

aussi appelé *meleda puzzle*, Talamodspel, ou anneaux chinois. Une légende en attribue l'invention au soldat Hung Ming (181-234), qui en aurait confié la résolution à son épouse pour l'occuper pendant qu'il était parti faire la guerre. La première mention du baguenaudier est faite au milieu du xiv^e siècle sous la plume du mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576, plus connu pour sa méthode de résolution des équations du troisième degré et pour son invention des cardans), qui décrit le baguenaudier dans son *De subtilitate libri XXI* paru à Nuremberg en 1550, où il précise : «Cela de soi est inutile ; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres.»

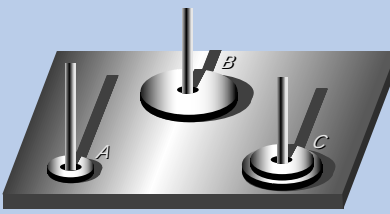
Effectivement, en Norvège, des sacs de voyage ont été équipés d'une fermeture utilisant le baguenaudier : on peut craindre que ces serrures ne se soient révélées agaçantes, par exemple lorsque leur propriétaire, pris d'une soudaine envie d'éternuer, désirait y saisir un mouchoir.

Pour résoudre le baguenaudier, l'analyse proposée pour le *Spin-out* s'applique presque mot à mot. On constate d'abord que le dernier anneau peut toujours être abaissé ou levé et que le seul autre anneau qui accepte de se déplacer est celui qui précède l'anneau levé le plus à droite (et cela à condition d'avoir tiré la double tringle centrale le plus à gauche possible). Cela suggère de coder la position du baguenaudier, en associant un «1» à tout anneau levé et un «0» à tout anneau baissé. La position de départ dans le cas d'un baguenaudier à 7 anneaux est donc 1111111, qui est le code de Gros-Gray de l'entier qui, en binaire, s'écrit 1010101, qui est 85. La suite est la même que pour le *Spin-out* : à condition de partir dans la bonne direction, vous aboutirez en 85 étapes, et aucune méthode ne peut raccourcir les manipulations nécessaires à la libération de la double tringle centrale. Si vous partez dans la mauvaise direction, vous aboutirez à une impasse correspondant à la position 1000000, qui est le code de Gros-Gray de l'entier 123, et vous serez alors obligé de repartir en arrière.

Notons deux avantages du *Spin-out* sur le baguenaudier : la commodité des manipulations et la facilité à en imaginer des variantes. Même les casse-tête millénaires sont perfectibles !

Une fois parti dans la bonne direction, la seule règle à appliquer est : «déplacer alternativement l'anneau le plus à droite et l'anneau mobile le plus à gauche (qu'on identifie en tirant au maximum la double tringle centrale)».

L'anneau que l'on déplace, d'après ce que nous avons dit concernant le

5. LES TOURS DE HANOÏ		
		
SOLUTION OPTIMALE EN 15 MOUVEMENTS DANS LE CAS DE QUATRE DISQUES		
POSITION DES DISQUES	DÉPLACEMENTS À FAIRE	DISQUES DÉPLACÉS
A B C		
[4321, ,]	AB	1
[432, 1,]	AC	2
[43, 1, 2]	BC	1
[43, , 21]	AB	3
[4, 3, 21]	CA	1
[4, 1, 3, 2]	CB	2
[4, 1, 32,]	AB	1
[4, , 321,]	AC	4
[, 321, 4]	BC	1
[, 32, 4, 1]	BA	2
[, 2, 3, 4, 1]	CA	1
[, 21, 3, 4]	BC	3
[, 21, , 43]	AB	1
[, 2, , 1, 43]	AC	2
[, , 1, 432]	BC	1
[, , , 4321]		

5. Dans cette solution, on reconnaît la suite copie-augmentée déjà rencontrée dans le voyageur de commerce à n dimensions. Récemment, on a prouvé que la suite des déplacements ne se répète jamais deux fois consécutivement (quel que soit le nombre de disques envisagé). La règle «déplacer alternativement le disque le plus petit (de A vers B, de B vers C, ou de C vers A), puis un autre disque» suffit pour trouver la solution optimale qui, dans le cas de n disques, est une succession de $2^n - 1$ déplacements.

code de Gros-Gray, a pour numéro (en numérotant de droite à gauche) l'entier correspondant de la suite de la copie-augmentée 1213121412131215... qu'on parcourt à l'envers à partir de son 85^e élément.

