

Sable et géométrie

ROGER ISS

En attendant les plages de l'été, faisons des tas de sable mathématiques.

Quand on verse du sable sur une plaque plane, horizontale et surélevée, il s'entasse, tandis que le sable excédentaire coule le long des bords. Quelle sera la forme du tas ? Si le contour de la plaque est un polygone convexe, on obtient finalement un tas polyédrique, limité par des faces planes qui passent chacune par un des côtés du polygone et qui font toutes le même angle aigu avec le plan horizontal (cet angle est de l'ordre de 30 à 35 degrés). Chaque arête de ce polyèdre est commune à deux faces, et chaque sommet est généralement commun à trois faces (et donc à trois arêtes) ; un sommet peut aussi appartenir à plus de trois arêtes, le cas extrême étant celui de la pyramide, dont le sommet unique est commun à toutes les arêtes.

Ainsi un tétraèdre s'établit sur une plaque triangulaire. Avec une plaque à quatre côtés, on obtient parfois une pyramide, parfois un «toit» à quatre pans. Dans cet article, nous ne nous intéresserons qu'aux tas dont aucun sommet n'est commun à plus de trois arêtes (à

nance de 3 et 4 côtés pour le quadrilatère, et une succession de faces à 3, 4, 4, 3, 5 côtés pour le pentagone.

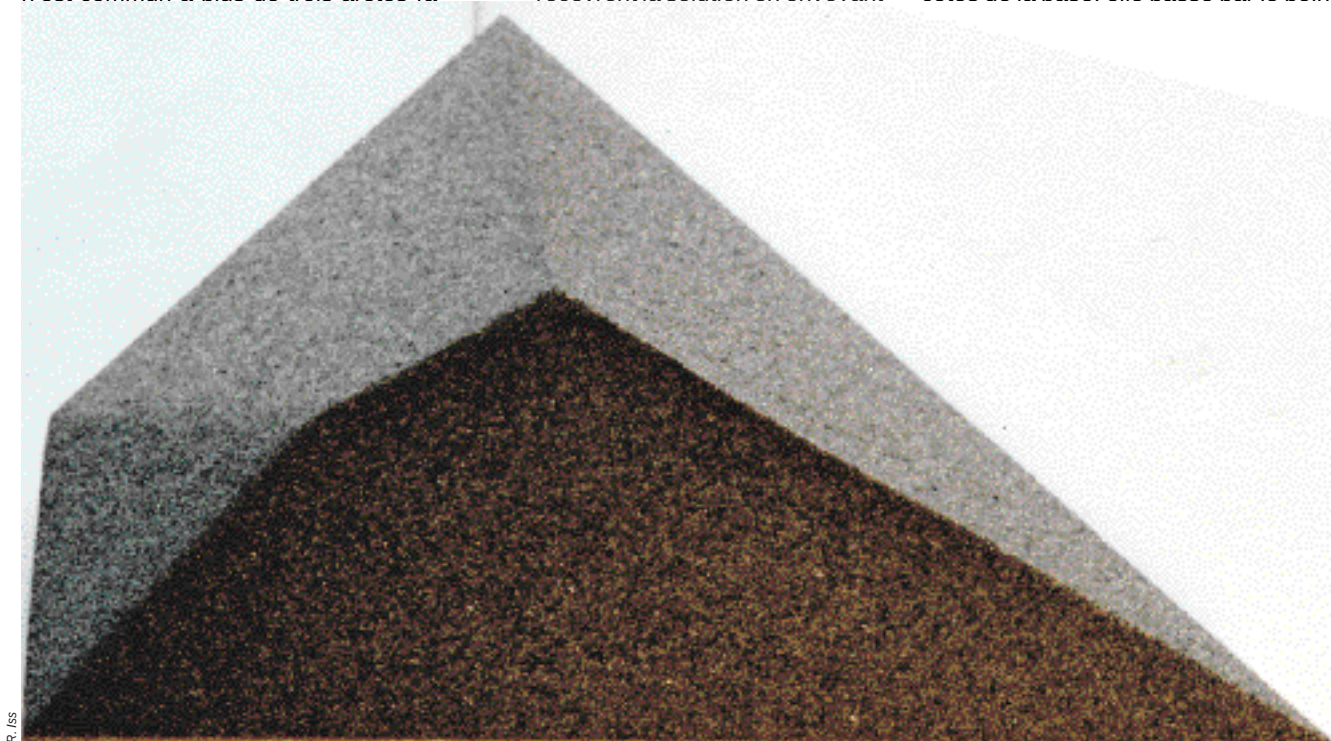
Puis, quand on passe à la plaque hexagonale, c'est la surprise : selon sa forme, on obtient trois types de tas de sable distincts par la nature de leurs faces et par leur répartition. Sur les schémas 3 c, d, e, on voit que ces trois tas ont respectivement des successions de faces à 3, 4, 5, 3, 4, 5 côtés ; 3, 4, 4, 4, 3, 6 côtés ; 3, 5, 3, 5, 3, 5 côtés.

