



5. UNE SCÈNE CLEF de Hector Servadac, de Jules Verne, fait la couverture de la première parution du magazine américain de science-fiction *Amazing Stories*, publié pour la première fois à New York en avril 1926.

invente souvent des personnages qui n'ont plus de rapport avec la science ; les quelques scientifiques qui restent sont, de plus en plus souvent, des fous mégalomanes.

Verne essaye aussi de faire connaître certains abus sociaux et environnementaux contemporains. Par exemple, dans *L'Île à hélice*, il décrit le fléau des politiciens et des missionnaires qui détruisirent les cultures indigènes de diverses îles polynésiennes. Dans *Le Sphinx des glaces*, il met en garde contre l'extinction imminente des baleines. Dans *Le Testament d'un excentrique*, il signale la pollution causée par l'industrie du pétrole, et, dans *Le Village aérien*, il dénonce le massacre des éléphants pour leur ivoire.

La transformation littéraire de Verne transparait encore plus nettement quand il reprend des œuvres écrites au début de sa carrière. Ainsi, dans *Sans dessus dessous*, volet final d'une trilogie commencée avec *De la Terre à la Lune*, les personnages de Verne ne se contentent plus d'envoyer des capsules habitées dans l'espace ; ils cherchent à modifier l'inclinaison de la Terre à l'aide d'un canon gigantesque. Totalement indifférents aux catastrophes écologiques et humaines qui résulteraient d'un tel projet, ils veulent faire fondre la calotte polaire pour mettre à jour ses immenses richesses minières. Les protagonistes de ce

roman sont des caricatures dont Verne expose l'irresponsabilité et l'orgueil.

De l'homme au mythe

Malgré des difficultés familiales, une santé déclinante et la mort du frère qu'il aimait tant, Verne continue de composer deux ou trois romans chaque année jusqu'à la fin de sa vie. Toutefois ces derniers écrits lui rapportent peu. *L'Île à hélice* et *Le Sphinx des glaces*, par exemple, sont vendus à moins de 10 000 exemplaires. Certains de ses derniers romans, comme *Le Superbe Orénoque*, *Les Frères Kip*, *Bourses de voyage* et *L'Invasion de la mer*, n'atteignent même pas les 5 000 exemplaires, pour la première édition.

Avec un tiroir plein de manuscrits inachevés dans son bureau, Verne se sent mal quelques semaines avant son 78^e anniversaire. Lucide jusqu'à la fin, il demande à sa femme, Honorine, de rassembler la famille autour de lui et il meurt paisiblement le 24 mars 1905. Il est enterré près de son domicile, à Amiens, et deux ans plus tard, une sculpture commémorative est placée sur sa tombe. Elle montre Verne sortant de sa tombe, un bras tendu vers les étoiles.

Deux décennies après sa mort, un périodique américain intitulé *Amazing Stories* – le premier magazine entièrement consacré aux histoires de science et d'aventures – utilise une représentation de la tombe de Verne comme logo. Pour décrire ces récits, l'éditeur, Hugo Gernsback, inventa le terme «scientifiction» qui devint plus tard science-fiction. Et progressivement, Verne resta connu pour sa vision optimiste du progrès scientifique.

Arthur EVANS est l'éditeur de la revue *Science-Fiction Studies*. Ron MILLER est illustrateur scientifique.

Arthur B. EVANS, *Jules Verne Rediscovered*, Greenwood Press, 1988.

William BUTCHER, *Jules Verne's Journey to the Centre of the Self*, St. Martin's Press, 1991.

Paul K. ALKON, *Science Fiction Before 1900*, Twayne, 1994.

Brian TAVES et Stephen MICHALUK, *The Jules Verne Encyclopedia*, Scarecrow Press, 1996.

Herbert LOTTMAN, *Jules Verne : An Exploratory Biography*, St. Martin's Press, 1997.

Votes étranges et paradoxaux

JEAN-PAUL DELAHAYE

Manipulation d'informations confidentielles lors des opérations de vote.

Condorcet, illustre encyclopédiste et démocrate convaincu du *Siècle des lumières*, a montré qu'à des élections à la majorité simple A peut battre B (dans un vote opposant A à B), B peut battre C (dans un vote opposant B à C) et C peut battre A (dans un vote opposant A à C). La situation la plus simple créant ce paradoxe ne fait intervenir que trois électeurs, le premier ayant pour ordre de préférence A B C, le second B C A et le troisième C A B. Comment être juste en matière électorale ? s'interrogeait Condorcet.

