

La révision de la théorie nucléaire

À Noël, Lise Meitner rendit visite à un ami dans l'Ouest de la Suède ; son neveu Otto Frisch, physicien à l'Institut Niels Bohr, les rejoignit. Tous deux considéraient le noyau comme une goutte, mais ils comprirent alors que la goutte était animée de vibrations et prête à se scinder en deux. Otto Frisch comprit que la tension superficielle d'un noyau aussi gros que celui de l'uranium était très faible. Lise Meitner calcula de tête le défaut de masse et en déduisit une estimation de l'énorme énergie libérée lors de la fragmentation du noyau. Tous les éléments d'une nouvelle théorie se mettaient en place. La communauté des physiciens adopta le terme de « fission » que proposaient Lise Meitner et Otto Frisch, et Niels Bohr utilisa leurs travaux comme point de départ pour généraliser la théorie que les deux découvreurs avaient ébauchée.

La découverte du baryum par Otto Hahn et Fritz Strassmann fut publiée en janvier 1939 ; Lise Meitner et Otto Frisch publièrent leur interprétation quelques semaines plus tard. Contrairement à ce qui s'était réellement passé, la découverte de la fission n'apparut pas comme le fruit d'une coopération entre physiciens et chimistes, et l'on pouvait désormais croire que la fission avait été découverte par des chimistes, les physiciens s'étant contentés d'interpréter le phénomène.

Au cours des semaines qui suivirent la découverte, Otto Hahn profita de la situation. Il savait que Lise Meitner avait dû émigrer et qu'elle avait pleinement participé à la découverte, mais il ne pouvait pas le dire, car il craignait pour sa personne et pour sa carrière : il avait peur que l'on ne découvre que Fritz Strassmann et lui avaient continué à travailler avec Lise Meitner après son départ de Berlin. Il décida que la découverte de la fission résultait des seules expériences chimiques qu'il avait réalisées avec Fritz Strassmann en décembre 1938. En février 1939, il écrivit à Lise Meitner : « Nous n'avons pas fait de physique et nous nous sommes contentés de faire des séparations chimiques jusqu'à isoler le baryum. » Il qualifia la fission de « don du ciel » qui les protégerait, lui et son institut.

Toutefois Otto Hahn n'aurait pas eu besoin de renier Lise Meitner et la



5. DANS LES ANNÉES 1920, Lise Meitner, professeur et chef du département de physique de l'Institut de chimie Kaiser Wilhelm, devint une spécialiste renommée de physique nucléaire. Cette photographie, prise en 1920 au cours d'une visite de Niels Bohr à Berlin, rassemble plusieurs de ses plus proches collègues et amis ; près de la moitié ont reçu un prix Nobel. Au premier rang, de gauche à droite : Otto Stern (prix Nobel en 1943), James Franck (1925), Niels Bohr (1922) ; le deuxième en partant de la droite est Gustav Hertz (1925). À la droite de Lise Meitner et derrière elle, Otto Hahn (1944) et George de Hevesy (1943).

physique pour que le « miracle » se produise. Au printemps 1939, les militaires allemands s'intéressèrent de près aux applications potentielles de la nouvelle découverte et, dès l'été 1939, Otto Hahn et son institut étaient protégés.

La mise au point de la bombe atomique confirma l'importance de la fission, et Otto Hahn devint célèbre. Dans l'Allemagne de l'après-guerre, il fut une personnalité renommée, couronné par un prix Nobel, considéré comme un Allemand qui n'avait pas cédé aux nazis, qui n'avait pas construit de bombe. Pourtant, il fut injuste avec Lise Meitner : pas une seule fois dans ses nombreuses publications, ni dans ses interviews, ni dans ses mémoires, ni dans ses autobiographies, il ne mentionna la place prépondérante de Lise Meitner dans l'équipe de Berlin ni leur collaboration après son exil. Il mourut à Göttingen en 1968, à 89 ans.

En Suède, durant la guerre, Lise Meitner occupa une fonction très modeste. D'après ses amis, elle aurait eu le prix Nobel si elle avait émigré dans un autre pays. En 1943, elle fut invitée à Los Alamos pour travailler sur la bombe atomique, mais elle refusa. Après la guerre, elle fut brièvement célébrée aux États-Unis et en

Angleterre, où elle symbolisait – à tort – une réfugiée juive ayant échappé aux nazis en emportant le secret de la bombe atomique. Elle était réservée et détestait la publicité. Elle ne rédigea aucune autobiographie et n'autorisa personne à écrire une biographie. En 1960, elle quitta Stockholm pour Cambridge, en Angleterre, où elle mourut en 1968, quelques jours avant son 90^e anniversaire. Elle disparut près de 30 ans avant que ses travaux ne soient enfin reconnus.

