

Récemment, des physiciens de l'Université de Fribourg ont observé une transition de phase un peu différente, mais non sans rapport. Pour mieux contrôler la température de petits agrégats de sodium, ils les ont étudiés dans de l'hélium gazeux dont ils savaient ajuster la température avec précision. Dans ce mélange d'atomes d'hélium et d'agrégats de sodium, de nombreuses collisions se produisent. Toutefois, l'hélium étant chimiquement inerte, la structure des agrégats n'est pas modifiée, tout au moins à des températures modérées. L'hélium est donc un milieu où un équilibre thermodynamique s'établit.

Les physiciens ont étudié la manière dont les agrégats de sodium d'une taille donnée absorbent la lumière d'un faisceau laser : l'absorption de la lumière en fonction de la fréquence du laser – ce que l'on nomme le spectre d'absorption – renseigne sur l'état physique des particules éclairées. Ils ont observé que le spectre de molécules froides et solides diffère de celui que l'on obtient pour des gouttelettes chaudes et liquides. À une température inférieure à -173°C , le spectre comporte plusieurs pics étroits, ce qui est caractéristique d'une molécule rigide. Aux températures supérieures à 107°C , le spectre possède uniquement deux renflements, dont les maxima se trouvent à des fréquences prévues par la théorie de la «gelée» sans structure.

Pour les agrégats les plus petits, dont la structure interne est importante, on peut calculer rigoureusement, à l'aide de la mécanique quantique, le comportement de tous les électrons de chaque atome. Ces calculs révèlent la structure moléculaire de ces agrégats et expliquent de façon précise leur stabilité. Dans le cas des agrégats plus gros, contenant une

centaine d'atomes ou même davantage, de tels calculs sont excessivement longs, et les physiciens utilisent le modèle de la gelée. Pour les agrégats de plusieurs milliers d'atomes, les physiciens doivent renoncer à la mécanique quantique et employer la théorie simplifiée des orbites périodiques, à moins qu'ils ne s'en remettent à l'information indirecte que donnent les nombres magiques obtenus expérimentalement, à partir de la mesure de la proportion des agrégats produits suivant leur taille (les plus abondants étant les plus stables).

Depuis 1984, les physiciens ont parcouru un long chemin dans la compréhension et l'application des nombres magiques aux agrégats métalliques. Des agrégats icosaédriques de sodium contenant jusqu'à 21 000 atomes ont été fabriqués. Pourtant, la structure cristalline du sodium solide n'est pas l'icosaèdre, car aucun matériau solide ne peut être construit en empilant des icosaèdres : de même que des tuiles pentagonales ne couvrent pas parfaitement un plan, sans vides ni chevauchements, les icosaèdres n'ont pas la symétrie qui permet de remplir entièrement l'espace. Pour cette raison, même les plus gros agrégats de sodium fabriqués à ce jour n'ont pas une organisation de leurs atomes semblable à celle que l'on trouve dans le sodium solide.

Si les physiciens ont obtenu une foule d'informations sur les agrégats métalliques et sur les nombres magiques qui assurent leur stabilité, ils ignorent toujours la réponse à cette question fondamentale : à quel moment et comment la transformation entre un agrégat et un solide massif se produit-elle ? Les agrégats métalliques constituent un étrange arrangement de la matière qui réserve certainement bien des surprises.

Matthias BRACK est professeur de physique théorique à l'Université de Ratisbonne, en Allemagne.

Pierre JOYES, *Les agrégats inorganiques élémentaires*, éditions de physique, 1990.

Sven BJØRNHOLM, *Clusters, Condensed Matter in Embryonic Form*, in *Contemporary Physics*, vol. 31, n° 5, pp. 309-324, septembre 1990.

M.L. COHEN et W.D. KNIGHT, *The Physics of Metal Clusters*, in *Physics Today*,

vol. 43, n° 12, pp. 42-50, décembre 1990.

Walt A. de HEER, *The Physics of Simple Metal Clusters : Experimental Aspects and Simple Models*, in *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, n° 3, 1^{ère} partie, pp. 611-676, juillet 1993.

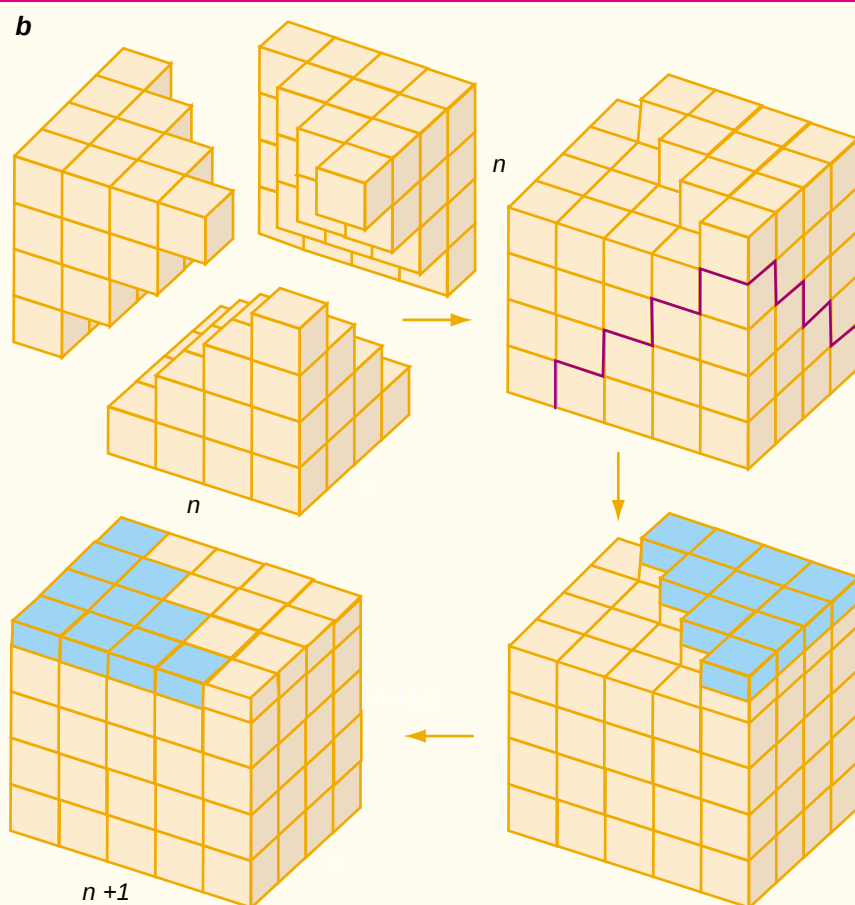
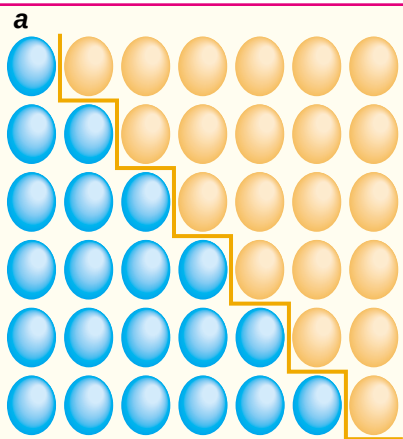
Matthias BRACK, *Self-Consistent Helium Model and Semiclassical Approaches*, in *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, n° 3, 1^{ère} partie, pp. 677-732, juillet 1993.

T.P. MARTIN, *Shells of Atoms*, in *Physics Reports*, vol. 273, n° 4, pp. 199-242, août 1996.

