

## Des pinces optiques pour une bactérie

**A**ux diverses applications des pinces et des ciseaux optiques mentionnées dans l'article de Michael Berns, s'ajoutent, par exemple, les études menées à l'Institut Curie. Grâce aux pinces optiques dont sont équipés deux microscopes, les biologistes ne se contentent plus d'observer les organites nichés au cœur des cellules, mais ils peuvent aussi les manipuler.

Nombre de cellules migrent. Mouvements bénéfiques dans le cas des cellules embryonnaires qui gagnent les territoires où elles se différencient, des globules blancs qui affluent vers les sites infectés, des cellules de la peau qui reforment le tissu après une blessure ; mouvements catastrophiques lorsqu'il s'agit de cellules cancéreuses qui colonisent les tissus sains. Pour mieux comprendre ces mouvements, nous étudions une bactérie, *Listeria monocytogenes*, dont les mouvements présentent des analogies avec les déplacements des cellules de mammifères.

*Listeria* a la forme d'un cylindre de un micromètre de longueur. Maçon microscopique, elle assemble, dans son prolongement, des filaments d'actine qui forment une queue parfois cent fois plus longue qu'elle ; posée au som-

met de la queue d'actine, la bactérie avance à la vitesse de construction du tube, près d'un millimètre par heure.

Comment les filaments sont-ils assemblés à l'arrière de la bactérie ? D'où vient la force motrice ? Comment la bactérie s'accroche-t-elle à l'échafaudage ? On l'ignore encore, car on ne peut suivre la construction à l'échelle des molécules d'actine. Toutefois, en étudiant les déformations de la queue d'actine, on en déduit un scénario des interactions moléculaires en jeu. Ainsi, en pinçant la queue d'actine à l'aide de pinces optiques, et en tirant sur la bactérie, nous avons évalué la force d'adhérence du micro-organisme à son échafaudage.

On peut également démultiplier une pince optique à l'aide de miroirs que l'on fait osciller rapidement entre deux ou trois positions ; on obtient alors plusieurs pinces qui saisissent la queue d'actine en différents points, et l'on en a ainsi évalué l'élasticité. Par différentes expériences de ce type, nous mesurons les pressions qu'exerce l'échafaudage sur la bactérie. Nous précisons la façon dont elle se déplace, en espérant élucider quelques mécanismes généraux de la locomotion cellulaire.

Fabien GERBAL et Albrecht OTT, Institut Curie

de la division cellulaire (la mitose). Puis, avec des pinces laser, nous avons déplacé les fragments à l'intérieur de la cellule afin d'étudier les forces exercées par le fuseau mitotique, cette machinerie cellulaire qui sépare les chromosomes dupliqués vers les deux parties opposées de la cellule en cours de division.

Les expériences ont donné des résultats surprenants : nous avons aisément déplacé les fragments qui étaient à l'extérieur du fuseau, mais nous n'avons pas réussi à introduire dans le fuseau des éléments prélevés dans le cytoplasme. Ces expériences ont confirmé que le fuseau forme une sorte de cage, empêchant que des éléments étrangers, tels des fragments de chromosomes nouvellement introduits dans le cytoplasme, ne pénètrent dans le fuseau. Comme la mitose détermine la répartition du patrimoine génétique dans les cellules filles, on comprend que l'évolution ait sélectionné un mécanisme qui interdit l'accès au fuseau mitotique d'éléments indésirables. Cet élément étant un acteur essentiel de la division cellulaire, si l'on parvient à élucider son fonctionnement, on comprendra mieux certaines maladies liées à la division cellulaire, tels le cancer et les anomalies de l'embryogenèse.

Aujourd'hui, nous disposons d'un ensemble qui comporte deux fais-

ceaux laser servant de pinces, un faisceau laser servant de ciseaux et un microscope confocal à fluorescence laser. Les lasers sont accordables, c'est-à-dire que l'on peut choisir la longueur d'onde de leur faisceau. Cette station de travail est un outil précieux pour les biologistes cellulaires ; on peut y observer des cellules ou des organites fluorescents à l'aide du microscope confocal, pendant ou après la mise en action des pinces et des ciseaux. Ce système confocal de piégeage et d'ablation se manœuvre simplement, à l'aide d'un petit levier de commande.

Des collègues ont utilisé cette station pour découper le centromère des chromosomes, le point d'ancrage des microtubules du fuseau mitotique. Les gènes de cette région sont-ils actifs ?

