

**Procurez-vous
le casse-tête *Spin-out*,
en vente à la boutique
Pour la Science,
voir pages 30 et 31.**

les quatre premiers chiffres de g sont 1011, dont la somme est 3, ou 1 modulo 2).

ON S'AMUSE AUX LABORATOIRES BELL

Cette dernière caractérisation est apprécié du voyageur de commerce qui ne se souvient plus combien de points il a visités, et, plus important, va être la clef de l'analyse du nouveau casse-tête appelé *Spin-out*, inventé par William Keister autrefois ingénieur des Laboratoires Bell et aussi ancien collègue de Frank Gray.

Ce casse-tête (voir la figure 3) se présente sous la forme d'une règle avec une partie coulissante qu'il faut faire sortir ce que des boutons pivotants semblent empêcher, car ils se bloquent les uns les autres et coïncident le casse-tête.

Au départ, tous les boutons sont verticaux et l'on comprend qu'il faudrait les placer tous à l'horizontale pour sortir la partie coulissante. Le bouton le plus à droite peut toujours être tourné (lorsqu'on pousse la partie coulissante centrale le plus à gauche possible). Un peu d'attention montre que le bouton juste à gauche du bouton en position verticale le plus à droite peut lui aussi pivoter (lorsqu'on pousse la partie coulissante centrale le plus à droite possible) et qu'en fait c'est le seul qui puisse aussi l'être (en plus de celui le plus à droite).

Ces remarques étant faites, le casse-tête est résolu ! En effet, en notant «1» les boutons verticaux et «0» les boutons horizontaux, nous venons de retrouver la première caractérisation de la suite des codes de Gros-Gray : un seul chiffre peut varier à la fois, et c'est soit le dernier, soit celui à gauche du «1» le plus à droite.

Les positions du casse-tête donc sont celles (avec la notation proposée) que le voyageur de commerce doit emprunter sur son parcours. Le casse-tête est ainsi conçu pour qu'on ne puisse pas faire autre chose que se déplacer sur le trajet optimal du voyageur de commerce multidimensionnel. Concrètement, que faut-il faire, et combien de mouvements allons-nous devoir effectuer avant de sortir la partie coulissante du casse-tête ?

Ce que nous savons du code de Gros-Gray donne la réponse. Au départ, nous sommes en position 111111 dont le numéro en binaire est (par intégration) 1010101, c'est-à-dire $64 + 16 + 4 + 1 = 85$. Notre trajet, si nous nous y prenons au

mieux, comportera donc 85 mouvements qui consisteront à passer au code de Gros-Gray 84 (84 s'écrit 1010100 en binaire et, par dérivation, a donc pour code de Gros-Gray : 1111110), puis 83 (qui a pour code de Gros-Gray 1111010), etc. Nous savons donc exactement ce qui nous reste à faire et le temps qu'il nous faudra. L'erreur à ne pas commettre serait de passer à la configuration 86 (dont le code de Gros-Gray est 1111101) et de poursuivre vers 87, ce qui nous conduirait après 36 autres mouvements à la configuration 123 (1000000), qui est une impasse.

C'est d'ailleurs la seule erreur possible pour quelqu'un de systématique qui applique la règle «déplacer alternativement le dernier bouton et le seul autre qui peut l'être». Cette méthode, que certaines personnes découvrent empiriquement permet de résoudre le casse-tête sans rien comprendre à ce qu'on fait, avec une probabilité de 50 pour cent (puisque l'on risque de partir dans la mauvaise direction). En voulant rendre le parcours

long, le concepteur du casse-tête l'a rendu assez facile, car il a dû limiter les possibilités de choix à chaque étape. Considéré de manière abstraite, le casse-tête ne propose qu'un déplacement le long d'une ligne – le trajet du voyageur de commerce – dont l'une des extrémités est une impasse et l'autre, la solution.