Quels tas obtient-on pour des plaques ayant plus de six côtés ? Contentons-nous de dessiner les tas de sable en projection orthogonale sur le plan horizontal. Chaque arête d'un tas de sable étant l'intersection de deux faces de même pente, elle se projette sur le plan horizontal selon la bissectrice de l'angle formé par les côtés correspondants du polygone de base lorsqu'ils se coupent (ou leur prolongement) ; si ces côtés sont parallèles, l'arête se projette sur la parallèle équidistante de ces deux côtés. Saurez-vous le démontrer (les lecteurs recevront la solution en envoyant

l'étude des tas de sable en les dessinant, mais l'imprécision, qui augmente avec le nombre de côtés, nous pousse à abandonner l'expérience et à passer à la théorie. Commençons par convenir qu'un «polyèdre tas de sable» est un polyèdre convexe dont une face, nommée base, a un côté commun avec chacune des autres faces et fait le même angle aigu avec chacune d'elles. À partir de cette définition, nous pourrions démontrer toutes les propriétés des tas de sable observées expérimentalement, mais un bon mathématicien cherche toujours à généraliser une définition, c'est-à-dire à «plonger» l'ensemble des objets qu'il considère dans un ensemble plus vaste ; l'étude de l'ensemble élargi donne souvent des indications utiles pour le problème initial.

LES TECTOÈDRES

Or, dans la définition des tas de sable, il y a une contrainte dont on peut se libérer : l'égale inclinaison des faces. Pour généraliser les tas de sable, imaginons des tas dont les faces auraient des pentes différentes (nous pourrions les fabriquer en terre glaise ou en pâte à modeler, en découpant les faces avec un couteau). Leur dessin en projection horizontale est alors plus facile que pour les tas de sable, car les projections des arêtes ne sont plus des bissectrices. Pour ces dessins, il suffit de respecter deux règles : si une arête est l'intersection des faces déterminées par deux côtés de la base, elle passe par le point



1. Tas de sable confectionné sur un quadrilatère.

Quand on fabrique les tas de sable, on constate qu'ils ont toujours au moins deux faces triangulaires. Peut-on maintenant le démontrer ?