On l'ignore, car le centromère est très difficile à isoler et à analyser. Les pinces et les ciseaux optiques aideront sans doute les biologistes à répondre à la question.

Voilà plus de 80 ans qu'Albert Einstein a établi les fondements de la théorie des lasers. Puis, au début des années 1960, des physiciens américains et russes ont mis au point les systèmes capables d'émettre les faisceaux laser prédits théoriquement. Aujourd'hui, grâce à des outils incorporant des lasers, les biologistes sont devenus des chirurgiens de la cellule, manipulant cellules et organites. Ces méthodes ont des applications en médecine et en biologie du développement ; elles servent à étudier la structure de la cellule et son fonctionnement, et à décrypter le génome humain.

---

Michael BERNs, professeur à l'Université d'Irvine, est le co-fondateur, avec Arnold Beckman, de l'Institut Beckman d'étude des lasers, qu'il préside.

M.W. BERNs, W.H. WRIGHT et R. WIEGAND-STEUBING, *Laser Microbeam as a Tool in Cell Biology*, in *International Review of Cytology*, vol. 129, pp. 1-44, 1991.

A. CLEMENT-SENGEWALD et al., *Fertilization of Bovine Oocytes Induced Solely with Combined Laser Microbeam and Optical Tweezers*, in *Journal of Assisted Repro-*

*duction and Genetics*, vol. 13, n° 3, pp. 260-265, mars 1996.

A. KHODJAKOV, R.W. COLE et C.L. RIEDER, *A Synergy of Technologies : Combining Laser Microsurgery with Green Fluorescent Protein Tagging*, in *Cell Motility and the Cytoskeleton*, vol. 38, n° 4, pp. 311-317, 1997.

*Laser Tweezers in Cell Biology*, sous la direction de Michael P. Sheetz, *Methods in Cell Biology* series, vol. 55, Academic Press, 1998.

G. Albrecht-Buehler



# Les conquêtes des polyminos

JEAN-PAUL DELAHAYE

*Dans certains domaines mathématiques comme les polyminos, amateurs et informaticiens éclairés font avancer les connaissances.*

Le domino est composé de deux carrés accolés par un côté. Les polyminos (parfois appelés polyominos) qui en réunissent 3 sont dénommés triminos ; 4, quadriminos ; 5, pentamino ; 6, hexamino ; 7, heptamino.

Depuis que Solomon Golomb les a présentés au monde scientifique, en 1953, lors d'une conférence au Club mathématique d'Harvard, et que Martin Gardner en 1957, dans un de ses premiers articles de récréation mathématique de *Scientific American*, en a fait la publicité, une «culture du polymino» s'est développée, donnant lieu à des centaines d'articles, à une multitude de jeux et de casse-tête, et un grand nombre de sites Internet leur sont consacrés. Des artistes comme Guenter Albrecht-Buehler les uti-

lisent dans leurs œuvres. Ce peintre expose ses tableaux, comme celui représenté en haut de la page, à l'adresse : <http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler/>

Dans l'introduction de son livre entièrement dédié aux résultats des recherches sur les polyminos et dont une édition augmentée a été publiée il y a peu, S. Golomb explique : «Après la conférence de 1953, je me suis trouvé irrévocablement lié à tout ce qui pouvait leur arriver. Un flot continu et soutenu de correspondants du monde entier et de toutes les strates de la société – présidents d'Université, pensionnaires d'obscurs monastères ou de célèbres pénitenciers, etc. – m'ont demandé des informations, proposé de nouveaux problèmes ou fourni des nouvelles solutions.»

Même s'il existe des traces de ces remarquables figures géométriques dans un livre, publié en 1907, d'Henry Ernest Dudeney, le célèbre créateur de jeux mathématiques anglais, même si, quelques siècles plus tôt, un maître du jeu de go remarqua qu'on pouvait créer 12 formes différentes composées de 5 carrés accolés par un côté au moins (pentamino), ce n'est que depuis la fameuse conférence qu'on les a considérés avec quelque sérieux.

Dans une version initiale du film *2001, l'Odyssée de l'espace*, de Stanley Kubrick, une scène mettait en lice un acteur qui jouait aux pentamino avec l'ordinateur (cette scène fut remplacée au dernier moment par une partie d'échecs).

