

5. LES VOLS RECORDS

VOL	DURÉE	ALTITUDE MAXIMALE
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
25	23	88
27	111	9232
54	112	9232
73	115	9232
97	118	9232
129	121	9232
171	124	9232
231	127	9232
313	130	9232
327	143	9232
649	144	9232
703	170	250504
871	178	190996
1161	181	190996
2223	182	250504
2463	208	250504
2919	216	250504
3711	237	481624
6171	261	975400
10971	267	975400
13255	275	497176
17647	278	11003416

conjecture de Syracuse qui pourtant serait vraie ?

Notons que la conjecture pourrait être fausse et que cela soit indécidable par les méthodes mathématiques traditionnelles : cela signifierait qu'un jour nous allons tomber sur un entier que nous n'arriverons pas à faire atterrir sur 1, mais dont nous ne saurons pas montrer non plus qu'il n'atterrira jamais sur 1.

Exceptionnellement, nous avons quelques raisons de considérer cette question de l'indécidabilité avec sérieux, car un résultat de logique mathématique établit que nous ne sommes pas loin de l'indécidabilité.

Ce résultat est dû à J. Conway. Celui-ci a considéré les généralisations de la conjecture de Syracuse obtenues en prenant non plus deux formules qu'on applique selon que n est pair ou impair, mais en considérant p formules qu'on applique selon le reste de la division de n par p . Conway montre comment définir précisément une conjecture, du type « tout n atterrit à 1 », de telle façon qu'elle soit indécidable dans la théorie des ensembles.

En fait, dans n'importe quelle théorie mathématique, la méthode de Conway permet de construire un problème ressemblant à la conjecture de Syracuse et qui y soit indécidable (attention : cela ne

signifie pas qu'on puisse définir un problème de type Syracuse qui soit indécidable dans toutes les théories à la fois ; une telle chose n'existe pas, car « être indécidable » est toujours relatif à une théorie fixée).

Le résultat de Conway n'établit pas que la conjecture est indécidable ni même qu'elle est difficile (car certaines variantes de la conjecture sont faciles !), mais seulement que des problèmes assez semblables le sont, ce qui est quand même troublant.

En 1993, le résultat de Conway a été utilisé par Philippe Devienne, Patrick Lebègue et Jean-Christophe Routier, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, pour démontrer la puissance d'un formalisme de programmation à base de règles logiques. Comme d'habitude, les recherches en apparence les plus futiles se trouvent avoir des conséquences pratiques, insoupçonnables *a priori*.

LES VARIANTES SONT AUSSI DIFFICILES

Les mathématiciens sont toujours soucieux de généralité, car elle permet d'extraire pleinement la puissance d'un raisonnement particulier et d'en tirer des conséquences inattendues. Ils se sont donc interrogés sur ce qu'on obtenait pour des problèmes ressemblant à la conjecture de Syracuse.

Ils se sont demandé d'abord ce qui se passait pour le problème $3x + 1$ lorsqu'on autorisait les altitudes négatives. La conjecture qu'ils ont proposée est que tous les vols se terminent sur l'un des trois cycles suivants :

$-1 \rightarrow -2$.
 $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10$.
 $-17 \rightarrow -50 \rightarrow -25 \rightarrow -74 \rightarrow -37 \rightarrow -110$
 $\rightarrow -55 \rightarrow -164 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -122 \rightarrow$
 $-61 \rightarrow -182 \rightarrow -91 \rightarrow -272 \rightarrow -136 \rightarrow$
 $-68 \rightarrow -34$.

Pour la fonction $5x + 1$ (à utiliser à place de $3x + 1$ quand x est impair), tous les vols n'arrivent pas à 1, car, en plus du cycle $6 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, on trouve les cycles :

$13 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 416 \rightarrow$
 $208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26$.
 $17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27$
 $\rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34$.

Le vol 7 pour $5x + 1$ semble infini quoi qu'on ne sache pas le démontrer.

L'adaptation de l'argument heuristique de Lagarias suggère d'ailleurs que, pour $qx + 1$ à la place de $3x + 1$, si q est > 3 , alors il existe des vols infinis.