Notre intuition d'électeur est souvent mise en défaut. Certains paradoxes naissent de l'arithmétique des systèmes de votes, que nous maîtrisons mal. D'autres font intervenir la manipulation d'informations confidentielles qui autorise des opérations imprévues ou même à première vue impossibles. Les trois exemples qui suivent illustrent les difficultés de la démocratie : pour vous donner la possibilité de jouer, nous les présentons sous forme d'énigmes.

1. À UN LOGICIEN RIEN D'IMPOSSIBLE

Une assemblée composée d'un nombre impair de logiciens a été capturée par le *grand méchant logicien* qui veut les enrôler dans sa secte. Il leur laisse une chance d'échapper à l'embrigadement. Il dessine dans le dos de chacun d'eux une croix noire ou une croix rouge en procédant au hasard (il s'aide d'une pièce de monnaie qu'il jette en cachette). Chaque logicien voit les croix dessinées sur le dos des autres logiciens, mais ne voit pas celle qu'il porte. Aucune communication n'est permise entre les logiciens. Un scrutin est organisé, et chaque logicien vote pour indiquer s'il pense qu'il y a un nombre pair de croix rouges au total, ou un nombre impair de croix rouges au total. L'abstention n'est évidemment pas permise.

Le *grand méchant logicien* comptabilise les réponses et considère la réponse

majoritaire (il y en a une, puisque le nombre de logiciens capturés est impair). Si le vote majoritaire est correct, les logiciens sont libérés et peuvent aller s'amuser à traiter toutes les énigmes et paradoxes qu'ils trouvent intéressants ; sinon, ils sont condamnés à servir d'esclaves au *grand méchant logicien*, qui les oblige à trouver des applications à la «logique planaire» inventée par lui et qu'il considère comme la trouvaille du siècle.

Chaque logicien se dit : «Puisque la parité du nombre total de croix rouges dépend de celle que j'ai dans le dos, qui a été tirée au hasard, je ne peux rien faire de mieux que voter au hasard. Il en est de même de tous les autres logiciens, et donc globalement nous ne pouvons rien espérer de mieux qu'être libérés une fois sur deux.»

Aussi étonnant que cela paraisse, il existe une méthode de vote que les logiciens peuvent deviner et appliquer et qui leur permettra d'être libérés dans bien plus de la moitié des cas. Quelle est cette méthode ?

Solution

Imaginons que tous les logiciens adoptent la règle suivante :

«Je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à la parité de ce décompte. Si je vois sur le dos des autres logiciens autant de croix noires que de croix rouges, je vote sur la parité en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge.»

Pour analyser l'effet d'une telle méthode, distinguons trois cas.

Cas 1. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est supérieur à un (par exemple, six rouges et trois noires), alors les logiciens font en majorité une hypothèse correcte et donc trouvent la bonne réponse. Le vote majoritaire est alors correct et les logiciens sont libérés.

Cas 2. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de un en faveur des rouges (par

exemple, cinq rouges et quatre noires), alors d'une part tous les porteurs de croix noires (qui voient plus de rouges que de noires) votent faussement, puisqu'ils font l'hypothèse fautive qu'ils portent une croix rouge ; d'autre part, tous les porteurs de croix rouges, qui voient autant de rouges que de noires, votent correctement (puisque, dans un tel cas, ils font l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Les rouges étant majoritaires, le vote est majoritairement correct et les logiciens sont libérés.

Cas 3. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de un en faveur des noires (par exemple, quatre rouges et cinq noires), alors tous les porteurs de croix rouges (qui voient plus de noires que de rouges) votent faussement (ils font une mauvaise hypothèse), ainsi que tous les porteurs de croix noires qui voient autant de rouges que de noires (et qui font injustement l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Donc le vote est erroné (à 100 pour cent). C'est le seul cas où le vote est erroné. Les cas 2 et 3 se compensent et, dans la majorité des situations (grâce au cas 1), les votes des logiciens sont corrects.

Pour évaluer plus précisément le nombre de cas où le vote sera malheureux, considérons le nombre de logiciens m . Ce nombre peut s'écrire $m = 2n + 1$ (car m est impair). Le nombre de cas où le vote est incorrect est le nombre de cas où il y a n croix rouges et $n + 1$ croix noires. Ce nombre est précisément $(2n + 1)!/[n!(n + 1)!]$ (nombre de façons de choisir n éléments parmi $2n + 1$). Il y a 2^m cas possibles au total (deux façons de peindre la croix du premier logicien, deux façons de peindre la croix du deuxième logicien, etc.). Les résultats pour 3, 5, 7, 9, 15 et 25 logiciens sont donnés sur la figure 2.