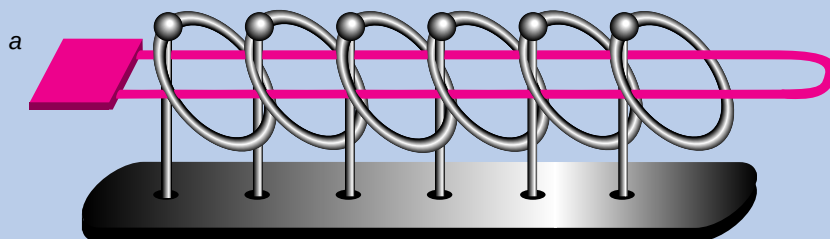
Des variantes sont faciles à imaginer, que vous pourrez vous amuser à réaliser en bois ou en carton. Voici comment obtenir certaines de ces variantes : déplacez l'encoche du bas de la règle d'une ou plusieurs largeurs de bouton, ou bien (dans le but de multiplier les choix à chaque étape) faites plusieurs encoches. Un lecteur saura-t-il faire l'analyse mathématique de ces variantes ?

LE BAGUENAUDIER, AUSSI VIEUX QUE LE MONDE ?

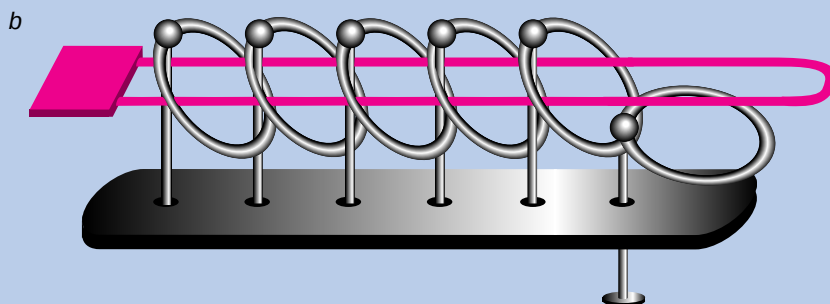
Les connaisseurs de casse-tête mathématiques auront soupçonné une analogie entre le *Spin-out* de Keister et le très ancien baguenaudier (voir la figure 4)

4. LE BAGUENAUDIER

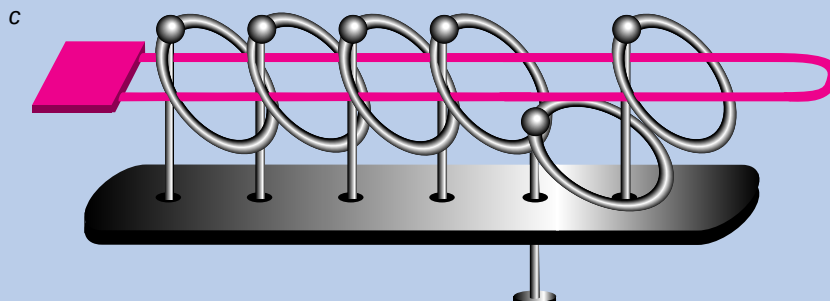
LES DEUX MOUVEMENTS (b) et (c) POSSIBLES D'UN BAGUENAUDIER À 6 ANNEAUX À PARTIR DE LA POSITION DE DÉPART (a).



POSITION DE DÉPART : 111111 EN CODE DE GROS-GRAY, 101010 = 42 EN CODE BINAIRE



POSITION CORRESPONDANT À : 111110 EN CODE DE GROS-GRAY, 101011 = 43
EN CODE BINAIRE : ON EST PARTI DANS LA MAUVAISE DIRECTION.



POSITION CORRESPONDANT À : 111101 EN CODE DE GROS-GRAY, 101001 = 41
EN CODE BINAIRE : IL FAUT CONTINUER PAR LÀ JUSQU'À 000000

aussi appelé *meleda puzzle*, Talamodspel, ou anneaux chinois. Une légende en attribue l'invention au soldat Hung Ming (181-234), qui en aurait confié la résolution à son épouse pour l'occuper pendant qu'il était parti faire la guerre. La première mention du baguenaudier est faite au milieu du xiv^e siècle sous la plume du mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576, plus connu pour sa méthode de résolution des équations du troisième degré et pour son invention des cardans), qui décrit le baguenaudier dans son *De subtilitate libri XXI* paru à Nuremberg en 1550, où il précise : «Cela de soi est inutile ; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres.»

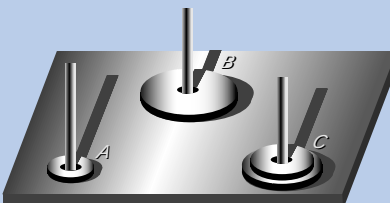
Effectivement, en Norvège, des sacs de voyage ont été équipés d'une fermeture utilisant le baguenaudier : on peut craindre que ces serrures ne se soient révélées agaçantes, par exemple lorsque leur propriétaire, pris d'une soudaine envie d'éternuer, désirait y saisir un mouchoir.