Les preuves sans mots

JEAN-PAUL DELAHAYE

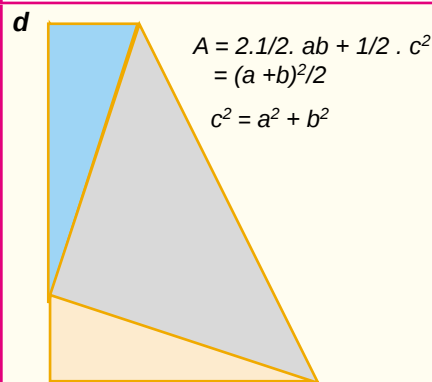
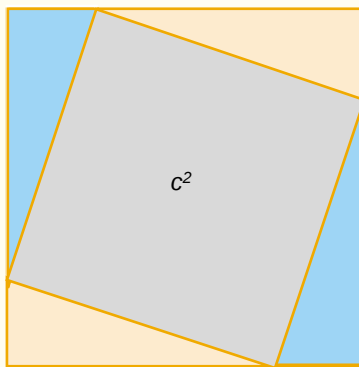
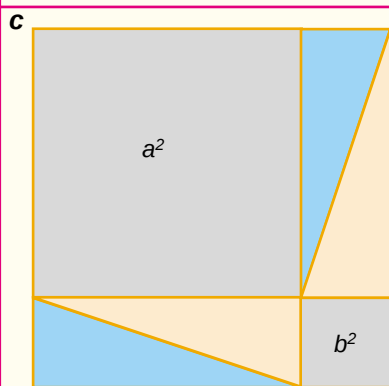
En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours ?



Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. On trouve encore en vente des ouvrages de géométrie dont certains chapitres ne comportent absolument aucune figure : j'en ai un chez moi, paru en 1967, dont le chapitre sur les barycentres ne contient aucun triangle, aucun segment, ni aucune illustration d'aucune sorte !

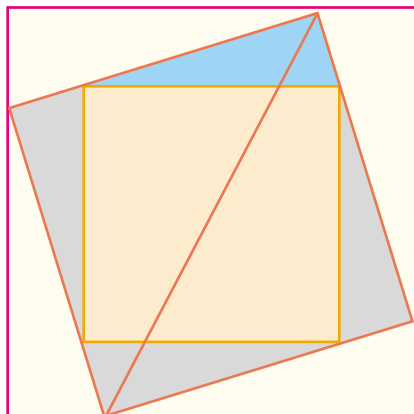
Le grand traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki ne possède pas de tome consacré exclusivement à la géométrie, mais inclut quand même un livre d'algèbre de plus de 500 pages qui traite de droites, de plans, d'espaces, de parallèles, de parallélogrammes, de symétries, d'homothéties, de projections, de quadrilatères, du théorème fondamental de la géométrie projective, du théorème de Pappus, du théorème de Desargues, etc. Pas une figure !

L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier, car elle n'est jamais *quelconque* : quand vous dessinez un triangle, il possède peut-être une caractéristique particulière qui vous donne l'illusion d'un résultat général erroné. Le raisonnement, même quand il concerne des

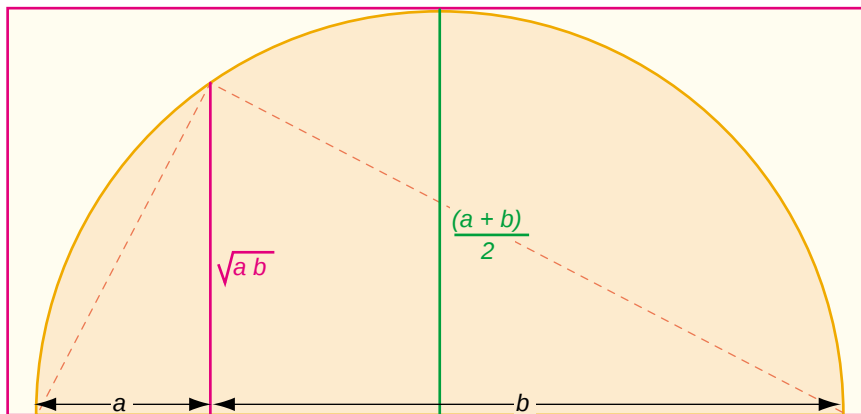


1. (a) : Preuve de $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$. (b) : Preuve de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1/3[n(n+1)(n+1/2)]$. Preuve due à Man-Keung Siu (1984). (c) et (d) : deux démonstrations du théorème de

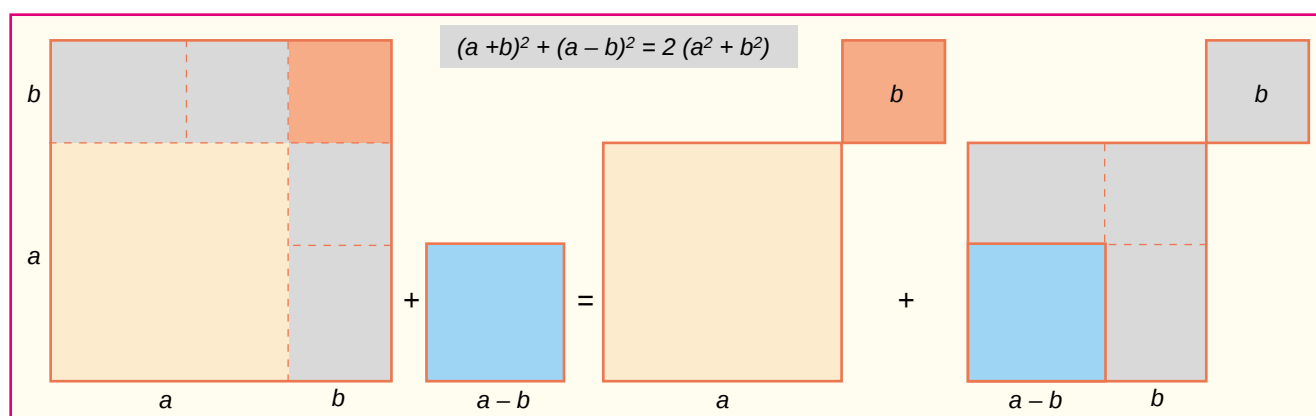
Pythagore. La première est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine, vers -200 avant J.-C. La seconde est l'œuvre du vingtième président des États-Unis, James Garfield.



2. La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle coupe le carré construit sur l'hypoténuse en deux moitiés (R. Eddy, 1991).



3. La moyenne géométrique de deux nombres a et b , soit $\sqrt{ab}$, est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces deux nombres, $(a+b)/2$. Cette preuve est due à Charles D. Gallant (1977).



4. Une identité algébrique peut se voir. En voici un exemple dû à Shirley Wakin (1984).

objets géométriques, ne doit pas s'appuyer sur ce qu'on voit : en mathématiques, méfions-nous des sens !

Plusieurs raisonnements géométriques apparemment irréprochables conduisent à des paradoxes. L'erreur provient le plus souvent de la figure dont on s'aide pour le raisonnement, qui est imperceptiblement trompeuse et nous conduit dans un piège. L'un de ces raisonnements établit que « tout triangle est isocèle » (voir la figure 5). Il fut inventé par Lewis Carroll, qui le présenta dans son ouvrage *The Lewis Carroll Picture Book* (1899).