Plus le nombre de logiciens est grand, meilleure est la méthode, et d'ailleurs on montre que, lorsque m tend vers l'infini, le rapport du nombre de cas défavorables sur le nombre total de cas tend vers zéro.

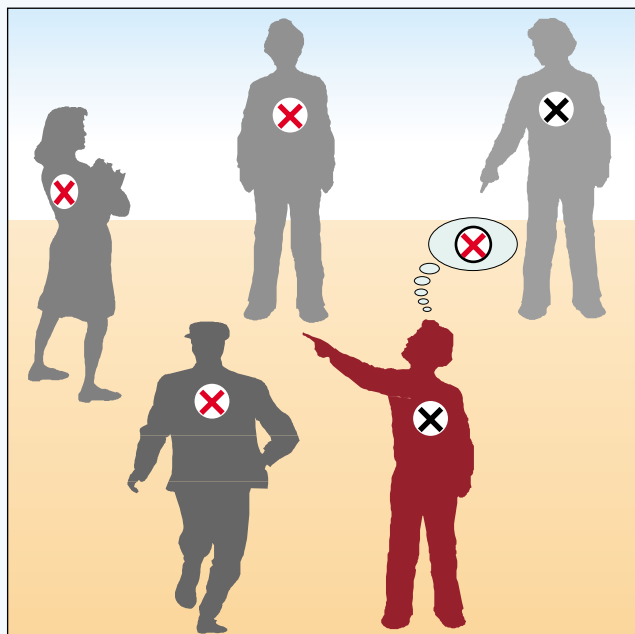
On peut critiquer cette solution en remarquant que les logiciens, s'ils n'ont pas pu s'entendre avant l'épreuve et aussi intelligents soient-ils, n'ont pas de raisons d'adopter tous la même stratégie qui donne un rôle particulier au rouge par rapport au noir. Il est plus raisonnable de penser que la moitié des logiciens à peu près adopte la méthode :

A. «Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge. Sinon, je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à cette hypo-

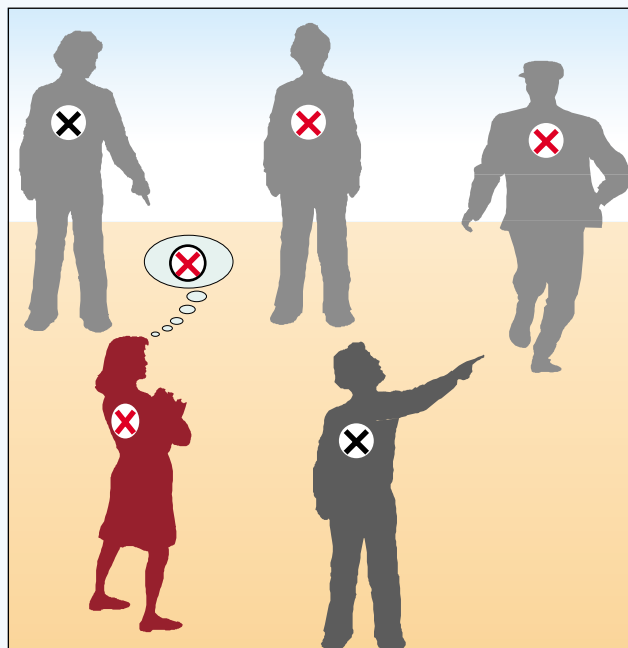
1. LE PROBLÈME DES LOGICIENS

Chaque logicien ignore s'il porte une croix rouge ou noire dans le dos. Les croix ont été choisies au hasard. Chaque logicien doit voter pour indiquer s'il pense que le nombre total de croix rouges est pair ou impair. La réponse majoritaire peut être bonne ou fautive. Si elle est bonne, tous les logiciens sont libérés ; sinon, ils restent emprisonnés.

Est-il possible pour les logiciens de voter de telle façon que plus d'une fois sur deux ils soient libérés ? Oui, en appliquant la règle détaillée ci-dessous.



Je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente, ici une croix de couleur rouge (ici, je me trompe).



Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge (ici, j'ai raison).