Pour résoudre le baguenaudier, l'analyse proposée pour le *Spin-out* s'applique presque mot à mot. On constate d'abord que le dernier anneau peut toujours être abaissé ou levé et que le seul autre anneau qui accepte de se déplacer est celui qui précède l'anneau levé le plus à droite (et cela à condition d'avoir tiré la double tringle centrale le plus à gauche possible). Cela suggère de coder la position du baguenaudier, en associant un «1» à tout anneau levé et un «0» à tout anneau baissé. La position de départ dans le cas d'un baguenaudier à 7 anneaux est donc 1111111, qui est le code de Gros-Gray de l'entier qui, en binaire, s'écrit 1010101, qui est 85. La suite est la même que pour le *Spin-out* : à condition de partir dans la bonne direction, vous aboutirez en 85 étapes, et aucune méthode ne peut raccourcir les manipulations nécessaires à la libération de la double tringle centrale. Si vous partez dans la mauvaise direction, vous aboutirez à une impasse correspondant à la position 1000000, qui est le code de Gros-Gray de l'entier 123, et vous serez alors obligé de repartir en arrière.

Notons deux avantages du *Spin-out* sur le baguenaudier : la commodité des manipulations et la facilité à en imaginer des variantes. Même les casse-tête millénaires sont perfectibles !

Une fois parti dans la bonne direction, la seule règle à appliquer est : «déplacer alternativement l'anneau le plus à droite et l'anneau mobile le plus à gauche (qu'on identifie en tirant au maximum la double tringle centrale)».

L'anneau que l'on déplace, d'après ce que nous avons dit concernant le

5. LES TOURS DE HANOÏ		
		
SOLUTION OPTIMALE EN 15 MOUVEMENTS DANS LE CAS DE QUATRE DISQUES		
POSITION DES DISQUES	DÉPLACEMENTS À FAIRE	DISQUES DÉPLACÉS
A B C		
[4321, ,]	AB	1
[432, 1,]	AC	2
[43, 1, 2]	BC	1
[43, , 21]	AB	3
[4, 3, 21]	CA	1
[4, 1, 3, 2]	CB	2
[4, 1, 32,]	AB	1
[4, , 321,]	AC	4
[, 321, 4,]	BC	1
[, 32, 4, 1]	BA	2
[, 2, 3, 4, 1]	CA	1
[, 21, 3, 4,]	BC	3
[, 21, , 43]	AB	1
[, 2, , 1, 43]	AC	2
[, , 1, 432]	BC	1
[, , , 4321]		

5. Dans cette solution, on reconnaît la suite copie-augmentée déjà rencontrée dans le voyageur de commerce à n dimensions. Récemment, on a prouvé que la suite des déplacements ne se répète jamais deux fois consécutivement (quel que soit le nombre de disques envisagé). La règle «déplacer alternativement le disque le plus petit (de A vers B, de B vers C, ou de C vers A), puis un autre disque» suffit pour trouver la solution optimale qui, dans le cas de n disques, est une succession de $2^n - 1$ déplacements.

code de Gros-Gray, a pour numéro (en numérotant de droite à gauche) l'entier correspondant de la suite de la copie-augmentée 1213121412131215... qu'on parcourt à l'envers à partir de son 85^e élément.

DES ANNEAUX CHINOIS AUX TOURS DE HANOÏ

Cette suite donne d'ailleurs une solution à un autre casse-tête célèbre et ancien : les tours de Hanoï. Il s'agit de déplacer une pile de disques de taille décroissante en n'utilisant que trois encadrements A, B et C (formant un triangle équilatéral) et en s'imposant à chaque étape de ne jamais poser un disque que sur un disque plus grand. La solution optimale, qui demande $2^n - 1$ étapes, consiste à déplacer alternativement le disque de taille 1 (le plus petit) dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de taille 2 (le second en taille), puis le premier (dans le sens des aiguilles d'une montre), puis le troisième, etc.,

en suivant le schéma indiqué par la suite copie-augmentée 12131214...