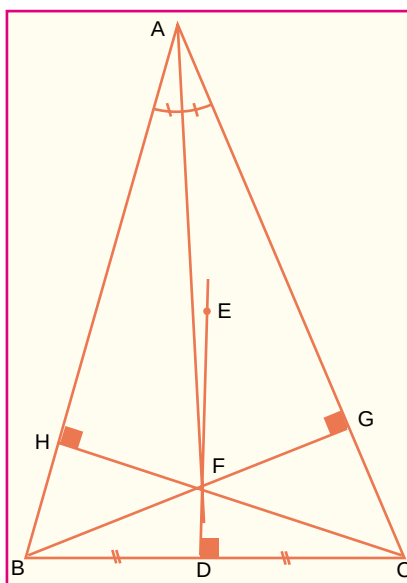
Après avoir constaté les ravages produits par la conception de la géométrie sans figure sur les jeunes esprits que cette forme d'intégrisme dégoûtait des mathématiques, on accepte plus facilement d'illustrer une démonstration par un dessin qui en facilite l'assimilation, même si l'on en connaît les risques.

DÉMONSTRATIONS PAR LES FIGURES

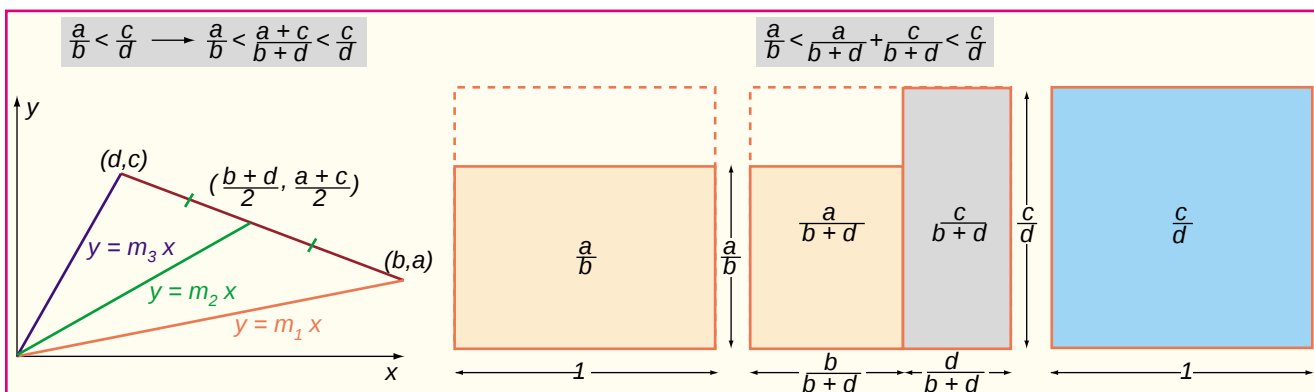
À l'exact opposé des démonstrations géométriques sans figure, un jeu étrange et subtil s'est développé aux

États-Unis : celui des *démonstrations sans mots*. Encouragé par plusieurs revues mathématiques destinées aux enseignants, il a conduit à de remarquables preuves sans un seul mot, qu'un livre de Roger Nelsen a collec-

tées et que nous recommandons à tous ceux que les dessins de cet article auront stimulés (le livre est en anglais, mais, vu son objet, même s'il était en moldave méridional ou en malais primitif, je n'hésiterais pas à le conseiller).



5. ABC est un triangle quelconque. Traçons la perpendiculaire au milieu D de BC, soit E un point de cette perpendiculaire. Considérons la bissectrice de l'angle A. Si DE et cette bissectrice ne se rencontrent pas, cette bissectrice est orthogonale à BC, et donc le triangle est isocèle. Si DE et cette bissectrice se rencontrent en un point F, traçons FB et FC, puis la perpendiculaire FH à AB passant par F, et enfin la perpendiculaire FG à AC passant par F. Les triangles AFG et AFH sont égaux, car ils ont un côté commun et deux angles égaux. Donc AH=AG et FH=FG. Les triangles BDF et CDF sont aussi égaux (car BD=DC, DF commun et les angles en D égaux) et donc FB=FC. De même encore, les triangles FGC et FHB sont égaux (deux côtés et un angle égaux), donc HB=GC, et donc (en utilisant que HA=GA) on en déduit que AB=AC, c'est-à-dire que le triangle ABC est isocèle (l'erreur provient de ce que, si on construit F soigneusement, il se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC, ce qui interdit la suite du raisonnement).



6. La règle des nombres moyens de Nicolas Chuquet datant de 1484. Deux preuves sans mots, la première (à gauche) de Li Changming (1988), la seconde (à droite) de Roger Nelsen (1993).

Le jeu des *démonstrations sans mots* consiste à concevoir des figures – accompagnées éventuellement de quelques équations – suffisamment bien conçues pour qu'en les regardant on se trouve persuadé de résultats mathématiques qui, sans la figure, ne sont pas évidents, ou même sont difficiles. Bien sûr, l'observateur doit connaître un minimum de résultats élémentaires : cas d'égalités des triangles, formule de la surface d'un carré, d'un triangle, d'un rectangle, etc.

Toutes les preuves sans mots ne sont néanmoins pas évidentes. Parfois il faut regarder et réfléchir longuement sur les figures pour comprendre pourquoi elles constituent une preuve du résultat annoncé. Parfois même on n'y arrivera pas : nul ne prétend que les mathématiques puissent être totalement évidentes. Le plaisir qu'on éprouve à saisir une démonstration graphique est

si délicieux que l'on en redemande aussitôt. Les exemples de cette rubrique seront bien sûr insuffisants pour étancher votre soif. Ils nous serviront à réfléchir à ce qu'est une preuve mathématique.

PREUVES PARLANTES ET PREUVES MUETTES

Les exemples les plus simples de preuve sans mots concernent la formule :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

La figure 1a en indique une qui était connue dans la Grèce antique.

Pourtant, si on voulait écrire une «démonstration complète et rigoureuse», au sens que donne à cette expression un mathématicien contemporain, il faudrait utiliser un raisonnement par récurrence.

La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour m et étudions le cas $m + 1$:

$$1+2+\dots+m+(m+1)=m(m+1)/2+(m+1),$$

(par utilisation de l'hypothèse que la formule est vraie pour m)

$$=(m+1)(m/2+1)$$

(en factorisant $(m+1)$)

$$=(m+1)(m+2)/2,$$

(en réduisant au même dénominateur la seconde parenthèse).

L'égalité obtenue en prenant le premier et le dernier éléments de cette suite d'égalités est la formule cherchée pour $m+1$. Donc la formule est vraie pour tout entier.

Le principe du *raisonnement par récurrence* est : «Si une propriété P est vraie pour 0, et que l'on a l'implication $\{P \text{ vrai pour } m\} \Rightarrow \{P \text{ vrai pour } m+1\}$, alors P est vraie pour tout entier.»

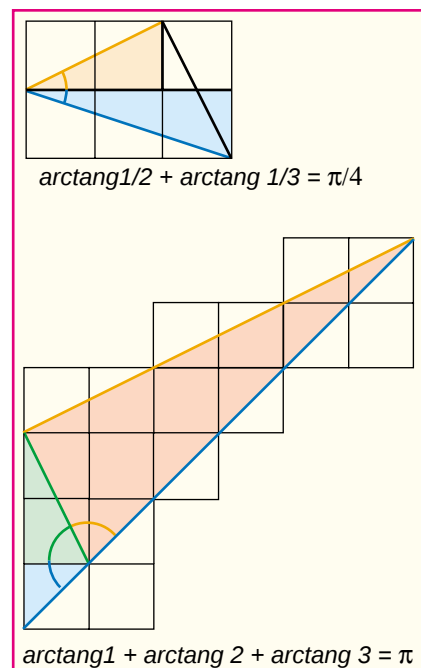
La démonstration rigoureuse est plus longue et surtout moins claire. La démonstration visuelle nous donne le sentiment de mieux saisir ce qui se passe. Le raisonnement par récurrence laisse sur sa faim : il *démontre* le résultat, il ne le *montre* pas.