Ruth LEWIN SIME est professeur de chimie à l'Université de Sacramento.

Lise MEITNER, *Looking Back*, in *Bulletin of the Atomic Scientists*, vol. 20, pp. 1-7, novembre 1964.

Otto R. FRISCH, *What Little I Remember*, Cambridge University Press, 1979.

Fritz KRAFFT, *Im Schatten der Sensation : Leben und Wirken von Fritz Strassmann*, Verlag Chemie, Weinheim, 1981.

Ruth LEWIN SIME, *Lise Meitner : A Life in Physics*, University of California Press, 1996.

Elisabeth CRAWFORD, Ruth LEWIN SIME et Mark WALKER, *A Nobel Tale of Postwar Injustice*, in *Physics Today*, vol. 50, n° 9, pp. 26-32, septembre 1997.

L'acoustique picoseconde

HUMPHREY MARIS

À l'aide d'ultrasons de très haute fréquence, on teste les connexions des circuits intégrés.

Depuis quelques décennies, les ingénieurs apprennent à construire des objets miniatures. Les circuits intégrés, par exemple, sont fabriqués à partir de minces couches de silicium que l'on enrichit d'impuretés judicieusement placées, afin de provoquer l'effet transistor ; au-dessus du semi-conducteur ainsi dopé, une succession de couches métalliques et de couches isolantes assurent les connexions des transistors. Certaines de ces couches ont une épaisseur de seulement dix milliardièmes de mètre. La qualité et l'efficacité de ces circuits et les performances des systèmes où ces circuits sont incorporés, dépendent de l'épaisseur et de la régularité des diverses couches.

L'épaisseur des couches est généralement comprise entre cinq nanomètres (ou milliardièmes de mètre) et quelques micromètres. Pour les couches les plus minces, l'épaisseur doit être connue à moins d'un dixième de nanomètre, c'est-à-dire moins que la taille d'un atome. Les mesures d'épaisseur, excessivement difficiles, se font par des techniques qui détruisent les échantillons : on les coupe perpendiculairement à la surface des couches, et on observe par la tranche.

Pour obtenir des épaisseurs précises, la plupart des fabricants contrôlent en permanence les conditions de fabrication comme la température, l'hygrométrie et la pression, sacrifiant périodiquement des composants afin de les analyser en cours de fabrication.

En 1985, afin d'étudier le comportement des électrons dans des matériaux semi-conducteurs, nous avons envoyé une brève impulsion lumineuse sur un film métallique déposé à la surface d'un échantillon ; puis, quand nous avons envoyé une seconde impulsion lumineuse, nous avons constaté que la surface réfléchissait la lumière de façon périodique, au cours du temps ; nous avons ainsi découvert que la surface vibrait et qu'elle était parcourue par des

ondes de pression de longueur d'onde égale à 50 nanomètres environ. Personne n'avait envisagé que des ondes sonores de fréquence aussi élevée et de durée aussi brève puissent être émises.

Une technique naturelle

Après cette découverte, nous avons mis au point une technique qui utilise ces émissions extraordinairement brèves pour étudier les structures microscopiques, tels les films métalliques des composants électroniques.

Notre technique reprend le principe de l'écholocation des chauve-souris. En 1912, l'ingénieur Hiram Maxim, connu pour ses avions et son invention de la mitrailleuse, proposa que les chauve-souris détectent les insectes volants à l'aide d'ondes de pression inaudibles pour l'oreille humaine ; il supposa que ces ondes étaient des ondes de basses fréquences, produites par les battements de leurs ailes. Toutefois de telles ondes, avec leur grande longueur d'onde, sont diffractées par les petits objets, et non réfléchies : la théorie de Maxim expliquait mal comment les chauve-souris captent les très faibles échos réfléchis par leurs proies.

En 1920, à l'Université de Cambridge, Hamilton Hartridge proposa alors que les ondes émises soient des ultrasons, c'est-à-dire à des ondes de pression à des fréquences supérieures à celles des sons les plus aigus perceptibles par l'oreille humaine. Puis, en 1938, à Harvard, George Pierce et Donald Griffin détectèrent ces émissions. Depuis ces études, les zoologistes ont enregistré les ondes inaudibles émises par de nombreux animaux, tels les dauphins et certains oiseaux. Même des insectes utilisent ce principe : les gerris, les tourniquets et les autres gyrins qui glissent à la surface des eaux douces utilisent la réflexion des ondes produites lors de leur déplacement sur l'eau pour localiser les objets.