- a) Dans 1 cas sur 32, toutes les croix sont rouges. Tous les votes individuels sont corrects. Le vote majoritaire est correct. Au total, 5 votes corrects.
- b) Dans 5 cas sur 32, il y a 1 croix noire et 4 croix rouges. Chacun de ces cas donne 4 votes corrects et 1 vote incorrect. Le vote majoritaire est correct dans les 5 cas. Parmi les 25 votes individuels, 20 votes sont corrects et 5 sont incorrects.
- c) Dans 10 cas sur 32, il y a 2 croix noires et 3 croix rouges. Chacun de ces cas donne 3 votes corrects et 2 votes incorrects. Le vote majoritaire est correct dans les 10 cas. Parmi les 50 votes individuels, 30 votes sont corrects et 20 sont incorrects.
- d) Dans 10 cas sur 32, il y a 3 croix noires et 2 croix rouges. Chacun de ces cas donne 5 votes incorrects. Le vote majoritaire est incorrect dans les 10 cas. Les 50 votes individuels sont incorrects.
- e) Dans 5 cas sur 32, il y a 1 croix rouge et 4 croix noires. Chacun de ces cas donne 4 votes corrects et 1 vote incorrect. Le vote majoritaire est correct dans les 5 cas. Parmi les 25 votes individuels, 20 votes sont corrects et 5 sont incorrects.
- f) Dans 1 cas sur 32, toutes les croix sont noires. Tous les votes individuels sont corrects. Le vote majoritaire est correct. Au total, 5 votes corrects.

COULEUR DÉDUITE	COULEUR RÉELLE	COULEURS VUES	
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗	5 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	4 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	1 vote incorrect
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	3 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	2 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	3 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	2 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	4 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	1 vote incorrect
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	5 votes corrects

Sur les $32 \times 5 = 160$ votes exprimés dans les 32 cas possibles, on a 80 votes corrects, 80 votes incorrects, mais, sur les 32 votes, le vote majoritaire est incorrect dans seulement 10 cas.

thèse», et que l'autre moitié à peu près adopte la méthode symétrique :

B. «Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix noire. Sinon, je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à cette hypothèse.»

Que se passe-t-il alors ? Dans le cas 1, rien de changé. Dans le cas 2, il suffit qu'un seul porteur de croix rouge joue *B* plutôt que *A* pour que le vote majoritaire soit mauvais. Et donc, sauf exception, le cas 2 sera défavorable. Le cas 3 est de même défavorable, sauf hasard exceptionnel (1 fois sur 2^n).

Par rapport à notre calcul précédent, il faut maintenant doubler le nombre de cas défavorables. Il n'est plus aussi clair que la méthode soit intéressante. Un petit calcul montre cependant que, si le nombre de logiciens est supérieur à 7, alors la stratégie décrite est favorable aux logiciens. Rien d'important n'est donc changé si les logiciens n'ont pas eu la possibilité de s'entendre préalablement à l'épreuve.

LA JUSTE MAJORITÉ

Reste une question : pourquoi le raisonnement présenté dans l'énoncé est-il faux ? La réponse est liée à une remarque que connaissent bien les hommes politiques français : quand une élection se fait en plusieurs endroits, pour gagner la majorité, il n'est pas nécessaire d'avoir plus de voix que l'adversaire, mais d'en avoir un peu plus dans la majorité des sites. On peut même avoir au total moins de voix que son adversaire et gagner la majorité des élections, donc, par exemple, emporter une mairie dans une ville où l'on a moins de voix que l'opposition (Gaston Defferre, il y a quelques années, par un judicieux découpage des arrondissements de Marseille, avait réussi ce bel exploit).

Dans notre histoire, quand on évalue la probabilité de gagner, c'est comme s'il y avait plusieurs votes (un pour chaque tirage au sort de la répartition des croix rouges ou noires), et il est bien exact qu'une fois sur deux, lors du déroulement de tous les scrutins possibles, la réponse qu'un logicien propose est fautive. Toutefois, cela n'entraîne pas que le vote général est faux une fois sur deux, car lorsque le vote est bon, la majorité est souvent faible, alors que, lorsque le vote est mauvais, ce sont beaucoup de votants qui se sont trompés (dans certains cas, 100 pour cent).

Pour vous convaincre de cela, vous pourrez examiner le cas de cinq logiciens de la figure 1.

2. VOTES MAJORITAIRES MALHEUREUX

NOMBRE DE LOGICIENS	NOMBRE TOTAL DE CAS	NOMBRE DE CAS DÉFAVORABLES	PROBABILITÉ D'ERREUR
3	8	3	37,5 %
5	32	10	31,25 %
7	128	35	27,34 %
9	512	126	24,61 %
15	32768	6435	19,64 %
25	33554432	5200300	15,49 %

En conclusion, dans une série d'élections, pour gagner une majorité de fois, ce qui est important ce n'est pas d'avoir la majorité de tous les suffrages qui sont exprimés au total, mais d'avoir une majorité de fois la majorité, ce qui est bien différent et ce qui est possible, même si, en cumulant les résultats de toutes les élections, on est minoritaire.