DES ANNEAUX CHINOIS AUX TOURS DE HANOÏ

Cette suite donne d'ailleurs une solution à un autre casse-tête célèbre et ancien : les tours de Hanoï. Il s'agit de déplacer une pile de disques de taille décroissante en n'utilisant que trois encadrements A, B et C (formant un triangle équilatéral) et en s'imposant à chaque étape de ne jamais poser un disque que sur un disque plus grand. La solution optimale, qui demande $2^n - 1$ étapes, consiste à déplacer alternativement le disque de taille 1 (le plus petit) dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de taille 2 (le second en taille), puis le premier (dans le sens des aiguilles d'une montre), puis le troisième, etc.,

en suivant le schéma indiqué par la suite copie-augmentée 12131214...

Ceux qui trouvent que la suite de la copie-augmentée est trop compliquée peuvent retenir la solution suivante, encore plus courte et plus simple (analogue à celles énoncées plus haut pour le *Spin-out* et le baguenaudier) : «déplacer alternativement le disque le plus petit dans le sens des aiguilles d'une montre, puis le seul disque disponible d'après les règles».

Un résultat récent dû aux mathématiciens J.-P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall et J. Shallit indique une propriété remarquable de la suite des mouvements décrivant la solution optimale dont nous avons dit qu'elle était constituée de $2^n - 1$ déplacements. Il y a six mouvements possibles à chaque étape : prendre le disque en A et le mettre en B, prendre le disque en B et le mettre en C, etc., qu'on désigne par AB, BC, CA, BA, CB, AC. Dans le cas de quatre disques, la solution optimale consiste en la suite de déplacements AB AC BC AB CA CB AB AC BC BA CA BC AB AC BC. Les quatre mathématiciens ont prouvé qu'aussi grand que soit le nombre de disques considérés, les déplacements décrivant la solution optimale ne se répètent jamais deux fois consécutivement : vous n'aurez jamais deux fois de suite AB, ni deux fois de suite AB AC, etc. On n'a jamais épuisé le pouvoir d'inspiration des bons casse-tête mathématiques !

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J.-P. ALLOUCHE, D. ASTOORIAN, J. RANDALL et J. SHALLIT, *Morphisms, Squa-free Strings, and the Tower of Hanoi Puzzle*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 651-658, 1994.

A. DELEDICQ, *Mathématiques buissonnières*, éditions CEDIC, 1975.

P. van DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World*, Key Curriculum Press. Trad. française : *Mille casse-tête du monde entier*, éditions du Chêne, 1977.

A. DEWDNEY, *Le Yin et le Yang, récursivité et itérations, les Tours de Hanoï et le Baguenaudier*, in *Récréations informatiques*, Pour La Science, février 1985.

E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome 1, Paris 1891. Réédition Librairie Scientifique Blanchard, 1992.

Ian STEWART, *Four Encounters with the Sierpinski's Gasket*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, n° 1, pp. 52-64, 1995.

Des vaches dans le labyrinthe

IAN STEWART

«Où sont les vaches?» est un labyrinthe autoréférentiel n'ayant rien à voir avec les vaches!

Dans les mathématiques sérieuses, les labyrinthes sont moins rares que vous pourriez le croire. En effet, toute recherche mathématique requiert que vous trouviez un itinéraire à travers un labyrinthe d'énoncés, le passage d'un énoncé au suivant étant une déduction mathématique valide. Un nouveau type de labyrinthe, inventé par Robert Abbott, de Jupiter, en Floride, et nommé «Où sont les vaches?», est à la

fois géométrique et logique. Il est extrait de son nouvel ouvrage *Supermazes* (Super-labyrinthes) (Prime Edition, Rocklin, Californie, 1996). Certains lecteurs se souviendront de R. Abbott comme inventeur du jeu de cartes Éleusis, décrit par Martin Gardner dans *Pour la Science*, en décembre 1977.