Le sonar des chauve-souris est remarquablement perfectionné. Les déplacements de l'animal décalent la fréquence de l'écho reçu par rapport à celle du signal émis en raison de l'effet Doppler, le même effet qui change la hauteur du son d'une ambulance quand elle s'éloigne d'un observateur, après s'en être approché rapidement : la chauve-souris utilise ce décalage pour déterminer la direction et la vitesse de ses proies (le même effet permet aux policiers de détecter les excès de vitesse des automobilistes). En outre, à l'intérieur de chacune des séquences émises, la chauve-souris varie la fréquence du son. Cette modulation aide l'animal à analyser le signal reçu et à identifier sa proie, en déterminant sa forme, sa taille, la fréquence de battement de ses ailes.

Pour déterminer sa distance à un insecte, la chauve-souris doit achever l'émission du signal ultrasonore avant que l'écho ne revienne. Comme la vitesse du son dans l'air est égale à 330 mètres par seconde, les ultrasons ne mettent qu'un cinquantième de seconde pour atteindre un insecte situé à une distance de 3,30 mètres et revenir. Lorsqu'un insecte est ainsi détecté, la chauve-souris émet des séquences d'ultrasons de plus en plus courtes (jusque moins d'une milliseconde), afin de localiser l'insecte à mieux qu'un mètre près.

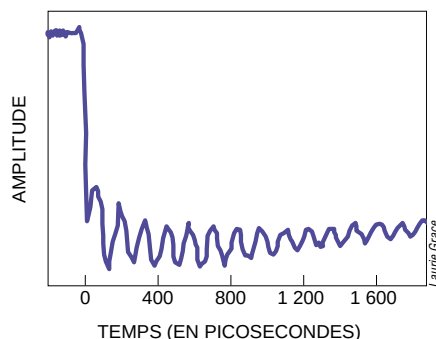
Les mesures d'épaisseur des très petites structures métalliques sont encore plus difficiles, car la vitesse du son dans l'aluminium atteint 6 000 mètres par seconde : l'aller et retour d'une onde sonore à travers une couche métallique d'un cent millionième de mètre dure seulement trois billionnièmes de seconde. Pour effectuer des mesures sonar sur de tels objets, nous avons dû trouver un moyen de créer des impulsions ultrasonores qui durent moins d'un billionième de seconde.

Pour transmettre des sons dans les liquides ou dans les solides, les phy-

siciens utilisent généralement des transducteurs piézo-électriques, composés de cristaux, tel le quartz, dont le volume change quand on leur applique une tension électrique. L'application d'un courant électrique alternatif fait vibrer ces cristaux à la fréquence du courant. Ainsi, depuis les années 1920, les physiciens produisent des sons de fréquences comprises entre 100 kilohertz et 1 000 mégahertz, pendant des durées qui peuvent être inférieures à un millionième de seconde. À l'aide de telles ondes, on teste des matériaux de quelques millimètres d'épaisseur seulement : les performances sont bien insuffisantes pour l'analyse des circuits intégrés.

Toutefois des progrès effectués par les spécialistes des lasers nous ont donné les moyens de mettre en œuvre notre idée. Les lasers se sont considérablement perfectionnés, depuis le premier, qui fut construit en 1960 par Theodore Maiman, des Laboratoires de recherche *Hughes* : ce système com-