Le succès des polyminos est sans doute dû à ce qu'on les étudie sans formules. La démonstration d'une de leurs propriétés consiste le plus souvent en l'évidence d'un dessin (ça existe, je le vois !). Lorsqu'on prouve qu'une certaine configuration est impossible, il s'agit d'un exercice d'astuce et de pure logique qu'on pourra suivre sans aucune préparation mathématique, et que l'on comprendra en s'aidant de pièces en bois ou en carton plutôt qu'avec un crayon et une feuille de papier. Les mathématiques sont ici essentiellement un jeu.

Certaines propriétés obtenues par énumération ne peuvent pas être démontrées par un raisonnement direct, et alors c'est un programme (l'écrire est encore un jeu) qui établit le résultat. Tel est le cas d'un théorème énonçant qu'il y a 1 010 façons de remplir (on dit aussi paver) un rectangle de  $12 \times 5$  avec les 12 pentamino, qu'il existe 2 339 façons pour le rectangle  $6 \times 10$ , 368 pour le rectangle  $4 \times 15$ , et 2 seulement pour le rectangle  $3 \times 20$ .

Le livre de George Martin (voir la bibliographie à la fin de l'article) sur les polyminos paru en 1996 est composé uniquement de tels petits problèmes, qui pourront occuper les amateurs pendant

## 1. DÉNOMBREMENTS

Aucune méthode générale ne permet de déterminer le nombre de polyminos composés de  $n$  carrés. Dans ces dénombrements, on considère bien sûr comme identiques deux polyminos obtenus par retournement ou rotation. Les nombres de polyminos connus aujourd'hui ont été calculés par dénombrements exhaustifs à l'aide de programmes :

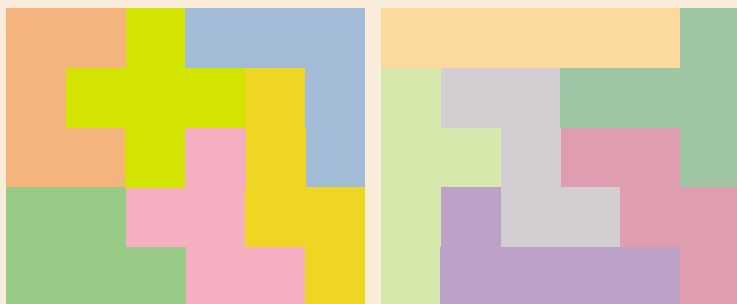
| $n$ | Nombre $P(n)$<br>de polyminos<br>à $n$ carrés | $n$ | Nombre $P(n)$<br>de polyminos<br>à $n$ carrés |
|-----|-----------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------|
| 1   | 1                                             | 13  | 238591                                        |
| 2   | 1                                             | 14  | 901971                                        |
| 3   | 2                                             | 15  | 3426576                                       |
| 4   | 5                                             | 16  | 13079255                                      |
| 5   | 12                                            | 17  | 50107909                                      |
| 6   | 35                                            | 18  | 192622052                                     |
| 7   | 108                                           | 19  | 742624232                                     |
| 8   | 369                                           | 20  | 2870671950                                    |
| 9   | 1285                                          | 21  | 11123060678                                   |
| 10  | 4655                                          | 22  | 43191857688                                   |
| 11  | 17073                                         | 23  | 168047007728                                  |
| 12  | 63600                                         | 24  | 654999700403                                  |

David Klarner a démontré qu'il existe une constante telle que  $P(n) \sim n^k$  à l'infini. Cette constante de Klarner est très mal connue aujourd'hui, on sait seulement qu'elle est comprise entre 3,72 (D. Klarner, W. Satterfield) et 4,65 (D. Klarner, R. Rivest) :

$$n^{3,72} < P(n) < n^{4,65}$$

## 2. LES TROIS TYPES DE RAISONNEMENTS SUR LES POLYMINOS

(a)



Raisonnement par "exhibition d'une figure" : on montre une figure qui vous persuade en quelques secondes du résultat annoncé. Les figures solutions sont en général difficiles à trouver.

Exemples d'énoncés prouvables par exhibition :

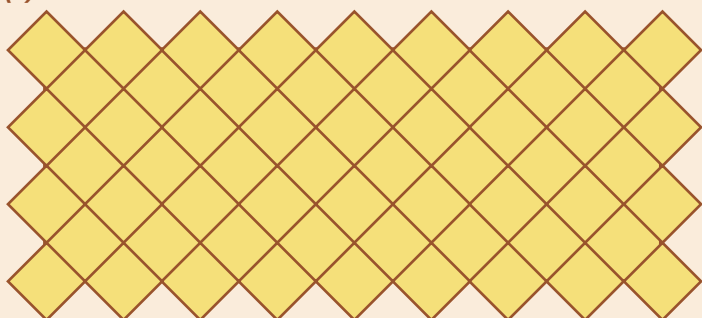
"Il existe un assemblage des 12 pentaminos en deux rectangles de taille  $6 \times 5$ " (a).