NE RÊVONS PAS TROP

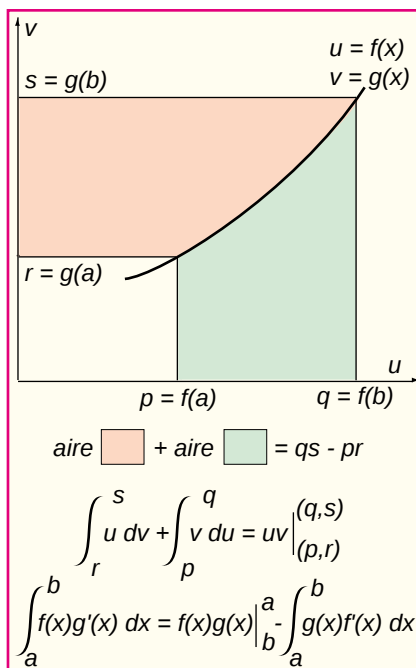
Il serait cependant trop simple de condamner le raisonnement par récurrence et les preuves habituelles des mathématiciens. Même si l'on éprouve une joie intense à observer et à réfléchir sur des *preuves sans mots*, il faut défendre les *preuves avec mots* et, pour commencer, la preuve par récurrence présentée au-dessus.

Son premier avantage est que, pour une multitude de formules analogues, elle marche mécaniquement. On savait, avant de commencer à l'écrire, qu'on allait aboutir, et l'on sait qu'on pourrait par la même méthode démontrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1/3 n(n+1)(n+2)$. Il ne semble pas que la magnifique démonstration sans mots de Man-Keung Siu (voir la figure 1a) puisse être produite automatiquement.

Un second avantage des preuves avec mots est qu'elles peuvent être défi-



7. Deux formules d'arctangentes. La première démonstration est très classique, la seconde est due à Edward Harris (1987).



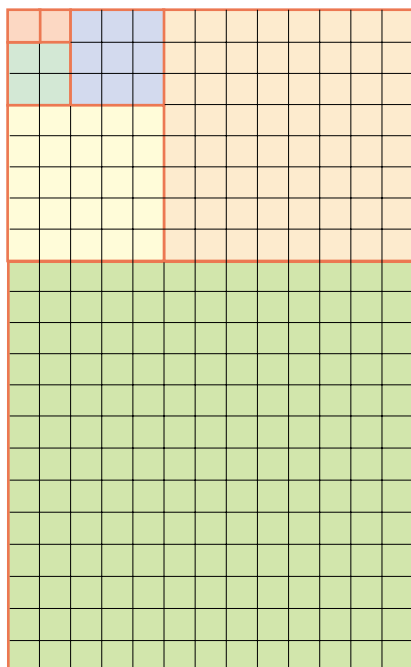
8. Démonstration sans mots de l'intégration par parties due au mathématicien américain Richard Courant (1937).

nies avec une précision parfaite : on parle alors de *preuve formelle*. Lorsqu'une preuve formelle détaillée est écrite, plus aucune intelligence n'est nécessaire pour la comprendre et en vérifier l'exactitude ; il suffit d'en suivre les différents pas en contrôlant que chacun est autorisé, car conforme aux règles exhaustivement fixées au départ. Un mathématicien qui détaille suffisamment une démonstration est certain d'être compris de ses collègues.

On pourrait critiquer ces prétendus avantages des preuves formelles de deux façons. D'une part, on sait qu'aucune notion absolue de preuve ne peut être définie (c'est le sens profond des théorèmes de limitation en logique) ; d'autre part, il n'est pas vrai que tout mathématicien comprend facilement les preuves avec les mots que ses collègues écrivent.

À la première critique, il faut répondre que, même si aucune notion de preuve formelle ne peut convenir simultanément à tous les domaines des mathématiques, certaines notions, comme celles utilisées par Bourbaki (le premier livre du *Bourbaki* est consacré à la définition de la notion de preuve formelle sur laquelle s'appuient tous les autres livres), conviennent pour 99,9 pour cent des mathématiques. De plus, pour chaque partie des mathématiques qui échappe à cette notion formelle de preuve, on trouve une autre notion de preuve formelle qui convient. Contrairement à ce que certains philosophes naïfs croient, les développements de la logique moderne depuis un siècle n'ont pas rendu caduque la notion de *formalisation*, mais, au contraire, l'ont installée de manière définitive au cœur des mathématiques. Cela est si vrai d'ailleurs que, même les intuitionnistes (un courant de pensée en logique qui préconise d'adopter une attitude prudente vis-à-vis du traitement de l'infini), qui étaient rétifs à l'utilisation des systèmes formels de preuve, les ont acceptés. Même si l'on sait qu'aucun véhicule ne permettra jamais d'aller à la vitesse de la lumière, nous ne renonçons pas aux véhicules pour nous déplacer ; il en va de même pour les systèmes formels de preuves.

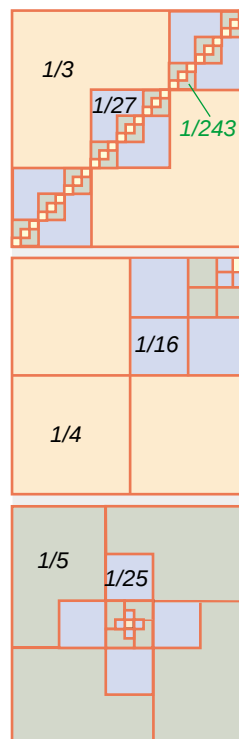
Pour répondre à la seconde critique : l'incapacité des mathématiciens à se comprendre entre eux, il suffit simplement de dire que c'est là une marque de la limitation des cerveaux humains, pas d'une limitation théorique. Personne aujourd'hui n'est en mesure de comprendre toutes les mathématiques qui sont écrites, comme personne n'est capable de lire tous les romans qui sont publiés. Reste qu'il est vrai que tout bon mathématicien à qui on présenterait une preuve élaborée par un collègue finirait, s'il en faisait l'effort, par la comprendre même si, dans certains cas,



$$F_1 = F_2 = 1 ; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

9. La somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci est égale au produit du n -ième par le $(n+1)$ -ième. Démonstration due à A. Brousseau.