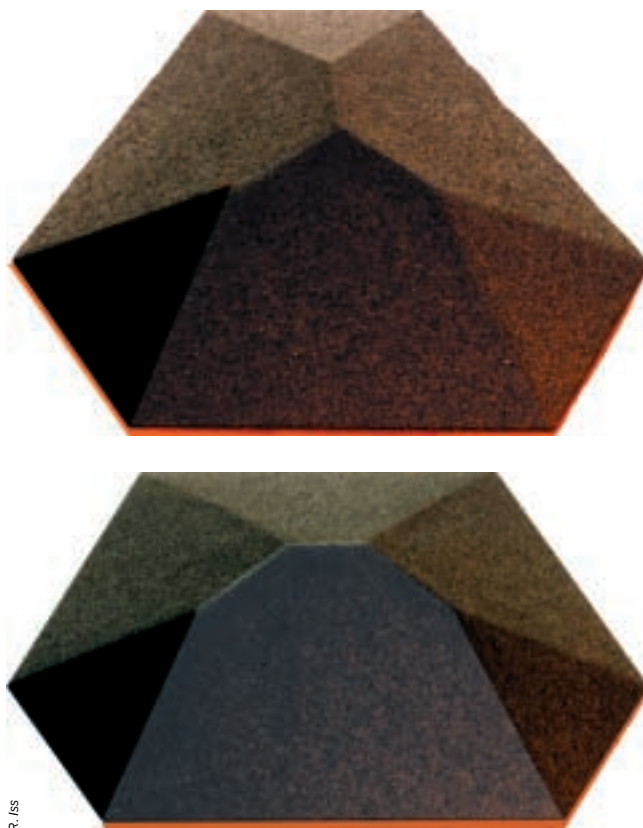
Parmi les arêtes, on en distingue deux types : celles qui sont issues d'un sommet de la base et communes à deux faces adjacentes, que nous nommerons arêtes latérales ; et celles qui joignent deux sommets n'appartenant pas à la base, que nous nommerons arêtes sommitales (voir la figure 4). De même, on distingue trois types de sommets (en dehors de ceux de la base), selon le type des arêtes qui en sont issues : de type 1, quand deux des arêtes sont latérales et la troisième sommitale (une des faces auxquelles un tel sommet appartient est un triangle) ; de type 2, quand une arête est latérale et les deux autres sommitales ; de type 3 quand les trois arêtes issues de ce sommet sont sommitales (plus de trois arêtes ne peuvent être latérales que dans les cas écartés).

Considérons maintenant un tectoèdre d'ordre n supérieur à 3, et nommons S_1, S_2, S_3 le nombre de ses sommets respectivement de type 1, 2, 3. Le nombre des arêtes latérales se déduit directement du nombre des sommets de types 1 et 2 : il est égal à $2S_1 + S_2$. De surcroît, comme il passe exactement une arête latérale par chaque sommet de la base, le nombre d'arêtes latérales est égal à n ; donc $2S_1 + S_2 = n$.

Combien le tectoèdre possède-t-il d'arêtes sommitales ? Quand on ajoute les nombres d'arêtes sommitales pour tous les sommets, on trouve $S_1 + 2S_2 + 3S_3$, mais, dans ce total, chaque arête sommitale est comptée deux fois. Aussi le nombre d'arêtes sommitales est-il égal à $(S_1 + 2S_2 + 3S_3)/2$, ce que l'on peut encore écrire, à l'aide de la relation précédemment trouvée : $n + 3(S_3 - S_1)/2$.

En faisant ces dénombrements pour le tectoèdre (base comprise), on trouve que le nombre total S des sommets est $2n + S_3 - S_1$; celui A des arêtes est $3n + 3(S_3 - S_1)/2$, et celui F des faces est $n + 1$. Or le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) a démontré que, pour un polyèdre, ces trois nombres sont liés par la relation $F + S - A = 2$. En remplaçant les nombres F, S, A par leur valeur, nous trouvons ici : $S_1 = S_3 + 2$.

On en déduit que S_1 est supérieur ou égal à 2, et l'on obtient ainsi la confir-



2. Deux des trois types de tas de sable qui s'édifient sur des plaques hexagonales.

mation de la surprenante observation précédente : tout tectoèdre a, au moins, deux faces triangulaires. En outre, les nombres A et S deviennent alors respectivement $2n - 2$ et $2n - 3$: dans un tectoèdre d'ordre n , il existe, quelle que soit sa forme, $n - 2$ sommets autres que ceux de la base et $n - 3$ arêtes sommitales. N'est-ce pas étonnant que ces deux nombres soient indépendants de la forme du tectoèdre, et ne dépendent que du nombre de sommets de sa base ?

TRONCATURE TRIANGULAIRE

Imaginons, comme précédemment, que le tectoèdre étudié soit en terre glaise et posé sur une table. Avec un couteau, coupons une «pointe» de ce solide, par une coupe plane jusqu'au ras de la table. En enlevant le petit tétraèdre ainsi détaché (voir la figure 7), on obtient encore un tectoèdre ayant une nouvelle face triangulaire.