"Il existe une forme géométrique de 20 carrés de surface telle qu'en utilisant chaque pentamino une fois, et une fois seulement, on obtient trois exemplaires de cette forme" (b).

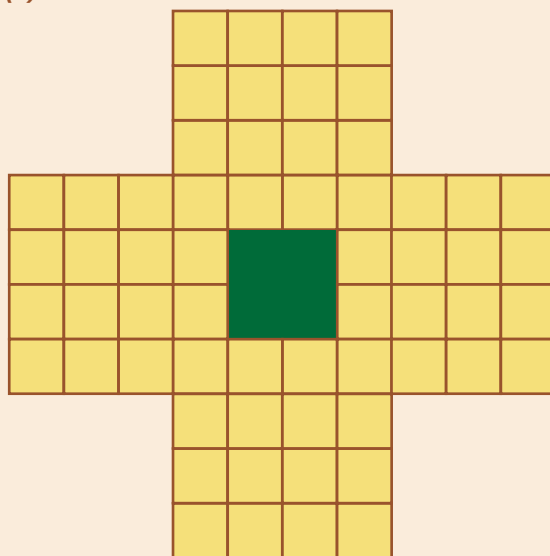
(b)



(c)



(d)



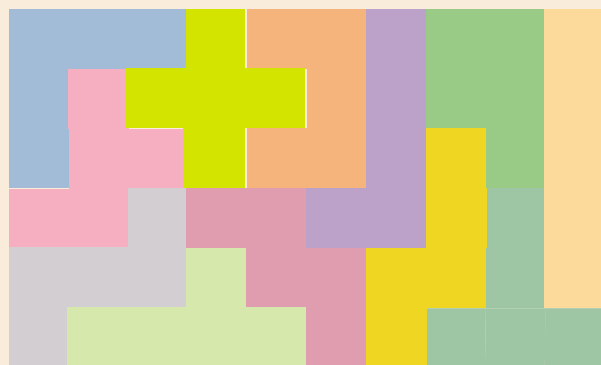
Raisonnement par astuce et logique : une démonstration difficile à trouver, mais facile à vérifier, établit le résultat.

Exemples de résultats prouvables par astuce et logique :

"Le rectangle en zigzag ne peut être recouvert par les 12 pentaminos" (c).

"Les 12 pentaminos ne peuvent remplir la croix de Herbert Taylor (croix de  $3 \times 4$  pour les bouts avec un centre de  $4 \times 4$ , moins  $2 \times 2$  pour la partie centrale)" (d).

(e)

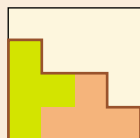


(f)

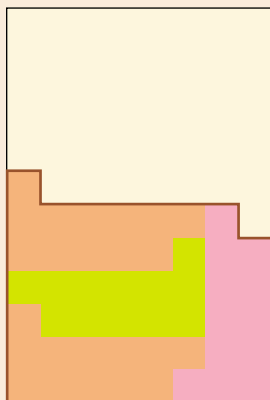


Raisonnement assisté par ordinateur : "Il existe seulement deux assemblages (e) et (f) des 12 pentaminos en un rectangle  $5 \times 12$  qui possèdent la propriété que chaque pièce touche le bord."