$$2(1/3 + 3 \cdot 1/27 + 9 \cdot 1/243 + \dots) = 1$$

$$2 \sum 1/3^n = 1$$

$$\sum 1/3^n = 1/2$$

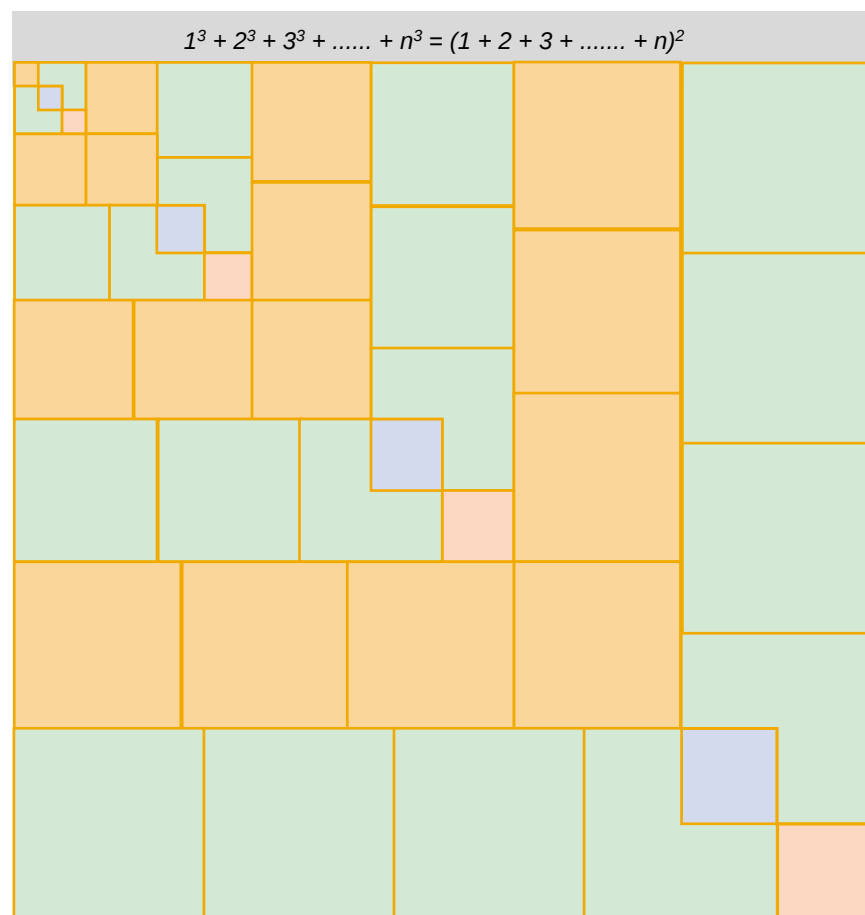
$$3 \sum 1/4^n = 1$$

$$\sum 1/4^n = 1/3$$

$$4 \sum 1/5^n = 1$$

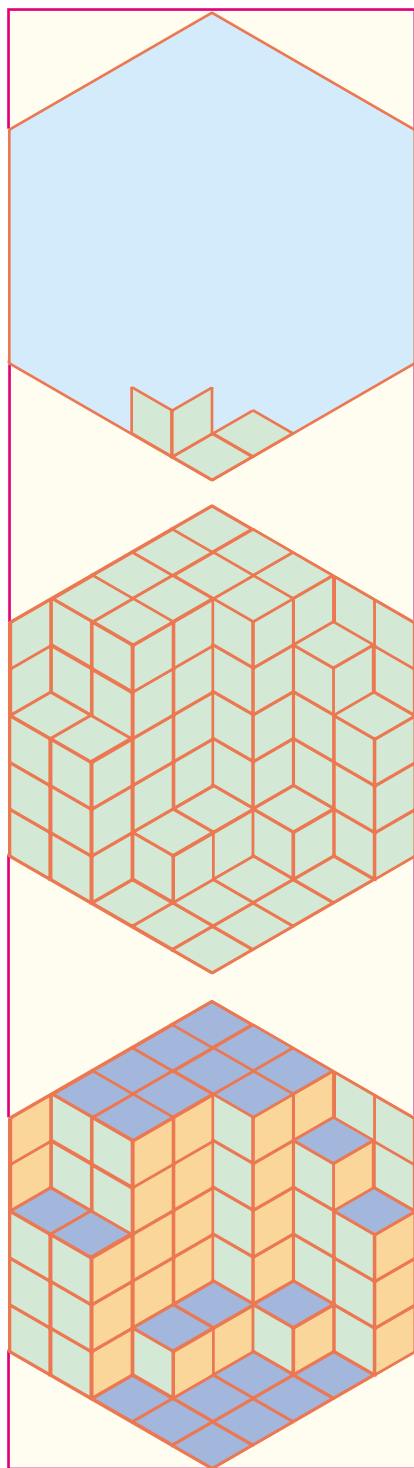
$$\sum 1/5^n = 1/4$$

10. Quelques jolies séries sur la somme des inverses de 3^n , des inverses de 4^n , des inverses de 5^n . Ces preuves sont dues à Elisabeth Markham (1993).



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

11. La somme des cubes des n premiers entiers. La preuve sans mots a été proposée en 1984 par Solomon Colomb, le grand spécialiste des polyminos.



16. Le problème des calissons. Un calisson est un losange obtenu par accolement de deux triangles équilatéraux. Le *Théorème des calissons* stipule que, dans une boîte hexagonale dont le côté est n , lorsqu'on range des calissons de côté 1, il y en a un nombre identique, orientés dans chacune des trois directions possibles. Ici la preuve sans mots (proposée en 1989 par Guy David et Carlos Tomei) est fulgurante : notre vision tridimensionnelle fait tout le travail. N'arrivant pas à me persuader que le dessin constituait ici une véritable preuve du théorème des calissons, j'avoue que, pour me convaincre de son exactitude, je l'ai rétabli par une méthode différente.

cela nécessiterait un travail de plusieurs mois, ou même de plusieurs années.

Au total, les notions de preuves formelles tirées des preuves avec les mots sont bel et bien des outils puissants et généraux que les preuves sans mots ne détrôneront pas.

LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Aussi amusantes qu'elles soient, les preuves sans mots atteignent vite leurs limites et ne doivent donc pas être prises trop au sérieux, comme l'exemple suivant le montre encore.

Le résultat d'analyse appelé *théorème des valeurs intermédiaires* nécessite une démonstration assez compliquée qui ne fut formulée qu'au XIX^e siècle par le mathématicien tchèque Bolzano. En revanche, son sens est perçu sur une figure simple qu'on pourrait voir comme une démonstration sans mots.

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que, si f est une fonction continue (quand on en dessine la courbe il n'y a pas besoin de lever le crayon) définie entre deux valeurs a et b , alors pour toute valeur v entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un nombre c tel que $f(c) = v$. Graphiquement, cela signifie simplement que, pour tracer un trait sans lever le crayon d'un point sous la droite $y = v$ à un point au-dessus de la droite, vous devez la traverser.

Un dessin en constitue certainement une preuve visuelle, mais, contrairement à la preuve donnée par les mathématiciens aujourd'hui, elle ne fait pas réfléchir à la structure des nombres réels et, en fait, ne montre rien !

La preuve visuelle du théorème des valeurs intermédiaires est trop évidente, et c'est cela sa faiblesse ! En cherchant à comprendre cette évidence, les mathématiciens ont été amenés à approfondir la notion de continuité, puis la structure de l'ensemble des nombres réels, puis finalement tout un domaine mathématique qui constitue la puissante analyse contemporaine sans laquelle bien des questions de physique resteraient énigmatiques. L'évidence graphique est parfois dangereuse : elle incite à la paresse ; c'est en la refusant ou en essayant de la traduire sous une autre forme qu'avance notre compréhension.

TOUT NE PEUT PAS SE DÉMONSTRER VISUELLEMENT

L'habitude que nous avons de vivre dans un espace à trois dimensions et la bonne adaptation de notre cerveau à cette situation nous dotent d'une intuition géomé-

trique qu'il faut utiliser pour faire aimer les mathématiques aux enfants. Cependant notre situation d'objet physique dans un espace physique particulier a aussi ses inconvénients : nous n'arrivons pas à percevoir très clairement ce qu'est une sphère à quatre dimensions ou un espace à une infinité de dimensions, comme les physiciens en ont besoin aujourd'hui. Seule l'approche non géométrique des démonstrations nous conduit dans ces mondes mathématiques.