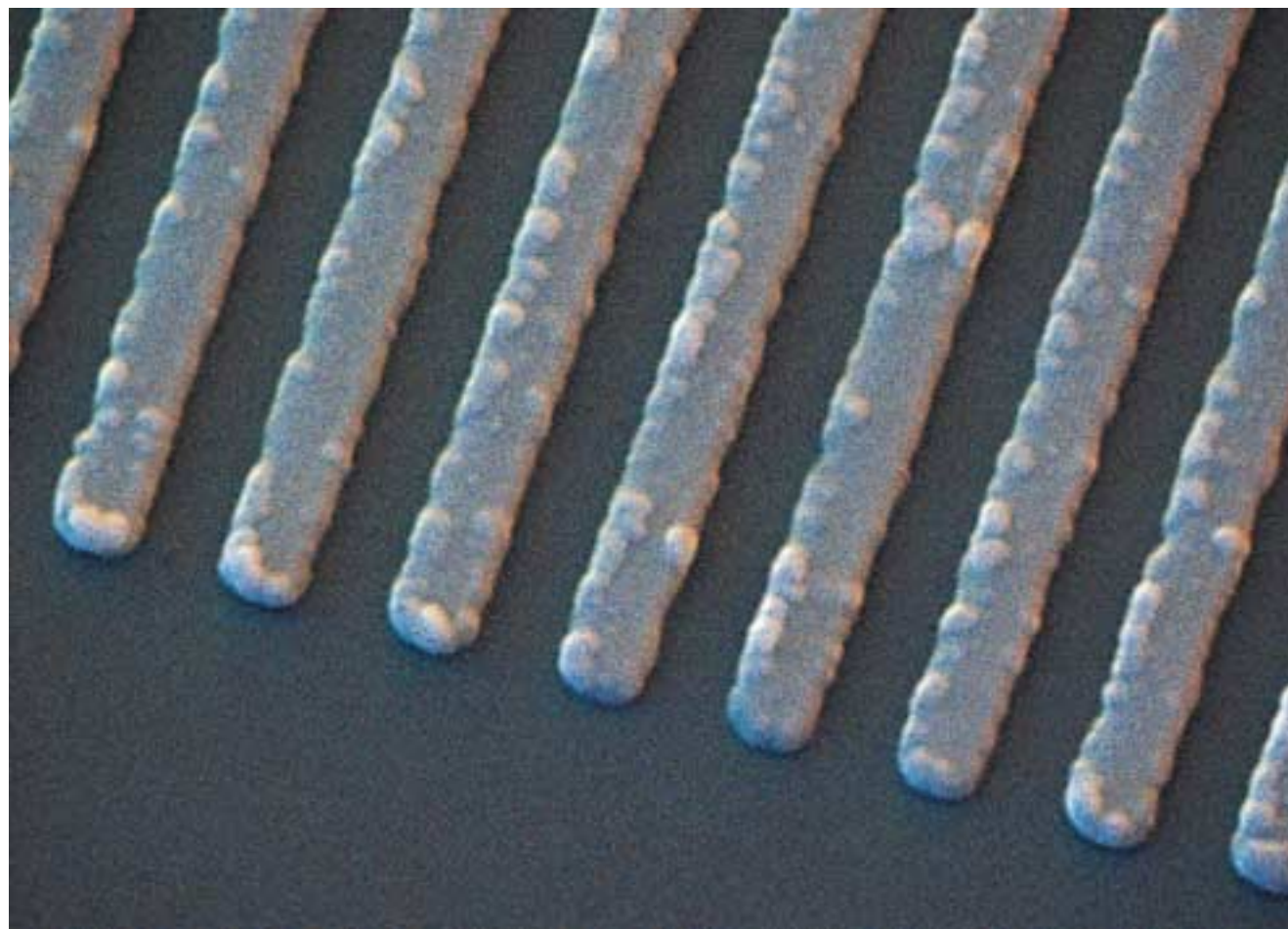
portait des flashes qui excitaient des atomes de chrome d'un cylindre de rubis ; la désexcitation de ces atomes amplifiait la lumière qui traversait le rubis. Ce laser émettait de la lumière rouge sous la forme d'impulsions qui duraient moins d'un millièm de seconde. Le laser à rubis de Maiman fut suivi de lasers à gaz, de lasers à colorants et de lasers à état solide (il existe même un laser où le matériau actif est la gélatine, mangeable après utilisation). Depuis le début des années



1980, certains lasers émettent des impulsions lumineuses qui durent moins d'un cent millionième de millionième de seconde (10^{-14}) : le train d'ondes lumineuses ne comprend que cinq longueurs d'onde et s'étend sur trois micromètres.

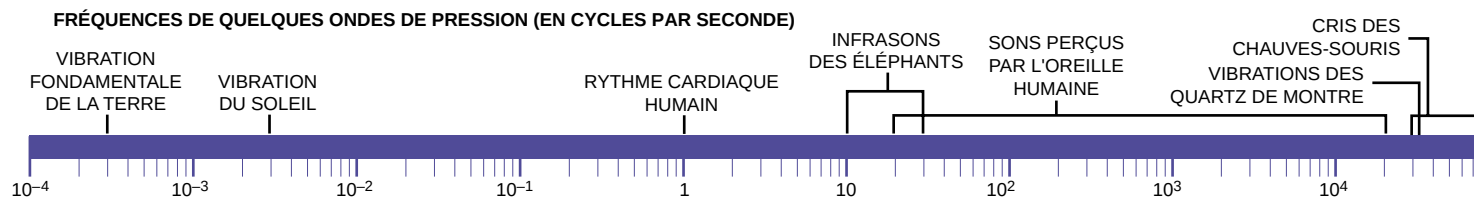
Dans notre laboratoire, nous utilisons la lumière d'un laser à impulsions pour former des ondes de pression : nous focalisons le faisceau du laser sur une couche très mince, à la surface d'un matériau qui absorbe les photons (ou «grains de lumière»). L'énergie des photons est transmise aux électrons, qui se déplacent sur de courtes distances dans le matériau en dissipant de l'énergie. La température de la surface du matériau augmente alors brusquement de quelques degrés, provoquant une dilatation : une onde de compression, parfois une seule compression, se propage alors dans le matériau.