## 3. LES POLYMINOS D'ORDRE RECTANGULAIRE

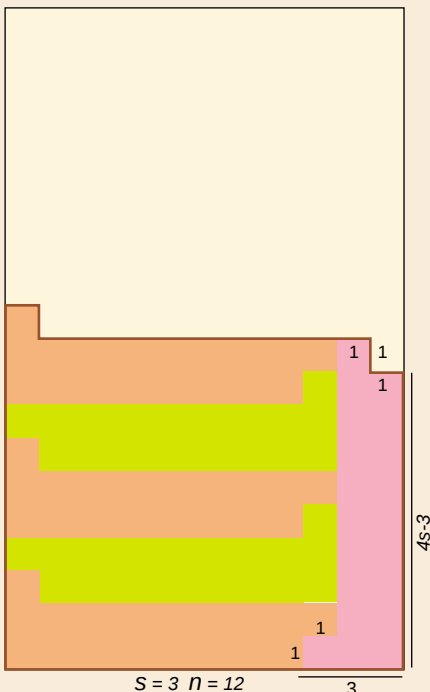


$S = 1 \quad n = 4$

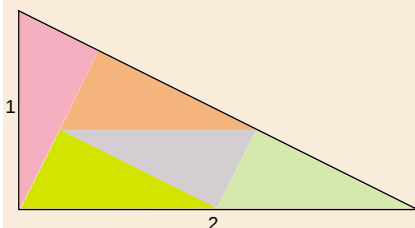


$S = 2 \quad n = 8$

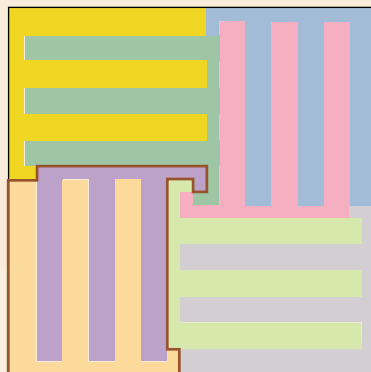
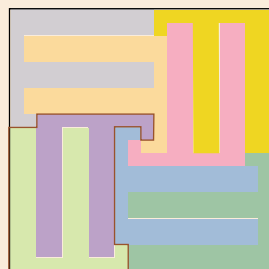
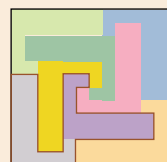
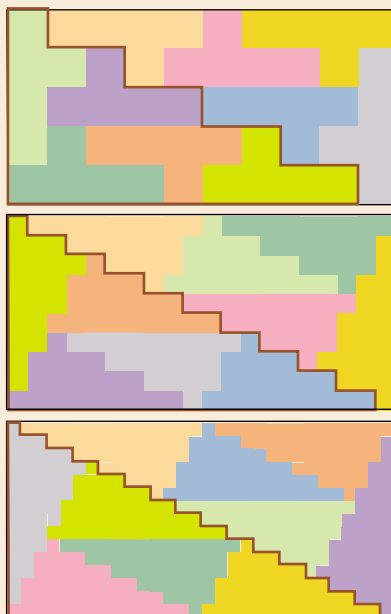
Un nombre  $n$  est rectangulaire s'il existe un polymino dont  $n$  exemplaires pavent un rectangle (sans trou ni chevauchement, bien sûr), et dont moins de  $n$  exemplaires ne pavent aucun rectangle. Solomon Golomb a montré par la méthode illustrée ici qu'un nombre  $n$  multiple de 4 ( $n = 4s$ ) est rectangulaire.



$S = 3 \quad n = 12$



Une méthode découverte en 1997 par William Marshall montre que les nombres de la forme  $2(a^2 + b^2)$  sont rectangulaires quand  $a$  et  $b$  n'ont pas de facteurs communs. À partir du découpage d'un triangle rectangle en 5 sous-rectangles, cette méthode permet de construire des polyminos d'ordre rectangulaire 10. Ici  $a = 1$  et  $b = 2$ .



Polyminos de Michael Reid, recouvrant des rectangles et n'appartenant pas aux classes de Golomb et Marshall.

des mois et servir de base à l'organisation de cours de mathématiques amusantes susceptibles de faire aimer cette discipline, moins austère qu'on ne le pense.

## LES POLYMINOS RECTANGULABLES

La question du pavage des rectangles avec un même polymino (et non plus avec un exemplaire de chaque type comme dans les problèmes de pentaminos cités précédemment) est un problème remarquablement difficile qu'on étudie depuis plus de 30 ans, obtenant lentement des résultats sous la forme de belles figures inattendues et de constructions astucieuses.

Les polyminos dont on peut regrouper des copies pour faire un rectangle sont appelés rectangulaires.

Le pentamino L (quatre carrés alignés, avec un cinquième collé à angle droit au bout de la ligne) est bien sûr rectangulaire, car deux copies du L peuvent s'imbriquer l'une dans l'autre et former un rectangle de taille  $2 \times 5$ .

Le plus petit nombre,  $n$ , de copies d'un polymino qui permet de composer un rectangle est appelé son ordre-rectangulaire. Si  $n$  est l'ordre-rectangulaire d'un polymino, le nombre  $n$  est rectangulaire. Ainsi le pentamino L est rectangulaire et a un ordre-rectangulaire 2. Le nombre 2 est donc un nombre rectangulaire.