Le labyrinthe de R. Abbott est fondé sur un concept logique paradoxal : celui d'autoréférence. Les énoncés autoréfé-

rents sont, pour les logiciens et les philosophes, causes de migraines. Un exemple est associé au nom d'Épiménides, un Crétois qui déclarait que tous les Crétois étaient menteurs, ce qui peut se réduire à :

CET ÉNONCÉ EST FAUX.

L'est-il ou ne l'est-il pas ? Une contradiction pointe le nez dans chaque cas. Et il y a des énoncés mutuellement référentiels, tels :

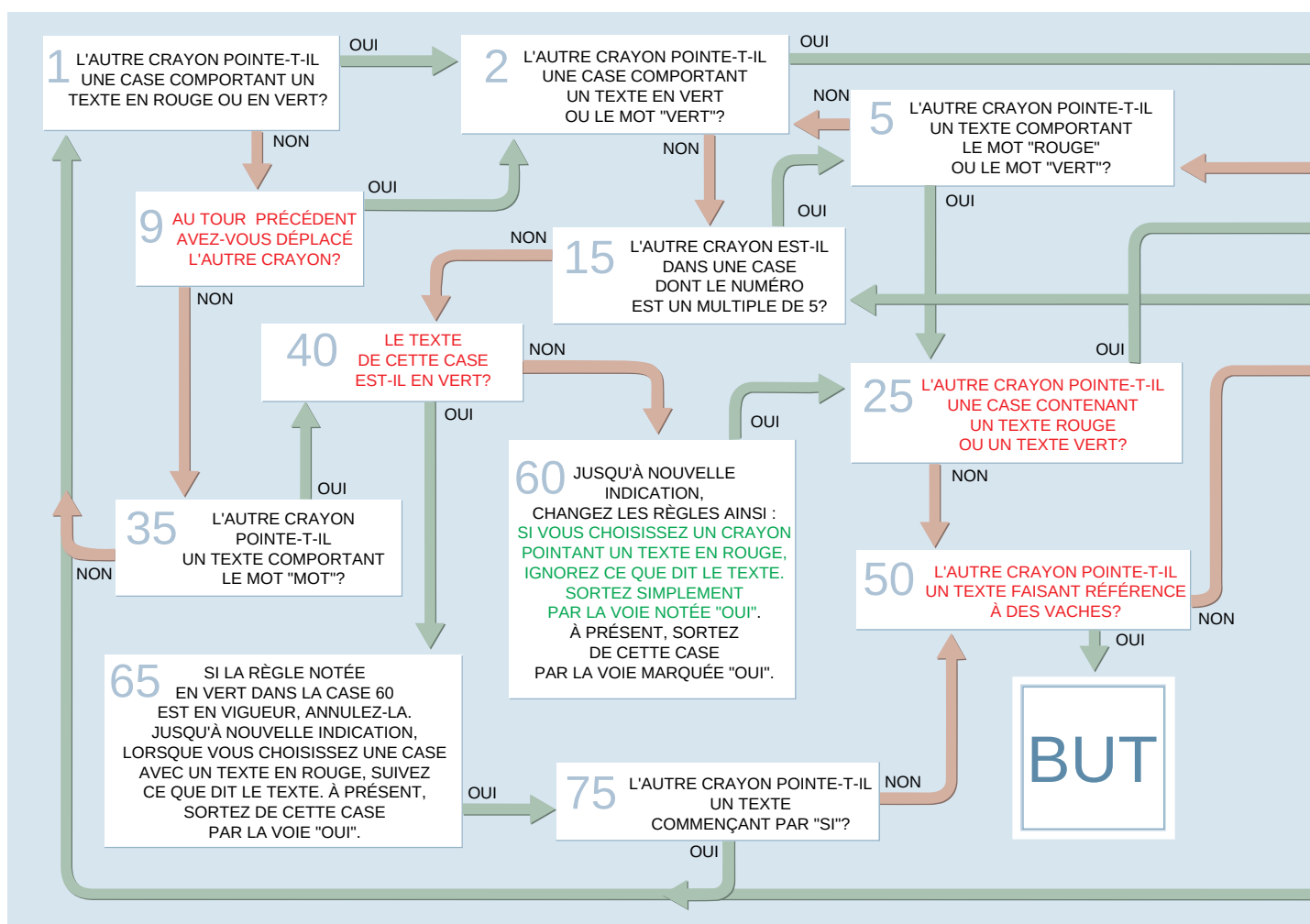
L'ÉNONCÉ QUI SUIT EST VRAI.