Nos logiciens, grâce à leur intelligence, réussissent à avoir raison collectivement plus souvent qu'ils n'ont raison individuellement. Cette remarquable propriété de leur procédé de vote est peut-être celle qu'ont recherchée les concepteurs du *Scrutin majoritaire à deux tours* des élections législatives françaises. Celui-ci, on le sait bien, en défavorisant les partis extrémistes et démagogues, conduit à des résultats où les électeurs choisissent collectivement un bien plus grand nombre de fois de rester modérés qu'ils ne le choisissent individuellement. Ce problème de vote est dû à J. Aspnes, R. Beigel, M. Furst et S. Rudich et m'a été signalé par Gilles Brassard, de l'Université de Montréal.

2. L'ABSURDITÉ DU VOTE AU PLUS FORT RESTE

Examinons comment se déroule un vote au scrutin proportionnel de liste au plus fort reste. Il y a n électeurs et m représentants à élire ; chaque électeur choisit une liste qui comporte m noms. Il est de bon sens de vouloir que les listes ayant reçu le plus de votes aient le plus d'élus.

Dans une première phase du dépouillement, on compte le nombre de bulletins obtenus par la liste *A*, et l'on désigne par a ce nombre. On divise le produit $a.m$ par n , ce qui donne le quotient q et le reste r : $a.m = q.n + r$, et l'on attribue q sièges à la liste *A* (pris bien sûr en tête de la liste classée *A*).

On fait de même pour chacune des autres listes.

L'idée justifiant ce calcul est que, (i) chaque électeur vote pour m représentants, et donc que son bulletin exprime en fait m voix (d'où le calcul de $a.m$) et que, (ii) dès qu'une liste a obtenu n voix, elle gagne un siège (d'où le calcul du quotient $a.m = q.n + r$). Dans la seconde phase, on attribue les postes restants aux listes qui ont les plus forts restes dans l'ordre décroissant des restes calculés. Voici maintenant l'énoncé de l'énigme tirée du Sixième championnat international des jeux mathématiques. Il y a trois listes et sept représentants à élire. Lors du dépouillement, on compte 102 bulletins et l'on attribue deux sièges à la liste *A*, deux à la liste *B* et trois à la liste *C*. On découvre alors une double erreur : d'une part, ce n'est pas sept mais huit sièges qu'il faut pourvoir et, d'autre part, un bulletin était resté dans l'urne en faveur de la liste *A*. Après correction, la liste *A* perd un siège. Cela est paradoxal, puisqu'il y a un siège de plus à pourvoir et un bulletin de plus en faveur de la liste *A*. Sachant qu'il n'y avait ni bulletin blanc, ni bulletin nul, trouvez le nombre de bulletins en faveur de chacune des listes.

Solution

En procédant par tâtonnement, on découvre qu'il y a 21 bulletins pour *A*, 34 pour *B* et 48 pour *C*. En effet, cela répond bien au problème.

Lors du premier calcul (un siège et un bulletin oublié), on obtient : $20 \times 7 = 1 \times 102 + 38$; $34 \times 7 = 2 \times 102 + 34$; $48 \times 7 = 3 \times 102 + 30$, ce qui donne donc deux sièges pour *A* (un directement, puis un par la règle du plus fort reste), deux pour *B* et trois pour *C*.

Lors du second calcul, on obtient : $21 \times 8 = 1 \times 103 + 65$; $34 \times 8 = 2 \times 103 + 66$; $48 \times 8 = 3 \times 103 + 75$, ce qui donne donc un siège pour *A*, trois pour *B* (deux directement, puis un grâce aux restes) et quatre pour *C* (trois directement, puis un grâce aux restes).

Malgré le siège supplémentaire à pourvoir et le bulletin ajouté en faveur de la liste *A*, celle-ci, après correction, a perdu un siège !

3. LE VOTE PAR TÉLÉPHONE

Cinq personnes dans cinq pays différents doivent voter pour ou contre une certaine motion. Il leur est impossible de se déplacer, et elles doivent donc exprimer leur choix par téléphone (ou par courrier électronique). Elles ne veulent faire intervenir aucun tiers, même pas pour compter les votes de chacun, et souhaitent absolument que les votes res-