Pour le problème $181x + 1$, on trouve un cycle qui ne contient pas 1. De même, pour $q = 1\,093$, on démontre que certains vols n'atterrissent pas à 1.

Tout cela a conduit à une nouvelle conjecture formulée par Richard Crandal (une sorte de conjecture anti-Syracuse) qui affirme : pour $q \times x + 1$ (à la place de $3x + 1$), avec q impair et supérieur à 3, il y a toujours au moins un vol qui n'atterrit pas en 1. Bien sûr, cette conjecture reste à démontrer !

Les considérations ci-dessus sur les cycles montrent que la conjecture de Crandal est vraie pour q égal à 5, 181 et 1093. En 1995, Z. Franco et C. Pomerance ont montré que les entiers q pour lesquels la conjecture de Crandal était vraie devenaient de plus en plus fréquents quand q tend vers l'infini, autrement dit que la conjecture était « presque vraie » (comme il est « presque vrai » que tout vol pour $3x + 1$ passe sous son point de départ).

D'autres généralisations ont été formulées, et des résultats ont établi des connexions entre ces questions, l'arithmétique des nombres premiers, certaines équations diophantiennes (équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions en nombres entiers), les chaînes de Markov (des itérations probabilistes) et la théorie ergodique (études de l'utilisation répétée des fonctions de mélange).

Avec toutes ces variantes donc, même si la conjecture de Syracuse était résolue prochainement, les mathématiciens et les expérimentateurs numériques ont de quoi s'amuser pendant des siècles.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr

J. H. CONWAY, *Unpredictable Iterations*. Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, 1972.

V. KLEE et **S. WAGON**, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*. Ch. 19 : The $3x + 1$ Problem, Math. Assoc. of America, Dolciani Math. Exposition, 11, 1993.

J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem and its Generalizations*, in *Amer. Math. Monthly*, 92, pp. 3-23, 1985.

J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem Annotated Bibliography*. Novembre 1997. Communication personnelle.

K.R. MATTHEWS, *The Generalized $3x + 1$ Mapping*, 1997, à paraître.

T. Oliveira e SILVA, *Maximum Excursion and Stopping Time Record Holders for the $3x+1$ Problem : Computational Results*. À paraître dans *Mathematics of Computation*.

E. ROOSENDAL, *On the $3x + 1$ Problem (1-1998)* : <http://personal.compu-train.nl/eric/wondrous/>



Bouteilles et rubans

IAN STEWART

Soufflage de verre et topologie.

Alan Bennett est un souffleur de verre qui exerce son art à Bedford, en Angleterre. Il y quelques années, il fut intrigué par les étranges surfaces qu'étudient les topologistes : ruban de Möbius, bouteilles de Klein, etc. Cherchant à les reproduire, il rencontra un curieux problème mathématique qu'il résolut par le soufflage, alors que des mathématiciens avaient jusque là échoué. Sa série d'objets remarquables, de la recherche mathématique figée dans le verre, sera bientôt exposée dans les musées scientifiques.

Les topologistes étudient les propriétés qui sont inchangées quand une forme est étirée, tordue ou arbitrairement déformée. On impose seulement aux déformations d'être « continues » : les objets peuvent être coupés s'ils sont recollés, de sorte que des points initialement voisins le soient encore après le recollement. La connexion est une propriété topologique : les objets sont-ils d'une ou de plusieurs pièces ? Il y a d'autres interrogations topologiques. Les objets sont-ils noués ? Sont-ils liés les uns aux autres ? Sont-ils troués ?

Les formes topologiques les plus usuelles semblent n'être que des amusements enfantins, mais ils sont pleins de mystères mathématiques profonds. Ainsi, le ruban de Möbius, que l'on obtient en recollant les extrémités d'une bande de papier, après l'avoir tordue d'un demi tour, est la plus simple des surfaces à une seule face : si deux peintres munis respectivement de peinture bleue et de peinture rouge peignaient ce qu'ils pensaient être les deux faces d'un ruban, ils finiraient par se rencontrer.