C'est sans doute à cause de tout cela que la grande époque de la géométrie est passée et qu'en tout cas il serait absurde de remplacer la notion classique de preuve avec des mots par une notion purement géométrique. Même si finalement cela nous désole, le point de vue formaliste (accepter de définir avec précision ce qu'est une preuve avec des mots et tout y ramener) est bien le meilleur et le plus puissant. Tout en lui restant fidèle dans les travaux les plus avancés, il faut refuser de se laisser obnubiler par lui, et il ne faut jamais perdre de vue qu'il n'est que l'aboutissement d'une longue maturation. Les élèves doivent parcourir un chemin dans lequel les preuves sans mots ont un rôle important à jouer, et l'on doit suggérer aux pédagogues de s'y intéresser en France, comme ils l'ont fait aux États-Unis : les preuves sans mots, en ancrant les mathématiques dans un réel immédiat, les rendent sympathiques, font ressentir que ce qu'elles disent est concret et permettent de plus de mémoriser sans mal des résultats à l'aspect rébarbatif.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre I* (chapitres 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

Roger B. NELSEN, *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials, n° 1, The American Mathematical Association of America, MAA Service Center, Washington DC, 1993.

H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition, Saunders College Publishing, New York, 1992.

M. GARDNER, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, chapitre 6, *Geometrical Fallacies*.

B. d'AMORE, *Paradoxes en géométrie*, Plot n° 58, 1^{er} trimestre 1992, Association régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), Université d'Orléans, pp. 13-18.



Bateau à savon

MARTIN SHANAHAN

Son mouvement démontre l'effet des forces de surface.

Les physiciens qui s'intéressent aux surfaces explorent depuis quelques années les phénomènes de mécano-chimie que l'on observe quand on pose une gouttelette de liquide sur une surface horizontale, par exemple. Habituellement la goutte s'étale plus ou moins, selon que le substrat est «mouillable» ou non, puis elle s'immobilise ; en revanche, quand le liquide réagit avec le solide sur lequel il est posé, rendant ce dernier moins mouillable après contact, une dissymétrie déplace la goutte vers les parties qui n'ont pas réagi et restent donc plus mouillables. La goutte continue de filer sur le substrat tant qu'il reste des zones non parcourues.

Les phénomènes de ce type, qui semblent avoir lieu dans diverses réactions biologiques (opération des muscles, fonctionnement des capillaires dans les plantes), ont été identifiés il y a peu, mais un de leurs avatars est bien connu des amateurs d'expériences et des enfants qui jouent avec de l'eau : du camphre ou, plus simplement, du

savon, propulsent de petits bateaux. Dans ce cas, l'énergie provient de la tension superficielle de l'eau, modifiée par le savon ou par le camphre.

Pour faire l'expérience, je vous conseille de tailler un petit bateau dans du bois ou dans une feuille de plastique d'emballage, plate et rigide, telles celles qui encapsulent les briquets, les fiches électriques et de multiples petits articles ménagers. Découpons la feuille en forme de bateau simple (voir la figure 1), avec une longueur de cinq centimètres et une largeur de un centimètre environ. Ajoutons le «moteur» : sur l'arrière du bateau, nous attachons un petit morceau de pâte à modeler où nous incrustons quelques miettes de savon (le «carburant») ou de camphre (on en trouve en pharmacie).

Dans une baignoire, faisons couler une petite profondeur d'eau (il faudra renouveler l'eau souvent, car sa surface se couvre de «carburant» quand le bateau fonctionne). Attendons que les courants cessent et évitons les courants d'air. Puis posons délicatement le bateau sur la sur-

face de l'eau : presque immédiatement, il se met en mouvement et atteint une vitesse constante de quelques centimètres par seconde. Si on l'a muni d'un gouvernail qui évite les collisions contre les bords, il tourne sans interruption pendant quelques dizaines de minutes.

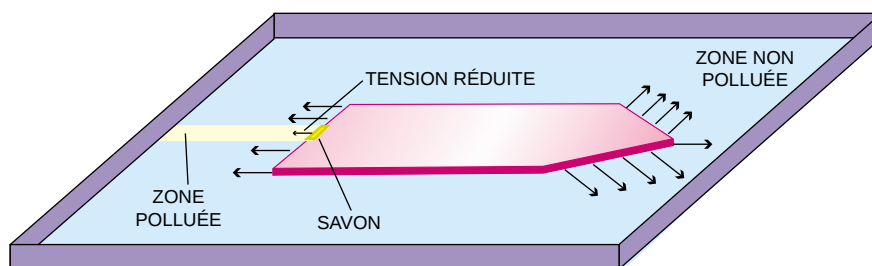
Pourquoi ce mouvement ? Parce que des forces de tension superficielle s'exercent entre l'eau et le bateau. Imaginons une goutte d'eau isolée dans l'espace, sans pesanteur. Les molécules d'eau au centre sont attirées par toutes leurs voisines, dans toute les directions. En revanche, à la surface de la goutte, les molécules ne sont tirées que par les molécules voisines, situées sur les côtés et en dessous ; la force résultante qui les tire vers le centre est la tension superficielle.

Ainsi la surface d'un liquide agit un peu comme si elle était une membrane emprisonnant ce liquide : la tension superficielle permet de remplir une cuillère à café avec de l'eau à un niveau un peu supérieur à son bord (sans la tension superficielle, l'eau qui dépasse de la cuillère s'écoulerait).

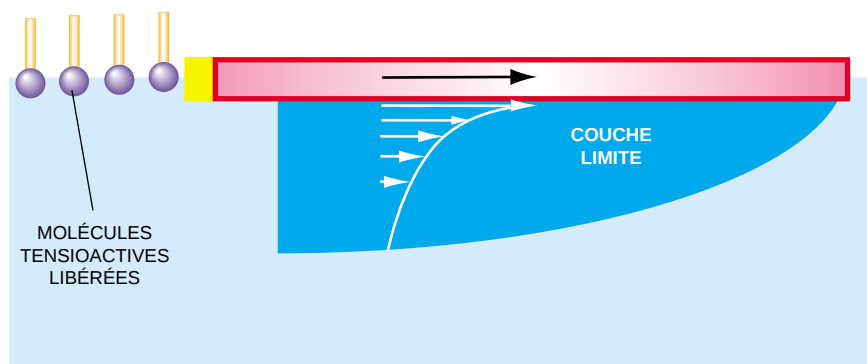
Les mêmes types de forces qui maintiennent solidaires les molécules d'eau sont responsables d'une attraction entre les molécules d'eau et les molécules de matière plastique. La force de traction sur un bord du bateau est égale à la tension superficielle multipliée par la largeur du bord.

Lorsque l'eau est pure, la force qui tire sur la poupe est égale à celle qui s'exerce sur la proue : les deux forces se compensent : le bateau reste immobile. Toutefois le «carburant», savon ou camphre, est «tensioactif» : sa présence réduit localement la tension superficielle de l'eau, de sorte que la force de traction vers l'avant est supérieure à la force de traction vers l'arrière. La force résultante tire le bateau vers l'avant (la vitesse est supérieure lorsqu'on utilise du savon, parce que ce dernier réduit davantage la tension superficielle ; en contrepartie, le bateau tourne plus longtemps avec un moteur à camphre, parce qu'il pollue moins vite la surface de l'eau).

Pourquoi cette force n'engendret-elle pas une accélération constante ?



1. Le bateau à savon est mis en mouvement par un petit morceau de savon, à la poupe.



2. L'écoulement de l'eau sous le bateau : seule une couche limite est entraînée (zone bleu foncé) à une vitesse qui diminue avec la profondeur (flèches blanches).