## LES NOMBRES RECTANGULABLES

Les nombres 1 et 2 sont rectangulaires. Le nombre 3 n'est pas rectangulaire : un rectangle ne se décomposera jamais en trois polyminos identiques, à moins que ce ne soient des rectangles (dont l'ordre-rectangulaire est 1). Ce résultat n'est pas du tout évident, il n'a été démontré qu'en 1992 par I. Stewart et A. Wormstein. Il a été généralisé en 1994 par S. Maltby : un rectangle ne peut être décomposé en trois figures identiques, polyminos ou non, que si ce sont des rectangles.

Des figures élémentaires montrent que 4 est un nombre rectangulaire : certains polyminos (voir la figure 3) pris en 4 exemplaires composent un rectangle, alors qu'en en prenant moins que 4 on ne peut pas faire de rectangle. On ignore si 5, 6 et 7 sont des nombres rectangulaires.

Deux constructions générales donnent des familles infinies des nombres rectangulaires. La première, proposée par S. Golomb en 1987, établit que tous les multiples de 4 sont rectangulaires. La seconde, découverte il y a quelques mois par le mathématicien amateur néo-zélandais W. R. Marshall, est merveilleuse de simplicité et de puissance.

Elle indique que tous les nombres de la forme  $2(a^2 + b^2)$ , lorsque  $a$  et  $b$  n'ont pas de facteurs communs, sont rectangulaires. La construction, fondée sur le découpage d'un triangle rectangle en triangles rectangles identiques, est la preuve que l'astuce d'un amateur peut, dans ce domaine, faire progresser la connaissance d'une question difficile plus efficacement que le plus puissant des ordinateurs et que les théories mathématiques les plus savantes.

Quelques constructions ne provenant pas de ces deux séries (et appelées sporadiques) ont aussi été découvertes : 138 et 690, sont des nombres rectangulaires (pour 690 le résultat doit être confirmé, car la vérification complète que le polymino qui donne 690 ne peut pas remplir un rectangle de plus petite taille n'a pas été menée entièrement).

Notre connaissance aujourd'hui des nombres rectangulaires inférieurs à 100 se résume assez simplement. On sait que 2 est rectangulaire. On sait que 3 ne l'est pas. On sait que les multiples de 4 le sont. Et l'on sait, de plus, grâce au résultat de W. Marshall, que  $10 = 2(1^2 + 2^2)$ ,  $26 = 2(2^2 + 3^2)$ ,  $34 = 2(1^2 + 4^2)$ ,  $50 = 2(3^2 + 4^2)$ ,  $58 = 2(2^2 + 5^2)$ ,  $74 = 2(1^2 + 6^2)$ ,  $90 = 2(3^2 + 6^2)$  sont des nombres rectangulaires. Pour tous les autres nombres inférieurs à 100, on est dans l'ignorance.

Certains polyminos assez simples ont un ordre-rectangulaire élevé, ce qui est remarquable et jamais facile à établir, car il faut pour cela (i) montrer la figure complexe d'un rectangle découpé en petits morceaux identiques selon un schéma peu évident et, (ii) prouver qu'on ne peut pas paver un rectangle plus petit avec ce même polymino, preuve qui nécessite le plus souvent l'aide de l'informatique.

Parmi toutes les questions ouvertes concernant la rectangularité des nombres, notons les très simples suivantes :

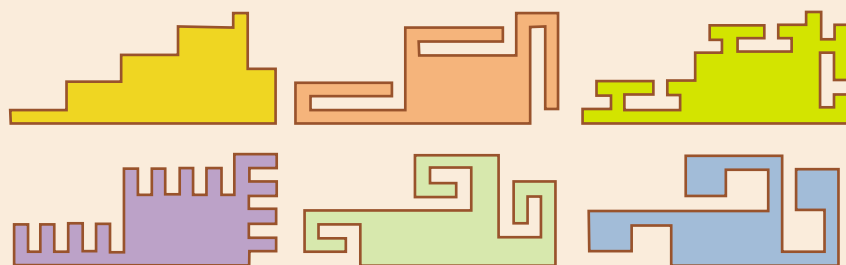
- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire 6? dit autrement, 6 est-il rectangulaire? (et plus généralement existe-t-il un nombre rectangulaire de la forme  $8k + 6$ ?)

- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire impair?