Quand on tord une bande de plusieurs demi tours avant de la recoller, on obtient des variantes du ruban de Möbius. Pour un topologiste, la distinction importante réside entre les bandes recollées après un nombre pair de demi

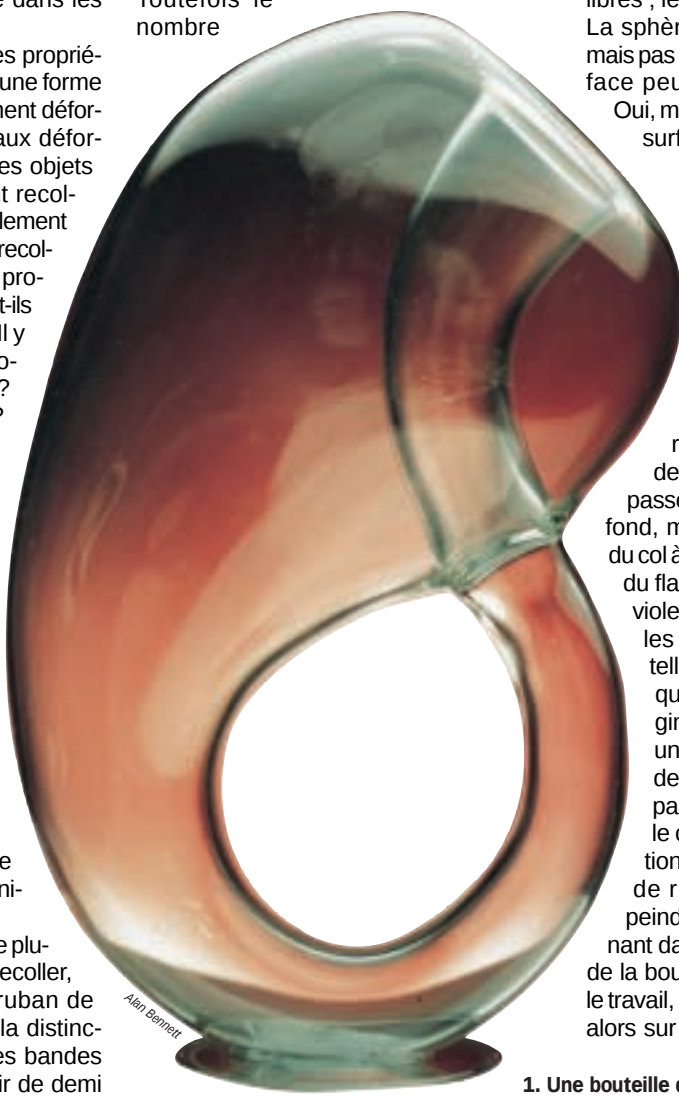
tours, et les bandes recollées après un nombre impair de demi tours ; les premières n'ont qu'une face, et les secondes en ont deux. Pour comprendre pourquoi, coupez une bande tordue de trois demi tours, par exemple ; puis, en conservant les deux coupures parallèles, déplacez l'une des extrémités afin de la dérouler (et non la détordre), avant de la ramener vers l'autre extrémité ; vous obtiendrez, par recollement, un ruban de Möbius, mais pas un simple cylindre. Toutefois le nombre

exact de demi torsions n'est pas sans importance : il détermine la façon dont la bande est plongée dans l'espace qui l'environne. La question de la géométrie intrinsèque de la bande est donc d'un autre ordre que la manière dont la bande est plongée dans l'espace. La première ne dépend que de la parité du nombre de demi tours, la seconde de la valeur exacte de ce nombre.

Le cylindre, obtenu par recollement d'une bande sans torsion, a deux bords libres ; le ruban de Möbius en a un seul. La sphère, en revanche, a deux faces mais pas de bord. Une surface à une seule face peut-elle ne pas avoir de bord ?

Oui, mais, dans notre espace, une telle surface se recoupe elle-même.