L'ÉNONCÉ QUI PRÉCÈDE EST FAUX.

Un champ de mines logique !

L'autoréférence est un important domaine d'étude pour les logiciens, mais la question véritablement importante (à mon point de vue) est celle-ci : l'autoréférence peut-elle être utilisée pour ajouter une difficulté supplémentaire aux labyrinthes ? La réponse, que j'ai plaisir à retranscrire, est : «Oui.»

Le labyrinthe de R. Abbott est représenté sur la figure ci-dessous. Non seulement le texte est autoréférentiel, mais les règles du labyrinthe changent selon votre déplacement. Pour parcourir ce labyrinthe, il vous faut les deux mains, et il est utile de tenir un crayon ou tout autre «pointeur» dans chacune d'elles



pour vous rappeler où vous en êtes. Pour commencer, placez un crayon sur la case 1 et l'autre sur la case 7 (l'indexation des cases ne suit pas l'ordre des entiers ; c'est voulu). Votre objectif est de réaliser une suite de mouvements telle qu'un des crayons au moins arrive dans la case marquée BUT. Pour effectuer un mouvement, choisissez un des crayons, puis suivez les instructions de la case qu'il pointe. Voilà tout. Il n'y a pas d'autre choix à faire, sauf si vous suivez les instructions de la case 55.

Par exemple, si votre premier choix est de pointer la case 7 avec un des crayons, la réponse à la question de la case («L'autre crayon pointe-t-il une case dont le numéro est impair?») est manifestement «OUI». Vous devrez donc faire suivre au crayon de la case 7 le chemin marqué OUI, qui le déplace jusqu'à la case 26.

Facile ? Pas tellement. Supposez que vous choisissiez à présent le crayon pointant la case 26 : «Si vous aviez choisi l'autre crayon, seriez-vous sorti par la voie marquée NON?» Hmm. L'autre crayon était (et est encore) dans la case 1. Si c'est lui que vous aviez choisi, la question pour ce crayon eut alors été : «L'autre

CONSEILS

Si vous avez essayé tout ce qui précède et si vous n'arrivez pas à sortir, voici quelques suggestions.

- Pour atteindre la case BUT, vous devez d'abord atteindre (50, 50) avec la règle 60 non activée. Les autres stratégies pour sortir ne peuvent finalement pas être réalisées.

- Pour atteindre (50, 50), vous devez d'abord arriver en (35, 35). Vous êtes alors à 18 pas de BUT.

- Pour atteindre (35, 35), il vous faut aller en (61, 75), puis déplacer le crayon vers la case 61. Alors les deux crayons peuvent atteindre tous les deux la case 1, de laquelle il est facile d'atteindre la position (35, 35).

- Il y a de nombreuses manières d'aller au départ (1, 7) à (61, 75) ; chacune d'elles requiert d'activer la règle 60, puis de l'annuler à la case 65.

SOLUTION

Dans chaque paire ci-après, le nombre écrit en rouge désigne le crayon que vous devez choisir de déplacer. L'astérisque indique que la règle 60 est activée.