Les impulsions ultrasonores ainsi produites durent parfois une picoseconde seulement (10^{-12} seconde) et



1. CE NANOXYLOPHONE produit des sons à des fréquences de 8 gigahertz, soit 24 octaves au-dessus du *do* central du piano. Il est composé de petites lamelles d'or de moins de 150 atomes d'épaisseur. La courbe supérieure montre la variation de l'amplitude du son

émis. Les ingénieurs de l'industrie micro-électronique utilisent des ondes de fréquences encore supérieures, durant quelques picosecondes (ou millionièmes de millionième de seconde), pour tester la qualité des circuits intégrés.



s'étendent sur quelques nanomètres. Leur amplitude, c'est-à-dire la distance sur laquelle elles déplacent les atomes, est à peine dix fois le diamètre d'un noyau d'atome.

Comment détecter les échos de ces minuscules impulsions, après leur propagation dans les échantillons? La découverte de la réflexion périodique des surfaces a répondu à cette question :

quand l'écho revient à la surface du matériau, il la déforme de manière périodique, provoquant des changements de ses propriétés optiques. Nous détectons ces variations à l'aide d'une seconde impulsion lumineuse dirigée vers la surface.

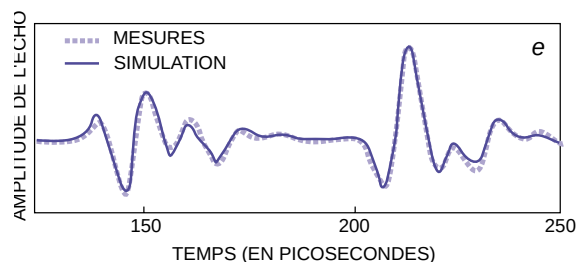
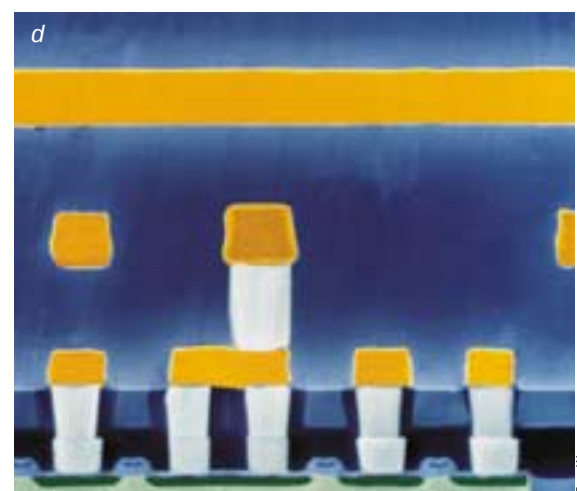
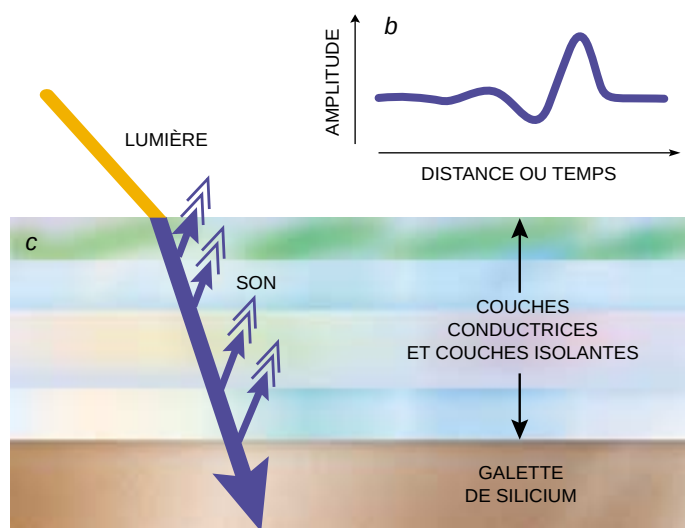
Les impulsions ultrasonores déterminent l'épaisseur d'une couche avec une précision meilleure que le dixième de nanomètre, qui est bien inférieure