De façon plus mathématique, considérons un sommet S de la base d'un tectoèdre d'ordre n . Sur chacune des trois arêtes issues de S , choisissons respectivement trois points A, B, C , puis enlevons au tectoèdre initial le tétraèdre $SABC$ ainsi défini. Le solide restant est encore un tectoèdre, mais d'ordre $n + 1$. Cette

opération de «troncature triangulaire» nous permet d'obtenir des tectoèdres d'ordre aussi élevé que l'on veut, à partir d'un tectoèdre donné.

Inversement, considérons sur un tectoèdre une face triangulaire ABC , où BC est un côté de la base, et supposons que les deux côtés de cette base, adjacents au côté BC , se coupent en un point S extérieur au polygone de base. Les points S, A, B, C déterminent un tétraèdre. En le collant au tectoèdre initial, on obtient encore un tectoèdre, mais cette fois d'ordre $n - 1$: c'est l'opération inverse de la troncature triangulaire.

On démontre, en effet, que, pour une au moins des faces triangulaires, cette opération est possible. La seule impossibilité se présente pour un tectoèdre d'ordre quatre, dont la base est un trapèze et l'arête sommitale parallèle au plan de base (voir la figure 6) : le point S considéré précédemment n'existe pour aucune de ses deux faces triangulaires. Ce polyèdre ne peut manifestement pas être obtenu par troncature d'un tétraèdre, puisque ce dernier n'a pas d'arête parallèle au plan de base. Par conséquent, tous les tectoèdres descendent d'un tétraèdre par des troncatures successives, sauf ceux dont une arête est parallèle au plan de base, et qui descendent alors du tectoèdre d'ordre quatre précédent.

LA FORMULE D'UN TECTOÈDRE

Dans notre recherche des types de tas possibles, sur une plaque polygonale donnée, nous nous intéressons moins à la forme des tectoèdres qu'à la répartition de leurs faces et au nombre de leurs côtés. Ces informations sont faciles à décrire par un code numérique : marquons sur chacune des faces le nombre des arêtes sommitales qui la limitent (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités), soit 0 pour une face triangulaire, 1 pour une face à quatre côtés, etc. Lisons ces nombres dans l'ordre où ils se présentent quand on parcourt le polygone de base dans un certain sens. On obtient ainsi une suite de nombres entiers, par exemple 1, 1, 0, 2, 0 pour le tectoèdre de la figure 5.

Évidemment, une telle suite n'est pas unique : elle peut être commencée par n'importe quel terme ; c'est un

cycle. En outre, comme on convient de ne pas distinguer un tectoèdre de son symétrique par rapport à un plan (son image dans un miroir), la suite peut être lue dans n'importe quel sens. Convenons de classer toutes les écritures de cette suite par ordre lexicographique, comme le sont les mots dans un dictionnaire : si deux suites diffèrent par leur premier terme, la plus grande est celle qui a le plus grand premier terme ; si elles commencent par deux termes égaux, la plus grande est celle qui a le plus grand deuxième terme ; etc. Ne conservons que la plus grande de toutes ces suites, et nommons-la for-

mule du tectoèdre. Ainsi, des cinq suites 11020, 10201, 02011, 20110 et 01102 associées au tectoèdre précédent, on ne retient que 20110 ; c'est la formule de ce tectoèdre.

La troncature a un effet simple sur la formule d'un tectoèdre. Elle crée une face triangulaire qui s'intercale entre deux faces adjacentes, dont le nombre des arêtes sommitales augmente d'une unité, leur arête latérale commune étant devenue sommitale : ainsi, dans la formule, un zéro s'introduit entre deux termes consécutifs, et les deux nombres ainsi séparés augmentent d'une unité (on n'oublie pas que ces formules sont

cycliques, et que le premier et le dernier terme sont consécutifs dans le cycle).