(1, 7), (1, 26), (2, 26), (15, 26), (26, 40), (26, 60), (55, 60), (25, 55)*, (7, 55)*, (26, 55)*, (55, 61)*, (15, 61)*, (40, 61)*, (61, 65)*, (61, 75), (1, 1), (1, 9), (1, 35), (9, 35), (35, 35), (35, 40), (35, 60), (25, 35)*, (7, 35)*, (26, 35)*, (35, 61)*, (1, 35)*, (9, 35)*, (2, 35)*, (15, 35)*, (5, 35)*, (5, 40)*, (25, 40)*, (25, 65)*, (25, 75), (50, 75), (50, 50), BUT.

crayon pointe-t-il une case comportant un texte en rouge ou en vert ?» La case 7 contient un texte en rouge, et la question a donc pour réponse «OUI». Le crayon aurait donc emprunté la sortie OUI, et la réponse à la question est donc NON. Ainsi le crayon pointant la case 26 prendra l'issue NON, qui mène à la case 55.

Fichtre !

La plupart des cases posent des questions, et votre chemin de sortie dépend de la réponse. Certaines, cependant, opèrent différemment. La case 61 vous demande de déplacer les deux crayons, et ce n'est qu'une fois ces deux mouvements achevés que le coup est joué. La case 55 a une sortie marquée IMPROBABLE à la place de l'habituel NON. Et cela fait une différence, par exemple si votre autre crayon pointe la case 26.

Les cases véritablement influentes sont les cases 60 et 65. La case 60 change les règles en éliminant les cases contenant un texte en rouge et en les remplaçant par la règle : «Sortez de cette case par la voie marquée "OUI"», que j'appellerai la règle 60. La case 65 brise la règle 60. Il est possible d'avoir un crayon pointant la case 60 et l'autre la case 65. De fait, chaque case demande d'ignorer l'autre, mais cela n'introduit pas de problèmes autoréférentiels, car vous devez choisir à laquelle vous obéissez ; vous n'obéissez pas aux deux à la fois.

Certaines instructions peuvent apparaître ambiguës. Ainsi la case 5 demande si l'autre crayon pointe un texte comportant le mot rouge ou le mot vert. Si l'autre crayon pointe la case 1, bien entendu, la réponse est OUI, mais qu'en est-il s'il pointe la case 5, qui cite les mots «rouge» et «vert» entre guillemets ? L'interprétation de R. Abbott est qu'il faut ignorer les guille-

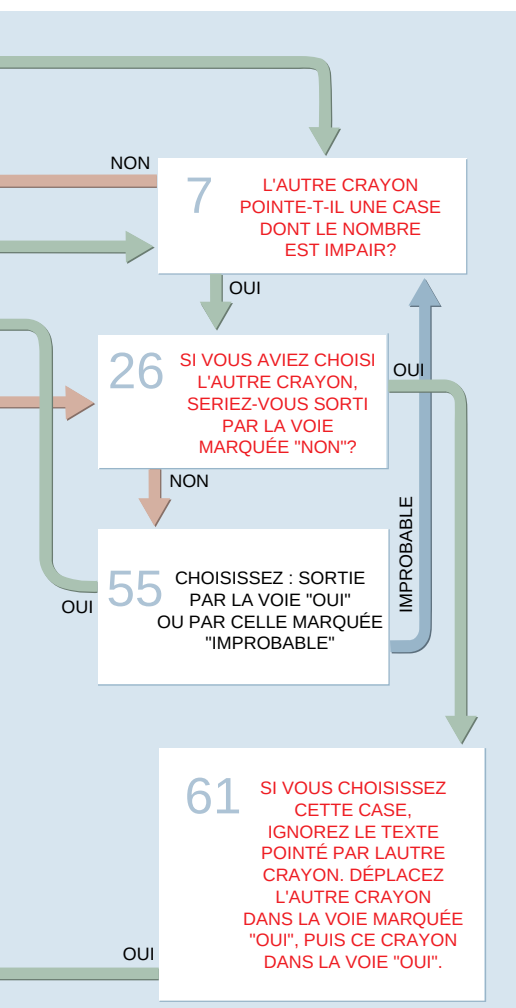
mets et que la réponse est donc OUI. De même, la case 50 demande si l'autre crayon pointe un texte faisant référence à des vaches ; le mot «vaches», cependant, n'apparaît dans aucune autre case. Bien entendu, les deux crayons peuvent pointer la case 50, autorisant alors la sortie vers BUT, à moins que vous estimiez que la case 50 ne fait pas vraiment référence à des vaches ! Un conseil : évitez cette sorte d'argutie métaphysique ou vous ne sortirez jamais du labyrinthe.