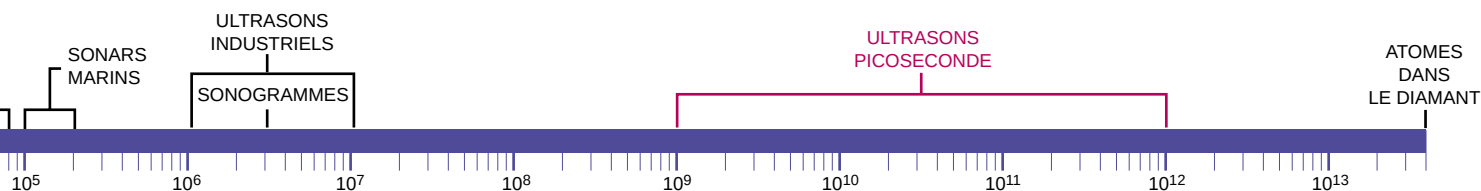
à la longueur d'onde des ultrasons (comprise entre 5 et 50 nanomètres) : il y a là de quoi heurter l'intuition des physiciens, qui savent que les méthodes optiques ont une résolution limitée par la longueur d'onde des rayonnements utilisés. Toutefois nous évitons cette limitation en comparant le profil de l'onde ultrasonore émise et le profil de l'onde réfléchie. Alors

L'échographie picoseconde



L'industrie micro-électronique utilise les ultrasons pour étudier les propriétés des couches métalliques à l'intérieur des composants électroniques : un rayon laser (a) qui éclaire la surface d'une puce chauffe le matériau et engendre un train d'onde ultrasonore (b) de longueur égale à dix nanomètres environ (ce qui correspond à une durée d'une picoseconde, ou un millionième de millionième de seconde). Les ultrasons sont réfléchis par les diverses structures dont l'empilement compose les circuits (c et d). Lorsque les échos reviennent à la surface, ils en modifient les propriétés optiques, que l'on mesure à l'aide d'un second laser. Par ordinateur, on compare la forme de l'écho à un modèle (e) afin de déterminer la position exacte, l'épaisseur et la qualité des interfaces des couches internes.





que le début et la fin d'un train d'onde sont difficiles à déterminer, on localise facilement le maximum à moins d'une fraction de picoseconde, de sorte que l'on mesure la longueur de propagation de l'onde à moins d'un dixième de nanomètre près. La méthode de comparaison des profils est analogue à l'interférométrie.

Ayant mis au point ce procédé, certains physiciens de notre équipe se demandèrent si, avec notre système, nous pourrions faire de la musique : ne savions-nous pas déjà faire des sons ? En collaboration avec des ingénieurs du Centre de recherche IBM de Yorktown Heights, nous avons alors réalisé un «nanoxylophone», dont chaque élément vibrant est une lamelle d'or de moins de 40 nanomètres d'épaisseur et de 200 nanomètres de large. Lorsque nous envoyons une impulsion lumineuse sur une de ces lamelles, nous obtenons un son à une fréquence de huit gigahertz, environ 24 octaves au-dessus du *do* central du piano.

Nous avons également trouvé d'autres structures qui vibrent lorsqu'elles sont excitées par une impulsion lumineuse. Le ton le plus élevé que nous ayons atteint a une fréquence égale à 700 gigahertz, sept octaves au-dessus de la précédente. Toutefois notre nanoxylophone est un médiocre instrument de musique, car toutes ses lamelles produisent à peu près la même note.

À côté de ces explorations acoustiques, certains d'entre nous se préoccupaient de la mise au point de tests non destructifs des circuits intégrés. La fabrication de tels circuits nécessite plusieurs centaines d'étapes et des semaines de travail. Après la découpe d'un barreau de silicium très pur en galettes de 20 centimètres de diamètre et d'une fraction de millimètre d'épaisseur, on effectue un polissage, puis on injecte des impuretés sélectionnées, qui modifient la conduction électrique locale. Le semi-conducteur est alors recouvert de diverses couches minces, métalliques ou isolantes.

Les couches métalliques qui relient électriquement les différentes parties du circuit forment un réseau sur toute

la galette de silicium, à la manière d'un réseau autoroutier, avec ses ponts et ses échangeurs. Les couches isolantes, composées de silice ou de polymères, séparent les couches de métal. En fin de fabrication, les galettes sont découpées en une centaine de circuits intégrés.