Cette particularité ne gêne pas les topologistes, dont c'est le métier d'imaginer des surfaces dans des espaces de dimensions supérieures ou, même, débarrassées des espaces où ces surfaces seraient plongées. En revanche, pour les souffleurs de verre, la difficulté est considérable. La figure 1 représente pourtant une bouteille de Klein en verre : le col a été étiré, passé à travers le flanc et recollé au fond, mais par l'intérieur. Le passage du col à travers le flanc sépare les points du flanc de façon permanente, ce qui viole les règles de la topologie, mais les topologistes admirent tant une telle matérialisation de leurs idées qu'ils ne s'en plaindront pas. Imaginons que nous voulions peindre une telle bouteille : nous partirions de l'extérieur du bulbe supérieur, par exemple, et descendrions vers le col. En arrivant à l'auto-intersection, nous poursuivrions comme si de rien n'était et continuerions à peindre le col, qui se trouve maintenant dans ce qui semble être l'intérieur de la bouteille. Toutefois, en poursuivant le travail, nous verrions que nous sommes alors sur la face « interne » du bulbe : ce



1. Une bouteille de Klein soufflée par Alan Bennett.



2. Bouteille de Klein à trois cols.



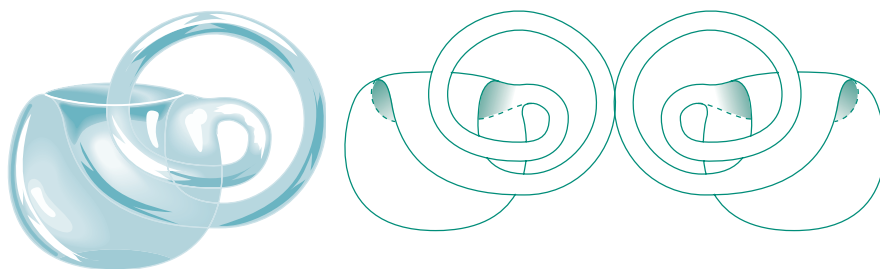
3. Trois bouteilles de Klein emboîtées.



4. Cette bouteille de Klein à col spiralé se coupe en deux rubans tordus de sept demi-tours avant recollement.



5. Autre bouteille de Klein spiralée.



6. Le vase d'Ouslam, dont le col s'enroule deux fois, se sépare en deux rubans de Möbius à trois demi-tours quand on le coupe verticalement.

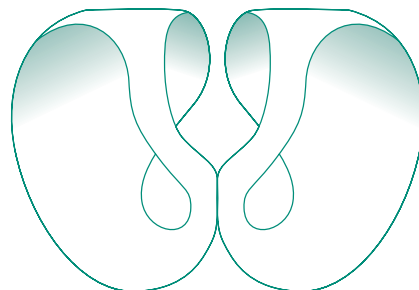
qui semble être l'intérieur se relie continûment à l'extérieur : la bouteille de Klein n'a qu'une face et pas de bord.

A. Bennett avait entendu dire que si l'on coupe une bouteille de Klein le long d'une courbe appropriée, elle se sépare en deux rubans de Möbius. Plus précisément, une telle opération, pour une bouteille immergée dans l'espace ordinaire telle celle d'A. Bennett, conduit à deux rubans tordus d'un demi-tour. A. Bennett se demandait quelle forme il faudrait couper pour obtenir deux rubans tordus de trois demi-tours. Son programme de recherche ? C'est un acte de foi : «Je crois que si l'on réalise assez de variations du concept de base, la solution la plus logique ou la plus évidente saute finalement aux yeux.»

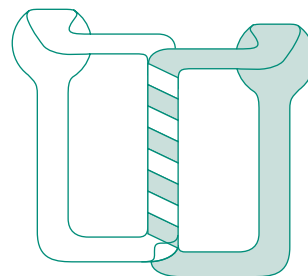
Soufflant ainsi le verre à la recherche d'une surface qui formerait des bandes à trois demi-tours, A. Bennett testa des objets où une trinité apparaissait : des bouteilles à trois cols, des bouteilles trois fois emboîtées, des bouteilles à cols recourbés trois fois... Il apprit à prévoir ce que donneraient les coupures, vérifiant ses prévisions en sciant effectivement les merveilleuses bouteilles qu'il soufflait.