Peut-être êtes-vous certain à présent que l'unique manière d'atteindre la case BUT est d'avoir les deux crayons pointés sur la case 50. Ce serait vrai, n'était la case 60. Si vous pouvez conduire un crayon en 50 alors que la règle 60 s'applique, alors qu'importe où est l'autre crayon. Vous êtes sorti. En fait, il y a une autre manière d'atteindre le BUT. La voyez-vous ?

La plus étrange situation qui puisse se présenter est le cas où les deux crayons pointent la case 26. Il n'y a pas de réponse claire à la question. Que faire alors ? R. Abbott a si astucieusement construit son labyrinthe que les deux crayons ne peuvent pointer la case 26 que lorsque la règle 60 s'applique, auquel cas le texte de la case 26 doit être ignoré ! Il en va de même si les deux crayons pointent la case 61.

Il ne vous reste plus qu'à tenter votre chance, sans aide supplémentaire. Si vous ne voulez pas vous en tenir à la simple ténacité, vous avez plusieurs stratégies. L'une est de regarder les caractéristiques clés du labyrinthe. Ainsi, pour atteindre la case BUT, il vous faut avoir un crayon en 50 et être en situation telle que l'issue correcte soit OUI. Une autre astuce est de remonter les coups à partir d'une position souhaitée.

À vous de jouer !



Les étiquettes contre le vol

Chaque année, en France, les pertes résultant du vol à l'étalage s'élèvent à plusieurs milliards de francs (deux pour cent du chiffre d'affaires des distributeurs). Imaginées par un commerçant ulcéré de n'avoir pas pu rattraper son voleur, les étiquettes antivols sont aujourd'hui attachées à de nombreux produits vendus en magasin, des livres, des vêtements, des produits alimentaires...

Les dispositifs antivol sont constitués par des étiquettes et par un système comportant un émetteur et un récepteur reliés à une alarme, disposés dans une zone de détection à l'entrée du magasin. Dans la plupart des systèmes encore utilisés, l'étiquette contient une diode semi-conductrice qui module le signal micro-onde produit par l'émetteur. Lorsque le récepteur détecte un signal modifié, il déclenche une alarme. Malheureusement, ces systèmes échouent si les malfaiteurs placent les marchandises volées dans du papier d'aluminium. Par ailleurs, l'alarme peut être déclenchée involontairement par des clients qui transportent des appareils électroniques contenant des diodes semblables à celles des étiquettes.

Pour pallier ces difficultés, une nouvelle génération d'étiquettes, fondée sur des principes «magnéto-acoustiques», a été conçue. Ces étiquettes fonctionnent dans une plage étroite de fréquences radio de manière à minimiser les interférences provenant d'autres appareils électroniques. L'étiquette contient un résonateur fait d'un métal magnétique amorphe de taille définie. Ce métal est excité par les ondes radio de basses fréquences émises à l'entrée du magasin. Le résonateur vibre alors à la même fréquence et le récepteur qui détecte le signal du résonateur déclenche l'alarme.