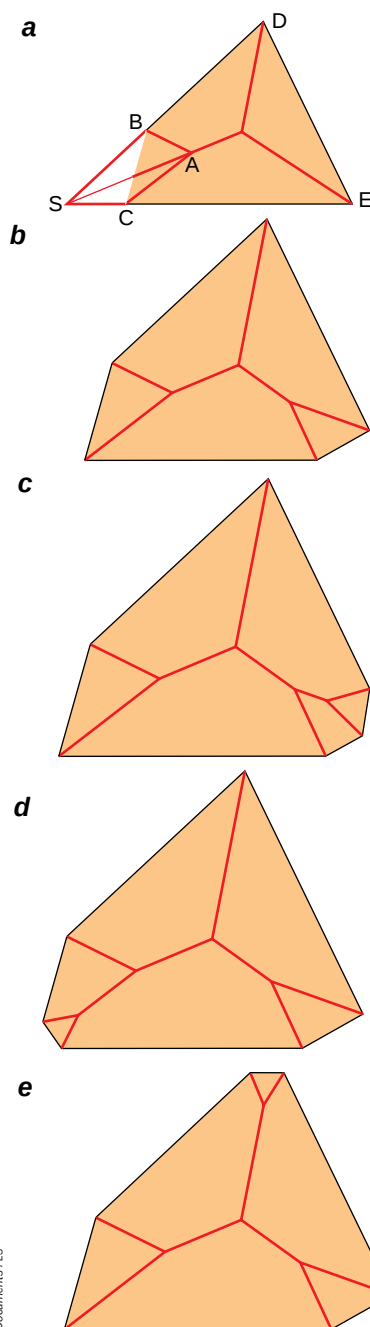
L'opération inverse a également un effet simple : elle correspond à la suppression d'un zéro, dans la formule, et à la diminution d'une unité des deux nombres qui l'encadrent (ce qui est toujours possible, puisque les formules ne comportent jamais deux zéros consécutifs : on démontre que deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf dans le cas du tétraèdre et dans des cas particuliers qui ont été écartés).

Comment dessiner un tectoèdre ou un tas de sable, connaissant sa formule ? Observons tout d'abord que le nombre de termes de la formule donne le nombre de côtés du polygone de base. Il suffit de remonter la formule, par des suppressions de zéros, jusqu'à celle du tétraèdre, en notant les formules intermédiaires. Celles-ci constituent en effet un « programme » des troncatures successives à effectuer, à partir du tétraèdre, pour parvenir au tectoèdre ou au tas de sable cherché.

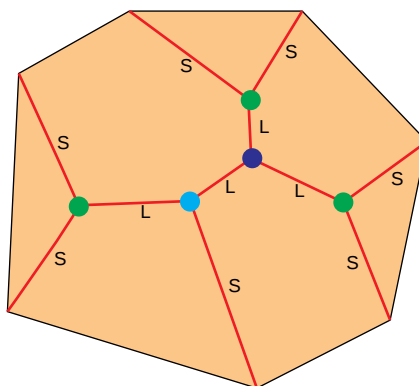
Par exemple, dans la formule 20110, si on supprime le 0 en deuxième position, on obtient 1010 ; puis on répète l'opération pour le 0 en deuxième position de cette nouvelle formule, et l'on trouve 000, qui est la formule du tétraèdre. Chaque formule définit donc une classe de tectoèdres, donc aussi de tas de sable, dont les faces sont réparties de la même manière, avec le même nombre de côtés. Comme un polygone de base donné détermine un seul tas de sable, la classification des tas de sable par leur formule est aussi une classification des polygones convexes : deux polygones appartiennent à la même classe si les tas de sable qui se forment sur eux ont la même formule.

À l'aide des transformations de formule associées à la troncature et à son opération inverse, notre étude des diverses formes de tas de sable devient purement numérique. Malheureusement, si cette méthode donne bien toutes les formules d'ordre n à partir de celles d'ordre $n - 1$, elle les donne avec des répétitions, la même formule pouvant être obtenue plusieurs fois, à une permutation ou à une inversion près. En intercalant des zéros dans la formule 20110 du tectoèdre d'ordre cinq, on obtient les cinq suites : 301110, 210210, 202020, 201201, 030111, qui se ramènent aux trois formules 301110, 210210, 202020. Ce sont les trois variétés de tectoèdres d'ordre six que nous avons trouvées en faisant des tas de sable.