La question concernant les nombres impairs est particulièrement lancinante, puisqu'il se pourrait qu'aucun nombre impair ne soit rectangulaire. Si c'était le cas, on aurait le beau théorème (qui pour l'instant n'est qu'une conjecture) : si avec un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino on peut composer un rectangle, alors il existe un nombre pair d'exemplaires du même polymino qui remplit un rectangle plus petit.

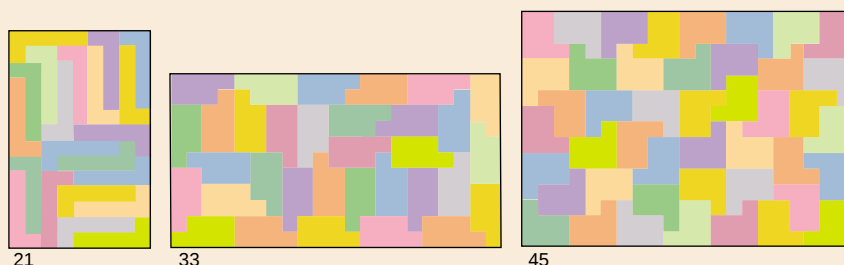
Michael Reid, spécialiste de ces questions et découvreur de belles figures de

#### 4. POLYMINOS D'ORDRE RECTANGULAIRE 10



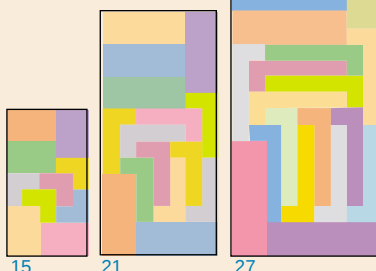
Quelques polyminos d'ordre rectangulaire 10.

#### 5. PAVAGES D'UN RECTANGLE PAR UN NOMBRE IMPAIR DE POLYMINOS



153

FAMILLE  $3(2n + 1)$



15

21

27

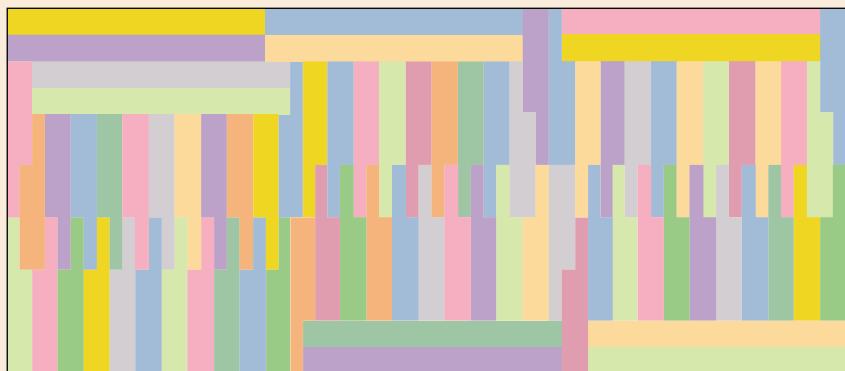
Un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino peut composer un rectangle. Ces découpages impairs ne sont jamais évidents. Voici quelques-uns de ces découpages, découverts par Michael Reid et W. Marshall.

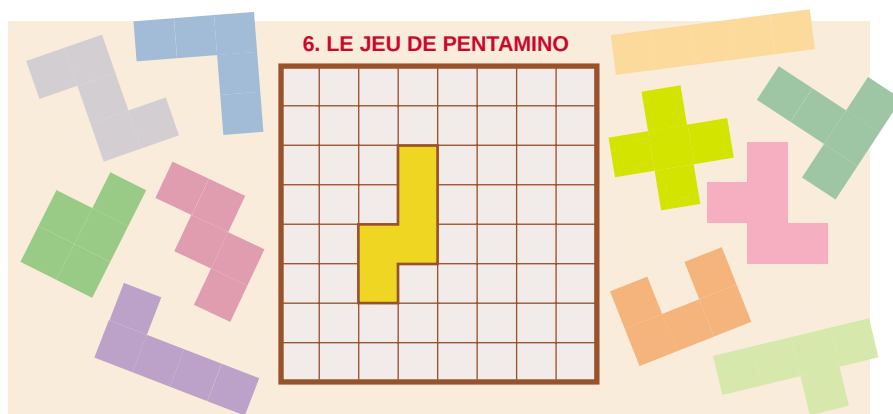
FAMILLE  $7(6n + 1)$

49



91





6. LE JEU DE PENTAMINO

Au jeu du pentamino, le joueur qui commence gagne.