Ceux qui trouvent que la suite de la copie-augmentée est trop compliquée peuvent retenir la solution suivante, encore plus courte et plus simple (analogue à celles énoncées plus haut pour le *Spin-out* et le baguenaudier) : «déplacer alternativement le disque le plus petit dans le sens des aiguilles d'une montre, puis le seul disque disponible d'après les règles».

Un résultat récent dû aux mathématiciens J.-P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall et J. Shallit indique une propriété remarquable de la suite des mouvements décrivant la solution optimale dont nous avons dit qu'elle était constituée de $2^n - 1$ déplacements. Il y a six mouvements possibles à chaque étape : prendre le disque en A et le mettre en B, prendre le disque en B et le mettre en C, etc., qu'on désigne par AB, BC, CA, BA, CB, AC. Dans le cas de quatre disques, la solution optimale consiste en la suite de déplacements AB AC BC AB CA CB AB AC BC BA CA BC AB AC BC. Les quatre mathématiciens ont prouvé qu'aussi grand que soit le nombre de disques considérés, les déplacements décrivant la solution optimale ne se répètent jamais deux fois consécutivement : vous n'aurez jamais deux fois de suite AB, ni deux fois de suite AB AC, etc. On n'a jamais épuisé le pouvoir d'inspiration des bons casse-tête mathématiques !

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J.-P. ALLOUCHE, D. ASTOORIAN, J. RANDALL et J. SHALLIT, *Morphisms, Squarfree Strings, and the Tower of Hanoi Puzzle*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 651-658, 1994.

A. DELEDICQ, *Mathématiques buissonnières*, éditions CEDIC, 1975.

P. van DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World*, Key Curriculum Press. Trad. française : *Mille casse-tête du monde entier*, éditions du Chêne, 1977.

A. DEWDNEY, *Le Yin et le Yang, récursivité et itérations, les Tours de Hanoï et le Baguenaudier*, in *Récréations informatiques*, Pour La Science, février 1985.

E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome 1, Paris 1891. Réédition Librairie Scientifique Blanchard, 1992.

Ian STEWART, *Four Encounters with the Sierpinski's Gasket*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, n° 1, pp. 52-64, 1995.

Des vaches dans le labyrinthe

IAN STEWART

«Où sont les vaches?» est un labyrinthe autoréférentiel n'ayant rien à voir avec les vaches!

Dans les mathématiques sérieuses, les labyrinthes sont moins rares que vous pourriez le croire. En effet, toute recherche mathématique requiert que vous trouviez un itinéraire à travers un labyrinthe d'énoncés, le passage d'un énoncé au suivant étant une déduction mathématique valide. Un nouveau type de labyrinthe, inventé par Robert Abbott, de Jupiter, en Floride, et nommé «Où sont les vaches?», est à la

fois géométrique et logique. Il est extrait de son nouvel ouvrage *Supermazes* (Super-labyrinthes) (Prime Edition, Rocklin, Californie, 1996). Certains lecteurs se souviendront de R. Abbott comme inventeur du jeu de cartes Éleusis, décrit par Martin Gardner dans *Pour la Science*, en décembre 1977.

Le labyrinthe de R. Abbott est fondé sur un concept logique paradoxal : celui d'autoréférence. Les énoncés autoréfé-

rents sont, pour les logiciens et les philosophes, causes de migraines. Un exemple est associé au nom d'Épiménides, un Crétois qui déclarait que tous les Crétois étaient menteurs, ce qui peut se réduire à :

CET ÉNONCÉ EST FAUX.

L'est-il ou ne l'est-il pas ? Une contradiction pointe le nez dans chaque cas. Et il y a des énoncés mutuellement référentiels, tels :

L'ÉNONCÉ QUI SUIT EST VRAI.

L'ÉNONCÉ QUI PRÉCÈDE EST FAUX.

Un champ de mines logique!

L'autoréférence est un important domaine d'étude pour les logiciens, mais la question véritablement importante (à mon point de vue) est celle-ci : l'autoréférence peut-elle être utilisée pour ajouter une difficulté supplémentaire aux labyrinthes ? La réponse, que j'ai plaisir à retranscrire, est : «Oui.»

Le labyrinthe de R. Abbott est représenté sur la figure ci-dessous. Non seulement le texte est autoréférentiel, mais les règles du labyrinthe changent selon votre déplacement. Pour parcourir ce labyrinthe, il vous faut les deux mains, et il est utile de tenir un crayon ou tout autre «pointeur» dans chacune d'elles