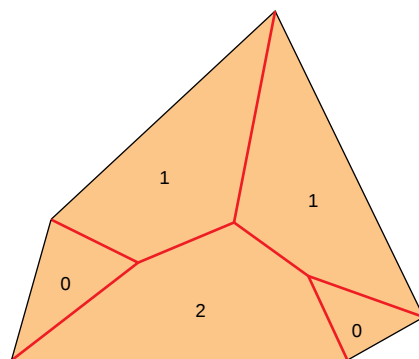
Combien existe-t-il de variétés de tectoèdres, pour les valeurs de n supérieures à six ? Pour les tectoèdres à base heptagonale ou octogonale, on parvient



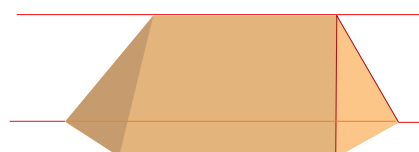
3. Projection de tas de sable sur un plan horizontal.



4. Les sommets sont de trois types, selon la nature des arêtes qui y convergent : de type 1 (en vert) quand deux arêtes sont latérales (elles sont issues de sommets du polygone de base) et une arête est sommitale (entre deux sommets qui n'appartiennent pas au polygone de base), de type 2 (en bleu ciel) quand deux arêtes sommitales et une arête latérale y convergent, et de type 3 (en violet) quand il est commun à trois arêtes sommitales.



5. On représente un tectoèdre par sa formule. Pour établir cette dernière, on numérote 0 les faces triangulaires, 1 les faces à quatre côtés, 2 les faces pentagonales, etc. Ainsi la formule du tectoèdre ci-dessus est 20110.



6. Le seul tectoèdre qui ne s'obtient pas par troncature à partir d'un tétraèdre.

encore à effectuer l'opération précédente à la main, mais le travail est rapidement fastidieux, et un ordinateur s'impose. Voici, pour les valeurs de n comprises entre 6 et 15, le nombre de formules que l'on peut respectivement déterminer : 3, 4, 12, 27, 82, 228, 733, 2282, 7528, 24834.

Les temps de calcul augmentent rapidement avec n , et même un ordinateur puissant finit par s'essouffler. Nous devons nous contenter de calculer le nombre des classes de tectoèdres en fonction de leur ordre, sans chercher à déterminer leur formule. Un détour nous y conduit, de façon inattendue.

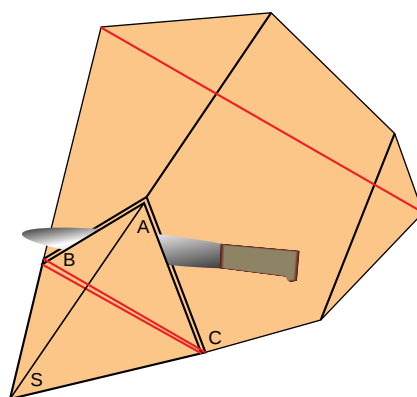
DUALITÉ

Depuis Euler, on sait associer à un polyèdre donné un autre polyèdre, nommé dual du premier, en opérant de la façon suivante : on marque un point dans chaque face et on relie par un segment les points qui sont situés dans des faces ayant une arête commune. Ainsi le dual d'un cube est un octaèdre, et réciproquement. Pour les tectoèdres, nous opérerons de manière un peu différente, en ne tenant pas compte de la base.

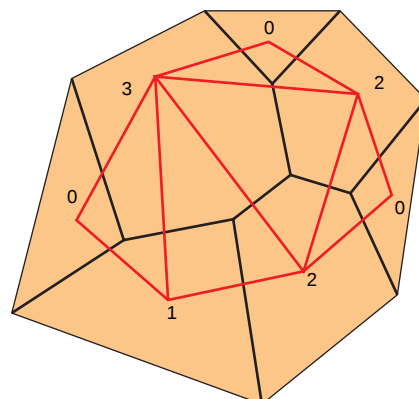
On peut alors faire la construction indiquée précédemment sur la projection du tectoèdre. Le résultat obtenu (voir la figure 8) est assez surprenant : c'est le dessin d'un polygone où sont tracées des diagonales. Les côtés de ce polygone correspondent aux arêtes latérales du tectoèdre (ils les coupent), et les diagonales à ses arêtes sommitales (elles les coupent). En outre, les diagonales partagent ce polygone en triangles dont les sommets sont ceux du polygone lui-même et qui ont, en commun avec lui, deux côtés, un seul côté ou aucun, selon qu'ils contiennent un sommet de type 1, 2 ou 3. Autrement dit, le problème initial de géométrie à trois dimensions se ramène à un problème de géométrie plane, celui de la triangulation des polygones.