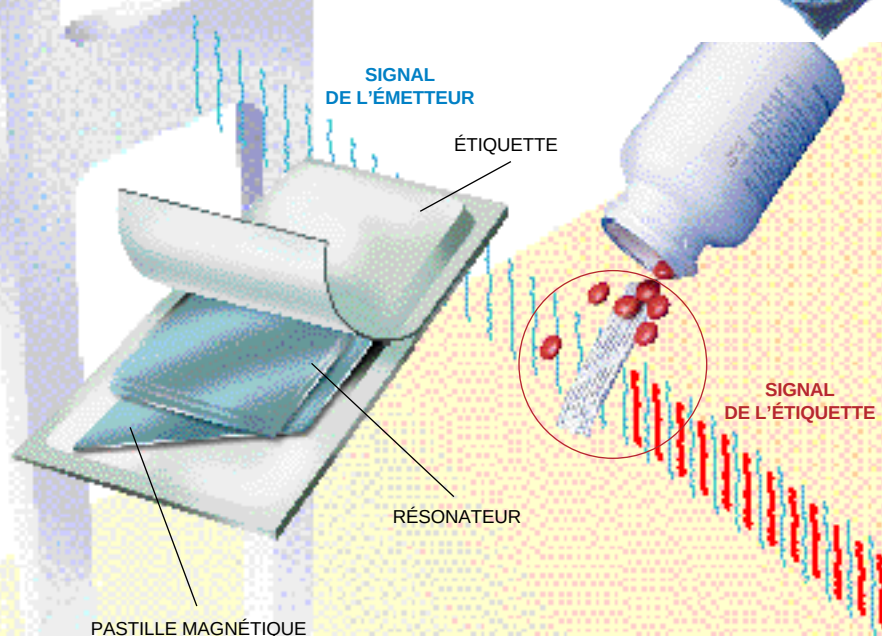
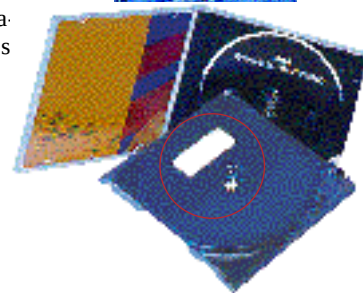
Similaire aux ondes radio de basses fréquences utilisées par l'armée pour les communications sous-marine, le champ électromagnétique de l'émetteur peut traverser des feuilles d'aluminium qui cachent d'éventuels objets étiquetés. Cependant, l'étiquette peut toujours être mise hors d'état de fonctionner si

DES PRODUITS VARIÉS peuvent contenir des étiquettes antivol (*cercles rouges*) qui auront été cousues au tissu, fixées à l'emballage ou placées dans le contenu.



1. LES ANTENNES qui protègent les entrées des magasins contiennent un appareil qui émet des trains d'ondes radio à la fréquence de 58 kilohertz (*en bleu*).

2. LE RÉSONATEUR situé à l'intérieur du produit qui passe près d'une antenne vibre à la même fréquence que celle émise.



4. UNE PASTILLE MAGNÉTIQUE placée à côté du résonateur assure que ce dernier oscille précisément à 58 kilohertz. À la caisse, un appareil rend l'étiquette inopérante en démagnétisant la pastille ou en altérant ses propriétés magnétiques. Ainsi, le résonateur ne vibre plus ou vibre à une fréquence différente.

3. LE RÉCEPTEUR détecte les trains d'onde séparés de 11 millisecondes. Si, entre chaque train, il détecte au moins quatre fois les signaux rouges émis par l'étiquette, l'alarme se déclenche.

elle est tordue ou enlevée par le malfaiteur. Pour cette raison, les commerçants mettent les étiquettes à l'intérieur du produit lui-même, de sorte que l'on ne peut l'ôter sans abîmer le produit. À la caisse, l'étiquette est désactivée.

Les étiquettes antivols peuvent avoir d'autres applications. Certains produits contiendront bientôt des puces électroniques sur lesquels on lira et on enre-

gistra à l'aide d'ondes radio des informations concernant la date et le lieu de l'achat. La prochaine fois que vous achèterez une paire de tennis, le reçu pourrait se trouver à l'intérieur.

Joseph RYAN est vice-président de la Société **Sensormatic Electronics**.