Calcul de la vitesse d'un bateau à tensioactif

La vitesse de croisière U d'un bateau propulsé par des phénomènes de tension superficielle peut être estimée à partir d'une analyse simple. Devant le bateau, la force propulsive est égale à $\gamma_0 W$, où γ_0 est la tension superficielle de l'eau pure, et W la largeur du bateau. Derrière, la force résistante due à la tension superficielle est égale à la somme de $\gamma_0(W - w)$, pour la partie qui ne comporte pas le moteur (de largeur w), et de γw pour le moteur (où γ est la tension superficielle de l'eau additionnée de produit tensioactif, inférieure à γ_0).

Lorsque la vitesse est constante, la force de propulsion totale, $(\gamma_0 - \gamma)w$, est équilibrée dynamiquement par une force hydrodynamique de freinage. En effet, une mince couche d'eau est entraînée par le fond du bateau. Un cisaillement se produit dans cette couche d'épaisseur d , nommée couche limite. L'épaisseur d augmente avec la distance de la proue, mais, dans les conditions examinées ici, elle reste très mince, ne dépassant guère un millimètre. Les molécules d'eau directement en contact avec le bateau ne glissent pas sur lui et se déplacent à la vitesse U . Le cisaillement dû à la variation de vitesse de l'eau, entre le fond du bateau et la partie inférieure de la couche limite, est responsable de la force de freinage.

L'écoulement est-il régulier ou turbulent? Pour répondre à cette question, les hydrodynamiciens utilisent le nombre de Reynolds, égal à $UL\rho/\eta$, où L est la longueur du bateau, ρ la masse volumique de l'eau et η sa viscosité. Le nombre de Reynolds représente le rapport des forces inertielles du liquide sur les forces visqueuses : il est petit lorsque la viscosité l'emporte, auquel cas l'écoulement n'est pas turbulent ; inversement, lorsqu'il est grand, l'inertie l'emporte sur la viscosité, et l'écoulement devient turbulent. Ici, avec une longueur de cinq centimètres et une vitesse de dix centimètres par seconde, on calcule un nombre de Reynolds égal à 5 000 environ, de sorte que l'écoulement est laminaire. Dans ces conditions, on peut assimiler le bateau à une plaque mince, dont la résistance à l'avancement par unité de largeur, f , est égale à :

$$0,66 (\eta \rho L U^3)^{1/2}.$$

La résistance totale au mouvement du bateau est Wf , de sorte que, si l'on écrit qu'à la vitesse de croisière les forces propulsives sont égales aux forces résistantes, on obtient la vitesse :

$$U = 1,3 (w^2 (\gamma_0 - \gamma)^2 / \eta \rho L W^2)^{1/3}.$$

Avec les valeurs des paramètres ($\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\gamma - \gamma_0 = 40 \text{ mN/m}$), la vitesse est de dix centimètres par seconde environ.

Parce que le bateau entraîne les molécules d'eau à son contact (voir la figure 2) ; la viscosité de l'eau exerce une résistance qui équilibre la force propulsive.

Cette situation d'équilibre dynamique subsiste tant que l'eau située devant la proue reste pure ou, du moins tant qu'elle présente une tension superficielle supérieure à celle de la poupe. Un calcul simple (voir l'encadré) de la vitesse de croisière du bateau déter-

mine la vitesse effectivement observée et, de ce fait, confirme l'analyse proposée : avec les dimensions choisies pour le bateau, une largeur de «moteur» égale à un millimètre, on obtient une vitesse de croisière de dix centimètres par seconde environ, en bon accord avec les observations.

Puis, quand la surface se pollue, la force de propulsion diminue, et le bateau ralentit. Il faut alors changer l'eau pour reprendre les études.

Martin SHANAHAN est directeur de recherche au Centre des matériaux Pierre-Marie Fournier (École des Mines de Paris), à Évreux.

C.D. BAIN, G.D. BURNETT-HALL et R.R. MONTGOMERIE, *Rapid Motion of Liquid Drops*, in *Nature*, vol. 372, p. 414, 1994.

F. BROCHARD-WYART et P.-G. de GENNES, *Spontaneous Motion of a Reactive Drop*, in *Comptes rendus de l'Académie des*

sciences, vol. 321 (série lib), p. 285, 1995.

F. DOMINGUES dos SANTOS et T. ONDARÇUHU, *Free Running Droplets*, in *Physical Review Letters*, vol. 75, p. 2972, 1995.

M.E.R. SHANAHAN et P.-G. de GENNES, *Start-up of a Reactive Droplet*, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 324 (série lib), p. 261, 1997.

Traînées de navires

Les traces blanches sur l'image de droite évoquent les traînées de condensation que laissent des avions dans un ciel clair. Sur cette photographie infrarouge (à la longueur d'onde de 3,7 micromètres) prise au large de la Californie, par un satellite météorologique américain, ce sont des particules émises par des cheminées de navires qui ont modifié les propriétés optiques des nuages au-dessus de l'océan Pacifique. La photographie permet de suivre les navires à la trace.

On a ajouté de fausses couleurs à l'image originale : du marron pour les masses continentales et du bleu pour l'océan. Les zones sombres correspondent aux régions de ciel clair, et les zones blanchâtres indiquent la présence de nuages, bancs de stratocumulus fréquents dans cette région océanique. Plus le nuage réfléchit le rayonnement solaire à la longueur d'onde d'observation, plus il apparaît brillant.

Comme tout moteur à combustion, les moteurs des navires émettent des particules, plus souvent appelées aérosols. Lorsque ces particules pénètrent dans un nuage, des gouttelettes d'eau

se forment sur certaines d'entre elles. La présence de ces particules, qui s'ajoutent aux aérosols naturels, accroît donc le nombre de gouttelettes dans le nuage. La quantité d'eau restant constante, la taille moyenne des gouttelettes diminue (voir le schéma) et leur surface totale augmente. Selon des mesures *in situ* par avion, le diamètre des gouttelettes varie de 10 micromètres dans un stratocumulus à 7 micromètres dans une traînée de navire.