Tout ce qui a été démontré pour les tectoèdres a un énoncé dual valable pour cette triangulation. Considérons, par exemple, la formule d'un tectoèdre : puisque ses termes indiquent le nombre des arêtes sommitales des différentes faces, ils indiquent aussi le nombre des diagonales issues des sommets du polygone dual. Autrement dit, la formule d'un tectoèdre caractérise aussi la triangulation du polygone associé par dualité.

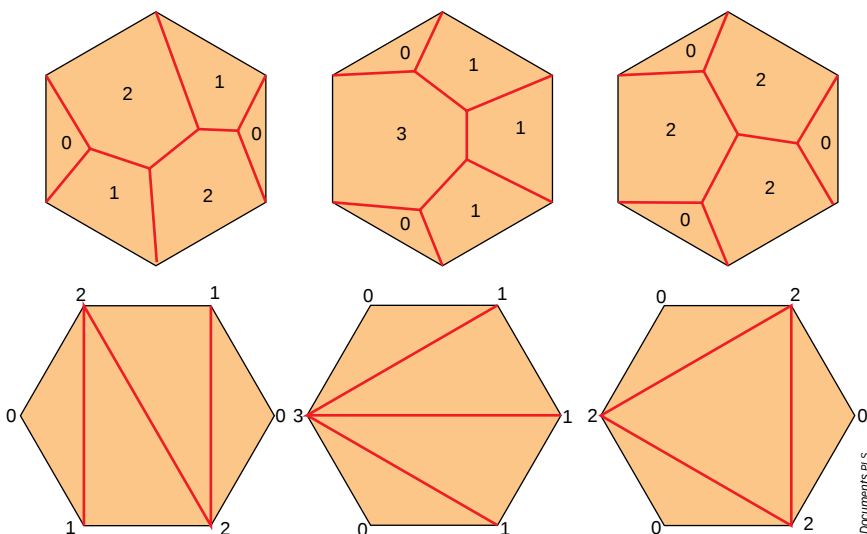
L'opération duale de la troncature est l'adjonction au polygone triangulé d'un triangle supplémentaire ayant pour base un côté du polygone. Cette adjonction provoque l'apparition d'un sommet d'où



7. Les troncatures font apparaître des faces triangulaires.



8. Un tectoèdre et le dual de sa projection (en rouge).



9. Les trois tectoèdres que l'on peut construire sur un hexagone régulier (en haut) et les trois triangulations de ces tectoèdres (en bas). En haut, les nombres repèrent le nombre d'arête sommitales de faces ; en bas, ils correspondent au nombre de diagonales issues du sommet qui leur correspondent.

ne part aucune diagonale (donc d'un zéro dans la formule) et l'augmentation d'une unité du nombre des diagonales issues des deux autres sommets de ce triangle. La figure 9 montre les trois triangulations possibles de l'hexagone, duales des trois tectoèdres d'ordre six.

La triangulation des polygones est un problème classique de géométrie combinatoire : on sait calculer le nombre des triangulations possibles d'un polygone. Le problème de dénombrement des tectoèdres est donc résolu. Voici la formule qui donne ce nombre en fonction de n :

$$(2n-5)!/n!(n-3)!+3(n-3)!/2(n/2)!((n-4)/2)! + (n-3)!/2((n-1)/2)!((n-3)/2)! + ((2n-6)/2)!/3(n/3)!((n-3)/3)!$$

Dans cette formule, $n!$ (qui se lit «factorielle n ») représente le produit des n premiers nombres entiers. De surcroît, on convient de remplacer par zéro tout terme contenant une factorielle portant sur des nombres non entiers. On retrouve alors les valeurs précédemment calcu-

lées sur ordinateur. Ce nombre augmente très vite avec n : pour n égal à 20, il est supérieur à dix millions.