Toute perturbation du processus de fabrication peut conduire à un désastre. Notamment l'ensemble du travail doit se faire en salle blanche, car la moindre particule de poussière bloque le fonctionnement des transistors. Or tous les transistors d'un circuit doivent être synchronisés pour que le circuit complet fonctionne ; cette synchronisation dépend des temps de transfert des signaux et de la résistance électrique de la couche métallique qui sépare les transistors. Comme cette résistance est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche métallique, le contrôle des épaisseurs est fondamental.

Une puce et au-delà

L'acoustique picoseconde permet aux fabricants de mesurer l'épaisseur des couches dans les circuits intégrés. Une impulsion lumineuse, focalisée sur la partie de composant à étudier, est absorbée par la couche supérieure du circuit. L'échauffement et la dilatation qui en résultent engendrent des ondes de pression qui se propagent au travers de l'empilement. Chaque fois que l'onde de pression rencontre une interface entre deux couches, une partie du signal est réfléchi. En mesurant les temps mis par ces échos pour revenir en surface, on détermine l'épaisseur de chaque couche avec précision.

Cette méthode est analogue aux techniques sismiques que les géophysiciens utilisent pour déterminer l'épaisseur des diverses couches de la croûte terrestre, mais les couches sont si minces que les échos se rejoignent et interfèrent. Le phénomène est analogue à celui que l'on observe quand de la lumière se réfléchit sur une couche d'huile à la surface de l'eau : les interférences conduisent à des figures irisées. Dans le cas des circuits testés par acoustique picoseconde, les ondes produi-

sent des battements qu'on doit déchiffrer pour en extraire des renseignements sur la géométrie et la taille des couches.

Les échos révèlent de nombreuses autres caractéristiques des couches empilées. Lorsqu'une impulsion de pression se réfléchit sur une surface irrégulière, l'onde se disperse dans l'espace et dans le temps. L'analyse des formes d'ondes donne une idée de la rugosité de la surface. De même, l'amplitude de l'écho révèle la qualité de la jonction entre deux couches : lorsque le contact entre deux films est mauvais, par exemple en raison d'une contamination, l'onde ne franchit pas l'interface, de sorte que le signal réfléchi est anormalement intense.

Maintenant que l'acoustique picoseconde a fait ses preuves pour l'étude des circuits intégrés, nous cherchons à l'utiliser pour étudier des systèmes plus compliqués. Les médecins utilisent déjà des échographies pour surveiller le bon développement des fœtus, *in utero*. À l'aide des ultrasons picosecondes, nous espérons sonder l'intérieur d'une cellule vivante. Nous voudrions créer des images acoustiques des cellules et analyser leur fonctionnement. Notamment nous cherchons à réaliser des images fines du cytosquelette (le réseau qui soutient l'ensemble de la cellule), afin de réaliser l'équivalent des radiographies, mais à l'échelle microscopique.

Humphrey MARIS est professeur de physique à l'Université Brown.

H.-N. LIN et al., *Study of Vibrational Modes of Gold Nanostructures by Picosecond Ultrasonics*, in *Journal of Applied Physics*, vol. 73, n° 6, pp. 37-45, 1er janvier 1993.

Stephen A. CAMPBELL, *The Science and Engineering of Microelectronic Fabrication*, Oxford University Press, 1996.

Bernard PERRIN, Bernard NONELLO, Jean-Claude JEANNET et Alain MARILLIER, *Développements récents en acoustique picoseconde*, Actes du 4e Congrès français d'acoustique, vol. 1, p. 117, 1997.

C.J. MORATH et al., *Ultrasonic Multilayer Metal Film Metrology*, in *Solid State Technology*, vol. 40, n° 6, pp. 85-92, juin 1997.



Aléas du hasard informatique

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le vrai hasard étant hasardeux, contentons-nous d'un pseudo-hasard et adaptons-le à nos besoins.

Un calcul composé de milliards d'étapes successives peut être répété et donner exactement le même résultat : le hasard a été éliminé des systèmes informatiques. Cette extraordinaire maîtrise des petits courants électriques, que l'on combine pour exécuter un programme, est époustouflante. Dans nos ordinateurs, le hasard est maîtrisé jusqu'au niveau microscopique : il a disparu ! N'est-il pas étonnant qu'on en ait besoin ? Après avoir tout fait pour l'éliminer, il faut recréer le hasard...

Roland Moreno, plus connu pour son invention de la carte à puce, avait perfectionné, dans sa jeunesse journalistique, un dispositif automatique pour tirer à pile ou face. L'informatique supplée au tirage physique dans un grand nombre d'applications où il faut engendrer rapidement des chiffres aléatoires.