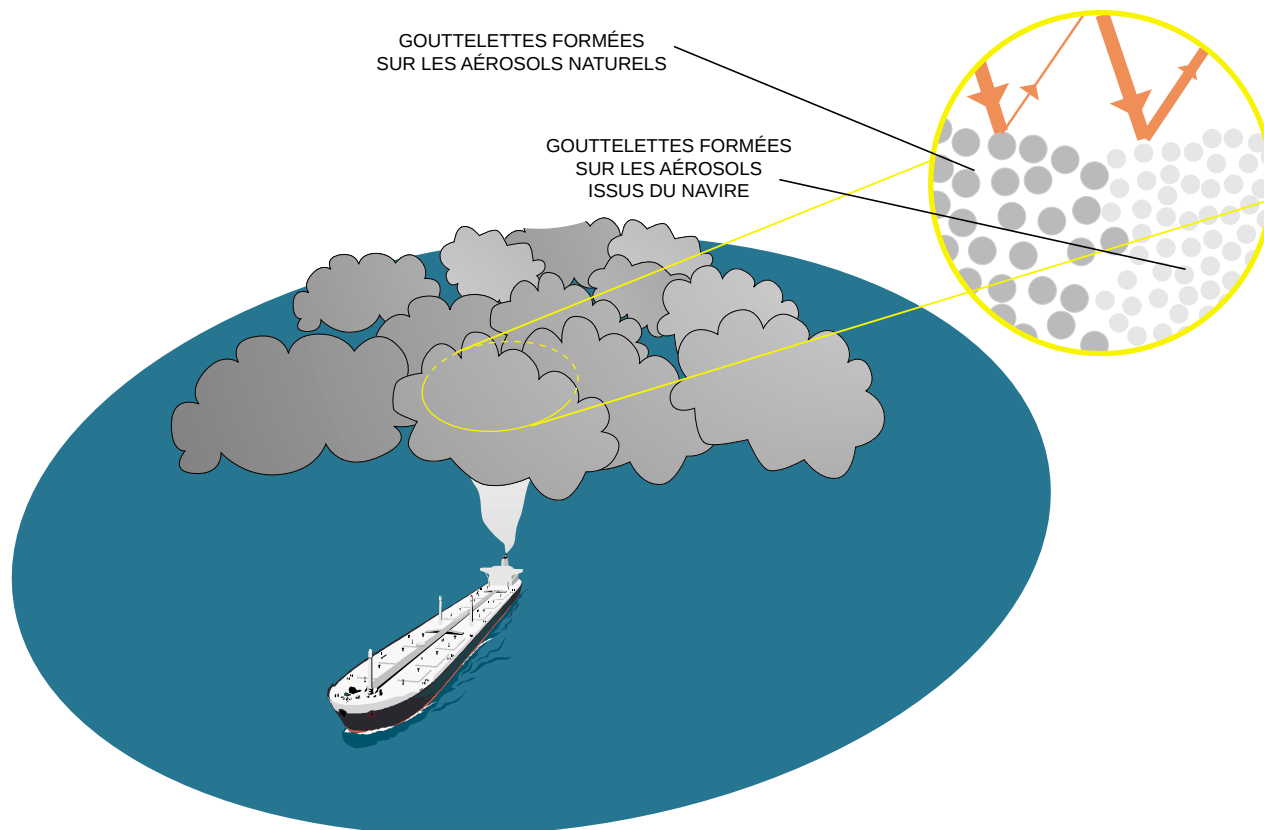
Aux longueurs d'onde du rayonnement visible (cartouche en haut à gauche, photographie à 0,63 micromètres), l'augmentation de la surface des gouttelettes augmente la diffusion du rayonnement solaire par le nuage : celui-ci est plus brillant. Ce phénomène est toutefois masqué par les variations de la brillance des nuages liées aux variations de leur épaisseur.

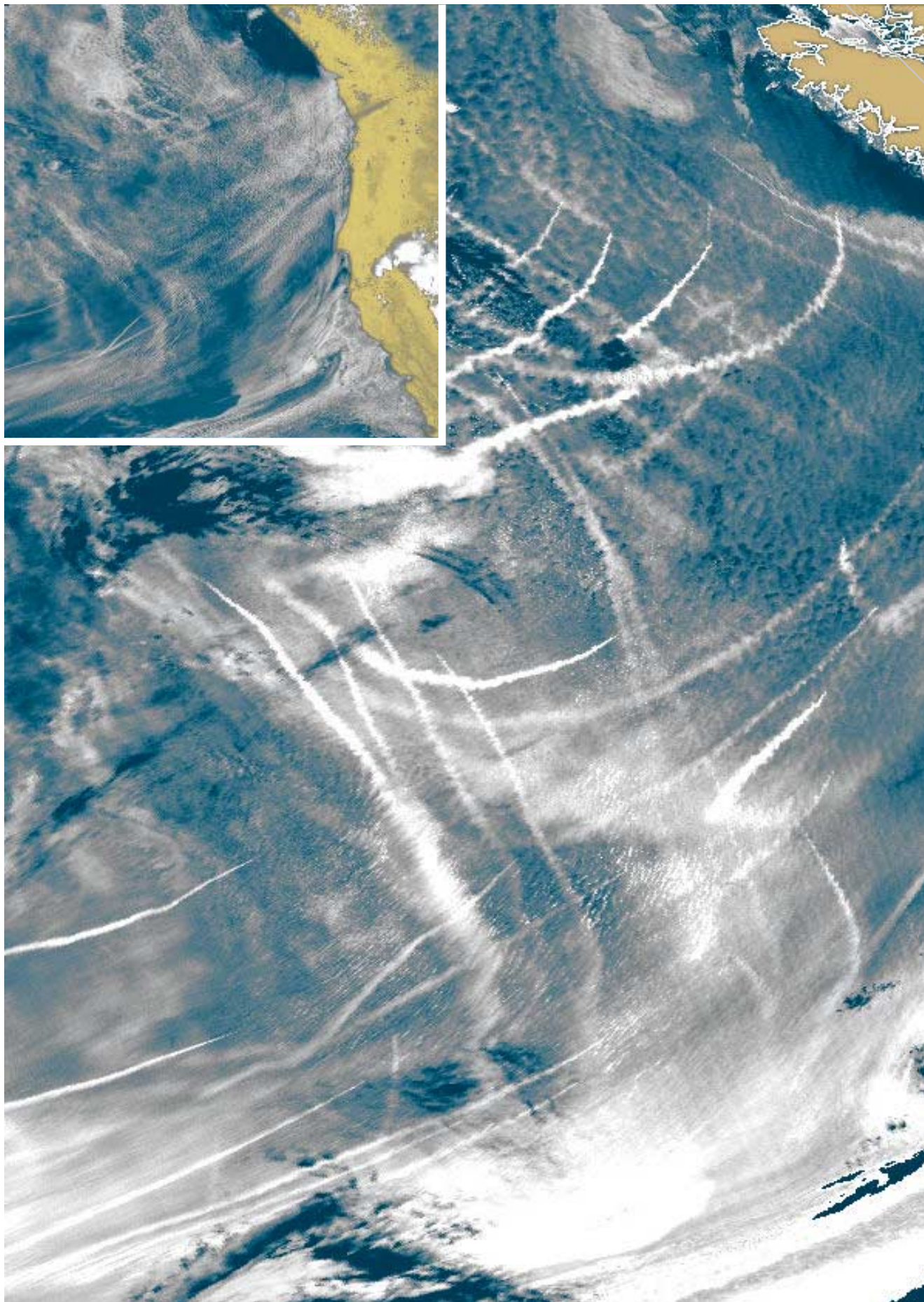
À la longueur d'onde de 3,7 micromètres, le rayonnement est fortement absorbé par l'eau. Lorsque la taille des gouttelettes diminue et que leur nombre augmente, à quantité d'eau constante, l'absorption totale augmente, mais moins vite que la diffusion : le contraste avec les régions environ-

nantes est donc plus marqué qu'à la longueur d'onde de 0,63 micromètre, et les traînées de navires sont bien plus visibles en infrarouge.

L'observation de ces traînées de navires, corroborée par des mesures *in situ*, nous fait soupçonner un effet similaire mais à plus grande échelle, lié aux aérosols d'origine industrielle (sulfates et aérosols carbonés) : l'augmentation de la réflexion du rayonnement solaire par les nuages bas des continents et des océans adjacents. Ce phénomène tendrait à refroidir le système climatique. Suffirait-il à compenser l'augmentation artificielle de l'effet de serre, liée à l'émission de gaz tels que le dioxyde de carbone ou le méthane par les activités humaines? Probablement pas, car les gaz à effet de serre résident plusieurs dizaines d'années dans l'atmosphère, tandis que les aérosols en disparaissent en une dizaine de jours. Les premiers «s'accumulent» dans l'atmosphère, tandis que la concentration en aérosols industriels reste à peu près proportionnelle aux flux émis.

Olivier BOUCHER,
Lab. d'optique atmosphérique,
Université de Lille I





M.D. King, S.C. Tsay et S. Plattick/Donn Wiley and Sons