En faisant des tas de sable, nous avons été amenés à étudier de curieux polyèdres, et aussi à découvrir une classification insolite des polygones convexes. Les tas de sable nous réservent-ils d'autres surprises ?

Roger Iss est ancien professeur de mathématiques spéciales du Lycée Kléber, à Strasbourg.

Roger Iss, *Considérations sur une famille de polyèdres*, in *L'Ouvert* (publication de l'Association des professeurs de mathématiques d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg), n° 51, juin 1988.

Roger Iss, *Des tas de sable aux graphes*, in *L'Ouvert*, n° 56, septembre 1989.

Roger Iss, *Les tectoèdres*, Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, n° 402, mars 1996.

Le briquet pneumatique

PAUL BOUTIÉ • IOANNIS MANOS

Un principe de physique simple pour allumer un feu.

Pour allumer un feu, on doit apporter de l'énergie. Si la friction du bois et la percussion de la pierre sont des méthodes bien connues, le procédé fondé sur l'échauffement de l'air par compression est, au contraire, resté à l'état de curiosité. Évoqué en quelques lignes dans les traités d'ethnologie et connu dans les laboratoires de physique au début du XIX^e siècle, le

briquet pneumatique aurait connu un grand succès si, pendant la première moitié du XIX^e siècle, l'invention des allumettes n'était venue le faire sombrer dans un oubli presque complet.

Le briquet pneumatique utilise un principe physique connu de tous ceux qui ont déjà gonflé un pneu de bicyclette : lorsque l'on comprime un gaz, on le chauffe. Si l'on place à l'intérieur du

volume chauffé une substance dont la température d'inflammation est inférieure à la température obtenue, elle s'embrase. En pratique, on réalise le briquet à l'aide d'un cylindre et d'un piston afin de former une sorte de petite pompe à vélo dépourvue de sortie d'air.

En Europe, la découverte de ce principe remonte au début du XIX^e siècle, simultanément en France et en Angleterre. Un brevet fut pris en 1807, mais le succès des allume-feu fut... un feu de paille, en raison semble-t-il de leur manque de fiabilité.

En Asie du Sud-Est, des briquets fondés sur le même principe sont signalés jusque vers 1950 dans plusieurs régions, réparties entre la Birmanie, l'ancienne Indochine et l'Indonésie. Le début de leur utilisation est antérieur à 1865, date du plus ancien témoignage écrit. Comme déjà, à cette époque, l'objet est très répandu, on pense qu'il y a eu au moins deux foyers d'apparition, l'un en Europe, l'autre en Asie. Pour cette région, le principe aurait pu être découvert accidentellement en Indonésie, au



Mode d'emploi

1. Prélever un petit brin d'amadou, très aéré, le placer dans la cavité à la base du piston, sans le tasser.
2. Enduire légèrement de graisse le joint en fil de soie.
3. Tenir le cylindre fermement dans une main et poser sa base en appui sur une table ou sur le sol.
4. Introduire partiellement le piston dans le cylindre (sur environ deux centimètres).
5. Frapper sur la poignée avec le plat de la main (la base du piston doit entrer en contact avec le fond du cylindre) et, dans le même geste rapide, attraper la poignée pour ressortir le piston. Souffler sur la petite braise.

CONSEILS

- Ne pas trop graisser le joint, car de la graisse risque de se déposer au fond du tube et l'amadou devient inutilisable. Après quelques échecs, il faut changer l'amadou.
- La descente du piston doit être rapide : donner un coup sec sur la poignée.
- La remontée doit également être rapide ; sinon, la braise n'a pas assez d'oxygène et s'éteint.
- Après plusieurs usages, la couche supérieure du joint se délite. Il faut la reconstituer en refaisant quelques tours de fil sur le joint usé. Regraisser légèrement.