La difficulté est la suivante : il faut imiter autant que possible un tirage à pile ou face, où la connaissance d'un lancer ne permet pas de déterminer le résultat du lancer suivant, et ce, par un programme fondé sur une formule mathématique d'utilisation simple par l'ordinateur. Or, qui dit formule mathématique, dit déterminisme, donc un hasard limité.

NÉCESSITÉ DU HASARD

Le hasard est nécessaire dans les logiciels de *simulation* : pour reproduire des phénomènes aléatoires, il faut disposer de briques élémentaires d'aléas, c'est-à-dire de nombres aléatoires.

En *cryptographie* aussi, où, pour échapper aux espions, on doit déguiser les messages en les combinant avec des séquences de chiffres quelconques, c'est-à-dire aléatoires : on constate d'ailleurs qu'à partir d'un bon système de codage, on obtient un bon système de création de suites aléatoires et... inversement.

Le hasard est nécessaire en *théorie de l'information*, où les séquences au plus

fort contenu en information sont justement les séquences vraiment aléatoires. Aussi s'est développée une science de la production contrôlée de l'aléa, qui a aujourd'hui atteint un grand raffinement.

En réalité, il y a au moins trois disciplines dans la science du hasard : celle du *hasard faible*, utile pour les simulations, celle du *hasard moyen*, qui convient

en cryptographie, et celle du *hasard fort*, née de la théorie de l'information et de la calculabilité.

LE HASARD FAIBLE

Pour créer un nuage de points noirs destinés à colorier en gris une partie d'image (et plus généralement dans

TESTS SPECTRAUX : LES RÉSEAUX DE POINTS

Les générateurs congruentiels linéaires sont utilisés pour définir les fonctions *random* des langages de programmation. On se donne M , a et b , ainsi qu'un point de départ appelé *graine* $x(0)$ et l'on calcule $x(1)$, $x(2)$, etc., avec la formule :

$$x(n+1) = (a x(n) + b) \bmod M \quad u(n) = x(n)/M$$

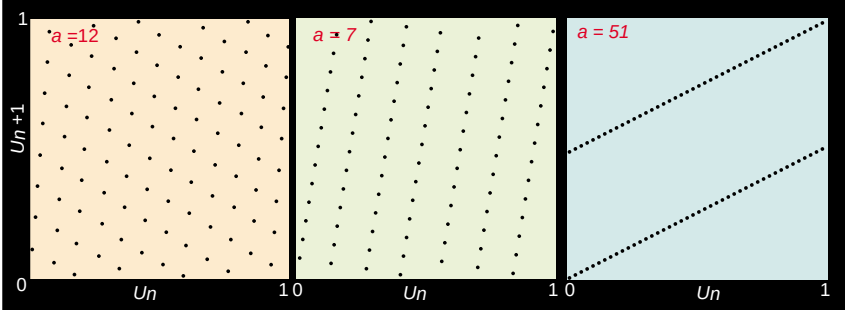
($z \bmod M$ désigne le reste de la division de z par M)

Pour en tester les qualités, en plus de la période qu'on s'arrange pour obtenir la plus grande possible, on associe à ces suites des points dans un espace de dimension deux ou plus. On obtient un réseau régulier dont les caractéristiques donnent des indications sur la qualité du générateur pseudo-aléatoire.

Exemple. Avec $M = 101$, $b = 0$. On représente les points de coordonnées $u(n)$, $u(n+1)$ pour trois valeurs de a , $a = 12$, $a = 7$, $a = 51$, $b = 0$.

La période est à chaque fois maximale, c'est-à-dire 100.

On voit très clairement la structure en réseau.



1. En prenant une suite pseudo-aléatoire de nombre entre 0 et 1, $u(0)$, $u(1)$, etc. et en dessinant les points $M(0) = (u(0), u(1))$, $M(1) = (u(1), u(2))$, etc., on obtient une figure où l'imperfection des $u(i)$ apparaît instantanément. Ici on examine les générateurs congruentiels linéaires. Pour $a = 12$, les points sont bien distribués (trop bien ?). Pour $a = 7$, le résultat est un peu moins bon, et pour $a = 51$, il n'est pas satisfaisant. Des méthodes mathématiques et des algorithmes spécialisés permettent de calculer les meilleurs jeux de paramètres pour que les réseaux (en dimension deux ou plus) soient satisfaisants. Un générateur de ce type, nommé RANDU, fut exploité pendant des années dans toutes sortes de logiciels (en particulier, dans le système d'exploitation des machines de la fameuse gamme IBM 360), avant qu'on ne découvre ses graves insuffisances. Les paramètres utilisés étaient : $M = 2^{31}$, $a = 65539$, $b = 0$.