La solution apparut alors qu'il avait soufflé une bouteille dont le col formait deux boucles, avec trois auto-intersections. Il la nomma «vase d'Ouslam», d'après l'oiseau mythique qui vole en cercles décroissants jusqu'à disparaître à l'intérieur de lui-même. Quand on coupe ce vase d'Ouslam verticalement, selon son plan de symétrie (le plan du papier, pour la figure 6), on obtient deux rubans à trois demi-tours : le problème est résolu.

Comme un mathématicien l'aurait fait, A. Bennett poursuivit l'étude : comment obtenir deux rubans à cinq demi-tours ? À sept demi-tours ? À neuf demi-tours ? Le problème général a-t-il une solution ? Ajoutant une boucle supplémentaire au vase d'Ouslam, A. Bennett obtint, après découpe, les rubans à cinq demi-tours, et, chaque fois qu'il ajoutait une boucle, il obtenait deux demi-tours de plus dans les rubans formés ensuite. Puis il simplifia la forme, afin de la rendre plus solide, et il obtint des bouteilles de Klein spiralées. Celle qui est représentée sur la



7. On obtient deux rubans de Möbius quand on coupe une bouteille de Klein comme indiqué ici.



Dessins de Laurie Grace

8. Une bouteille de Klein coupée selon une spirale.

figure 4 donne deux rubans à sept demi-tours, après découpe, et chaque tour de spirale ajouté conduit à deux demi-tours de plus sur les rubans formés.

Ayant ainsi compris l'importance des tours de spirale, A. Bennett comprit qu'il pouvait revenir à la bouteille de Klein initiale, en déroulant la spirale. La ligne de coupure se déforme simultanément et s'enroule alors en spirale. Ainsi, si l'on coupe une bouteille de Klein ordinaire selon une spirale, on obtient autant de demi-tours que l'on veut (*neuf dans le cas représenté sur la figure 8*).

Enfin, une curiosité : on sait maintenant couper une bouteille de Klein afin d'obtenir deux rubans à un demi-tour, mais on peut aussi couper une bouteille de Klein afin d'obtenir un seul ruban de Möbius. Je vous laisse chercher comment, et je vous donnerai la solution dans un prochain numéro de *Pour la Science*.

Thomas BANCHOFF, *La quatrième dimension*, éditions Pour la Science, collection L'univers des sciences.



Rotations culinaires

SHAWN CARLSON

Comment construire une centrifugeuse à partir d'un robot culinaire.

Les biochimistes ont l'art d'utiliser des méthodes expérimentales simples pour explorer des mystères insondables : ne se préoccupent-ils pas du fonctionnement de la vie ? Si la dernière décennie a vu l'éclosion de méthodes perfectionnées et coûteuses, des découvertes restent à la portée des amateurs éclairés. Pourquoi ces derniers se sont-ils généralement peu intéressés à la biochimie ? Probablement parce que peu d'entre eux disposent de cet outil indispensable qu'est la centrifugeuse.

Dans de tels appareils, la rotation rapide de petits tubes contenant des suspensions sépare les divers constituants. Comme des passagers dans une automobile qui prend un virage serré, les particules en suspension dans les tubes sont soumises à une force centrifuge qui les fait précipiter. Les biochimistes utilisent cet effet pour accélérer une précipitation. Pour purifier des protéines, par exemple, ils ajoutent souvent un acide ou une base faibles (du vinaigre cristallin ou du bicarbonate, par exemple) afin de provoquer une précipitation ; puis la forte pesanteur apparente exercée par la rotation provoque la sédimentation des particules coagulées.

Aucune autre méthode ne permet d'isoler si rapidement de grandes quantités de composés. Si vous voulez extraire des bactéries de leur milieu de culture, purifier des protéines ou isoler des anticorps, vous devrez utiliser une centrifugeuse. Hélas, les appareils professionnels coûtent des milliers de francs.

