dommage, mais c'est comme ça. Il y a dans toutes les disciplines un grand nombre de sujets inexplorés, et c'est fort heureux.

D'autre part, on ne peut interroger les sciences que secondairement à leurs découvertes, résultats et théories. C'est une position scientifique, qui fait de la science un substitut à la religion, que de prétendre qu'elle doit se prononcer sur tout.

Enfin, l'étrange n'est pas une catégorie de phénomènes. Aussi est-il normal qu'aucun savant reconnu n'accepte d'en débattre. Ou alors, il faudrait entrer dans tous les débats non scientifiques qui se présentent, comme celui sur les races humaines.

Gérard KLEIN, Paris

Réponse de Didier Nordon

La science n'est pas un univers fermé, écrit M. Debusschere. Reste que l'ouverture d'esprit n'est pas acquise une fois pour toutes : elle doit s'entretenir. Tout ce qui trouble ou fait douter contribue par cela même à raviver la réflexion et force à repenser. Si je me suis fait l'écho de la recherche menée par B. Méheust, c'est qu'elle me semble pouvoir jouer un tel rôle.

Poincaré répond à Diacu

Le problème des n corps a-t-il enfin été intégré ? Au lecteur de l'article de Christoph Pöppe (voir *Le prix immérité*, *Pour la Science*, février 1997) je serai tenté de répondre par l'affirmative, je soumetts ces quelques rappels d'histoire.

Depuis les travaux de Cauchy, on sait «intégrer» le problème des n corps de la manière suivante. Les positions et vitesses des corps à un instant t_0 étant données, on forme d'abord les séries de Taylor représentant ces quantités en utilisant le système d'équations différentielles. On estime ensuite leur rayon de convergence p , presque toujours fini, et l'on calcule enfin les nouvelles positions et vitesses à l'instant $t_0 + p/2$, par exemple. Cauchy estimait «les calculs très pénibles» et «la convergence [...] très lente». On peut néanmoins réitérer le processus, ce qui mène en principe sans encombre aux limites du mouvement (temps infini, collision ou pseudo-collision). Peut-on éviter les itérations et former une série qui représente le mouvement tout entier ?

Poincaré répondit en 1886 : «Si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois corps restera toujours supérieure à une limite donnée, on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps peuvent être développées en séries toujours convergentes.

Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode

à la mécanique céleste. Je n'ai voulu, je le répète, que donner un exemple.»

Il ajouta en 1900 : «Une pareille intégration est d'un caractère bien différent et évidemment beaucoup moins satisfaisante pour l'esprit que l'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsienues.»

Sundman en 1913 et Wang en 1990 ont montré qu'on pouvait étendre le champ d'application de la méthode esquissée par Poincaré. Leur analyse s'applique aussi quand on ne sait pas minorer la distance de deux quelconques des corps. Les deux auteurs ont en effet proposé deux stratégies fort intéressantes pour contourner les difficultés causées par les collisions. Mais leurs séries s'obtiennent par des calculs plus pénibles que ceux envisagés par Cauchy, et la convergence est prodigieusement lente. Poincaré n'avait pas jugé sa méthode digne d'être proposée au prix du roi de Suède en 1889, et il est clair qu'il n'aurait pas changé d'avis s'il avait pris la peine de la compléter par une analyse ressemblant à celles de Sundman ou de Wang.

Alain ALBOUY, Paris

La polémique

Dans *Les divas donnent le la* (voir *Pour la Science*, février 1997), Nicole Scotto di Carlo s'interroge sur la nature des doléances des chanteurs : «Gêne réelle ou caprice de diva ?» Elle néglige un mécanisme fondamental de la voix : il s'agit d'un système asservi, qui modifie des paramètres en fonction de la valeur instantanée de variables. Il recherche un maximum d'effet pour un minimum d'effort. Comme le chanteur a fort à faire sur scène, il utilise un paramétrage établi pendant les répétitions. Si les variables d'environnement sont stables, il chante tranquillement. Si, en revanche, les paramètres varient lentement dans le temps, le chanteur est obligé de modifier en permanence sa place vocale, ce qui le fatigue physiquement. De surcroît, il est souvent impossible d'opérer les adaptations avant la représentation, d'où la difficulté des opéras où il faut chanter le «grand air» en entrant en scène.

En négligeant cela, N. Scotto di Carlo est obligée de trouver une autre explication. Toutefois, pour les cordes vocales, 130 vibrations de plus ne sont pas équivalentes, du point de vue de la fatigue, à 130 tractions sur une barre fixe : il ne s'agit pas d'effort musculaire, mais de vibration de membranes. En outre, comme 130 ce n'est pas beaucoup, N. Scotto di Carlo évoque un contre-*fa* tenu en moyenne dix secondes, ce qui, à ma

connaissance, n'existe pas dans le répertoire. Le problème des aigus, pour un chanteur, n'est pas une question de fréquence, mais une question de pression sous-glottique, ce qui n'a rien à voir.