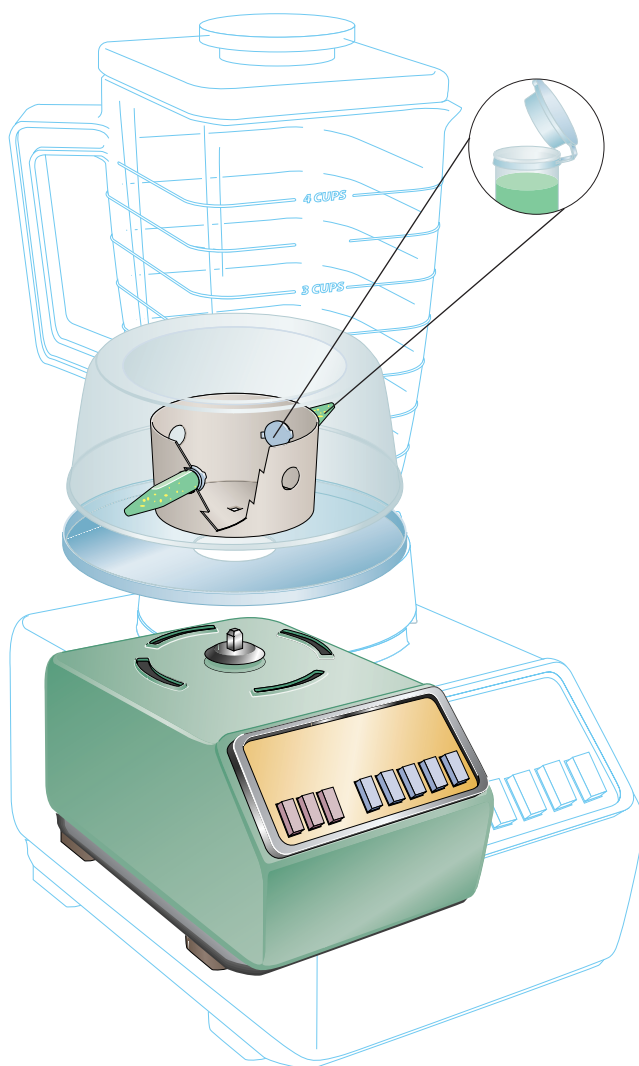
Charles Carter, un ingénieur de l'Ontario, a mis au point une centrifugeuse à la fois peu coûteuse et d'une construction très

simple. Une après-midi de travail et une centaine de francs, un vieux robot de cuisine et quelques objets en plastique suffisent pour reproduire son système, qui est une microcentrifugeuse plutôt qu'une centrifugeuse, car elle met en rotation de petits tubes à centrifuger. Le système est composé de trois parties : une base comportant un moteur, un cylindre

rotatif interne, auquel on fixe les tubes à centrifuger, et une enceinte de protection externe. Avant de construire le système, procurez-vous de petits tubes à centrifuger chez un fournisseur de matériel de laboratoire (quelques adresses sont indiquées en fin d'article).

La plupart des mixers ont un disque de plastique posé directement sur le sommet de la base. Éliminez cette pièce à la scie et lissez les bords découpés au papier de verre. Puis réalisez l'enceinte de protection en utilisant le fond d'un de ces récipients en plastique où l'on conserve les aliments : prenez un modèle de plus de 20 centimètres de diamètre et de 10 centimètres de profondeur. Coupez un gros trou au centre du couvercle et collez-le face en bas sur la base du bloc moteur, à l'aide d'une colle très forte, en prenant garde de ne pas recouvrir les aérations qui servent au refroidissement du moteur. Réalisez le rotor à partir d'un fond de tube en polychlorure de vinyle (PVC) : la pièce doit être un cylindre de dix centimètres de long, fermé à une extrémité, et avoir une épaisseur de 0,3 centimètre au moins. Dans la partie cylindrique, percez quatre trous régulièrement répartis, à mi-hauteur, en utilisant des mèches de perceuse de diamètres croissants : c'est dans ces trous que vous placerez les tubes à centrifuger.

L'axe du moteur devra être fixé exactement au centre de masse de cette pièce en PVC. Or le centre de masse n'est pas toujours le centre géométrique. Pour déterminer la position où vous devrez percez le fond du cylindre de PVC, suspendez la pièce par une petite ficelle de sorte que le fond plan soit per-



Un vieux robot culinaire peut être transformé en centrifugeuse de laboratoire.