Éric GOROUBEN

Réponse de N. Scotto di Carlo

Le ton polémique d'Éric Gorouben est un bon exemple de l'incompréhension qui peut régner entre les représentants des différentes disciplines scientifiques lorsqu'ils abordent des sujets communs, de leurs points de vue respectifs. Le fait que la mécanique vocale soit assimilable à un système asservi n'est une révélation pour personne. Quant à la démonstration qu'E. Gorouben tente de faire, elle n'est ni très explicite ni très convaincante. Mon propos n'a jamais été d'assimiler la vibration des cordes vocales à des tractions sur barre fixe! Je précise au passage que ce qui vibre ce ne sont pas des «membranes», mais des muqueuses...

En outre, il s'agit bel et bien d'effort musculaire et par conséquent de fatigue physique, non pas au niveau des cordes vocales, mais de la pression subglottique que les chanteurs engendrent et entretiennent tout au long de l'acte vocal, à l'aide d'une forte mobilisation de la musculature abdominale et pelvienne. Dans la mesure où la pression subglottique augmente avec la fréquence, 130 hertz de plus par seconde représentent un effort physique supplémentaire non négligeable. Quant à affirmer que «le problème des aigus pour un chanteur n'est pas une question de fréquence», j'en laisse l'entière responsabilité à E. Gorouben. Les artistes lyriques apprécieront sûrement...

En ce qui concerne l'interprétation (à ne pas confondre avec le répertoire), dont relève la durée effective d'un point d'orgue, il suffit, sans même avoir recours à des appareils de laboratoire sophistiqués, de chronométrer des contre-notes dans différents enregistrements d'ouvrages lyriques pour constater qu'elles sont généralement tenues de 6 à 14 secondes, ce qui n'a rien d'aberrant lorsqu'on sait que les tests phoniatriques (destinés à des sujets non chanteurs) fixent la durée moyenne de vocalisation à 20 secondes après inspiration forcée.

Retrouvez la Tribune de Pour la Science sur Internet à l'adresse <http://www.PourlaScience.com>, ou directement par courrier électronique à 101641.3525@compuserve.com, en indiquant Tribune dans la rubrique objet.

JEU-CONCOURS

N°34

PIERRE TOUGNE

CONVERSATION DE MATHÉMATIENS

Passant devant le bureau de deux mathématiciens «diophantiens», j'ai surpris la conversation suivante : «Mon âge divise deux fois ton âge plus 17». L'autre mathématicien répondit : «Oui mais le mien divise le tien plus quatre». Quels sont les âges entiers possibles

de ces deux mathématiciens satisfaisant à ce dialogue. Afin d'éliminer quelques solutions triviales, nous supposons que la «bosse des maths» n'apparaît chez le mathématicien qu'après un an, mais elle peut être très précoce!

Envoyez vos réponses aux questions sur carte postale à Pour la Science, 8, rue Férou, 75006 Paris. Parmi les

réponses exactes reçues pendant le mois d'avril 1997, dix gagnants tirés au sort recevront le livre *La vie dans les abysses*.

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N°32

Le problème ayant une symétrie de révolution autour de l'axe de Saturne et de son anneau, on se place dans un plan méridien où Saturne est représenté par le cercle (S) et l'anneau par le segment AB (voir la figure ci-dessous). Soit M un point quelconque de Saturne dans l'hémisphère Nord-Est. Le cercle circonscrit au triangle MAB (en rouge sur la figure) coupera en général le cercle (S) en un autre point N. Tous les points de Saturne compris entre M et N verront le segment AB sous un angle plus grand que celui de M et N (propriété classique de l'angle intérieur par rapport à l'angle inscrit dans un cercle). Par conséquent, l'angle sous lequel on verra le segment AB sera maximum quand M et N seront confondus, c'est-à-dire au point de contact P du cercle (C) passant par A et B et tangent au cercle de Saturne. Soit I son centre, on a $OA \cdot OB = OP \cdot OP'$ (puissance de O par rapport au cercle (C)), relation qui s'écrit si l'on note R le rayon du cercle (C),

$r_1 r_2 = r(r + 2R)$ d'où l'on tire $2R = (r_1 r_2 - r)/r$. Soit H le milieu de AB, la latitude de P est l'angle $\theta = IOH$ or dans le triangle rectangle OHI, on a $\cos \theta = OH/OI = (r_1 + r_2)/2(r + R)$ qui s'écrit après substitution de R par son expression $\cos \theta = r(r_1 + r_2)/(r_1 r_2 + r^2)$. De même, l'angle de vision maximum $\varphi = APB$ est égal à AIB et dans le triangle rectangle AHI, on a : $\sin \varphi = AH/IA = (r_2 - r_1)/2R = r(r_1 - r_2)/(r_1 r_2 - r^2)$.

Le point P peut se construire géométriquement de la façon suivante : si T désigne l'intersection de MN avec la droite AB, TP est la tangente en P au cercle S, donc P est l'intersection du cercle de diamètre OT avec le cercle S. Naturellement, il y a aussi la solution symétrique par rapport à la

droite AB. Enfin Mr. R. Osswald me signale la condition nécessaire et suffisante pour que $\theta = \varphi$: $(r_1/r)^2 + (r_2/r)^2 = 2$, qui est curieusement très simple.