Règle du jeu.

- Deux joueurs s'affrontent sur un échiquier  $8 \times 8$  en utilisant les douze pentaminos comme pièces.
- Les joueurs jouent chacun à leur tour, plaçant sur l'échiquier l'un des pentaminos non encore placés, de façon à recouvrir des cases vides.
- Lorsque plus aucune pièce ne peut être déposée, celui des joueurs à qui c'est le tour de jouer a perdu.

H. Orman, après un calcul de plusieurs semaines sur plusieurs ordinateurs, a établi que le joueur qui commence peut gagner s'il place le pentamino en Z, comme indiqué sur la figure.

pavages, soupçonne que la conjecture est fausse. Un lecteur de *Pour La Science* saura-t-il la résoudre, en proposant un polymino dont un nombre impair de copies remplit un rectangle sans qu'un nombre pair plus petit fasse de même ?

M. Reid considère aussi que trouver de nouveaux polyminos rectangulaires est un terrible défi qu'il faut pourtant relever pour avancer dans la compréhension de ce domaine de la géométrie élémentaire. Il serait très utile de connaître tout ce qu'il en est des polyminos les plus simples : par exemple, les polyminos rectangulaires de taille inférieure à 100, et ceux qui ne le sont pas. Une telle question est aujourd'hui totalement hors de notre portée, et les programmes (écrits par M. Reid, entre autres) qui fonctionnent en permanence à la recherche de nouveaux polyminos rectangulaires ne soulèvent que très lentement le voile.

L'étude des décompositions d'un rectangle en un nombre impair de polyminos est un autre problème difficile où des résultats intéressants ont été trouvés récemment. David Klarner proposa d'appeler polymino impair un polymino dont un nombre impair de copies peut composer un rectangle (ici, on n'impose pas que le nombre impair soit le nombre minimal d'exemplaires permettant de composer un rectangle, sinon on serait ramené à la question non résolue de savoir s'il y a des nombres rectangulaires impairs). La figure 5 donne quelques-unes des belles décompositions obtenues.

## UN RÉSULTAT DE THÉORIE DES JEUX

Récemment un autre progrès remarquable a été fait concernant les polyminos. La question de l'existence d'une stratégie gagnante au jeu des pentaminos du film *2001*, posée il y a plus de 30 ans par S. Golomb, a été résolue à la suite d'une série de calculs colossaux.

Rappelons les règles du jeu : deux joueurs s'affrontent sur un échiquier  $8 \times 8$  en utilisant les 12 pentaminos comme pions, qui sont placés à côté de l'échiquier au début du jeu. Les joueurs jouent chacun à leur tour, prenant une pièce de leur choix parmi les restantes, la posant sur l'échiquier et venant occuper des cases vides de celui-ci. Cela, jusqu'à ce que plus aucune pièce ne puisse être déposée. Celui des joueurs qui se trouve dans l'impossibilité de jouer a perdu.

À l'Université d'Arizona, Hilarie Orman a programmé une étude du jeu fondée sur l'idée qu'en plaçant le pentamino en L au milieu on limitait le nombre de possibilités de jeu de l'adversaire. Le calcul a duré plusieurs mois utilisant de nombreuses machines (une machine *Intel Paragon*, 6 *Hewlett-Packard 720*, 4 *Digital Equipment Corporation RS 3000 model 600*).

L'espoir de H. Orman était que, pour chacune des 1 181 répliques possibles du second joueur, une réplique gagnante soit découverte par son programme. Malheureusement le programme découvrit que deux réponses permettaient à l'adversaire de se retrouver dans une position gagnante : en plaçant le L au centre, le joueur qui

commence perd contre un joueur averti. La question subsistait : existe-t-il d'autres façons de commencer qui assurent au premier joueur de gagner contre toute défense ? Le programme de H. Orman ne pouvait considérer tous les premiers coups possibles, car le calcul aurait duré plus de dix ans ! C'est pourquoi elle avait fait le pari (perdu) que placer le L au centre était une bonne façon de jouer pour le premier joueur. Opiniâtre, Hilarie ne se découragea pas et entreprit une seconde tentative (après une phase de perfectionnement du programme), cette fois en imaginant que le premier joueur pose le Z. La réponse obtenue, en deux semaines, est que, pour ce premier coup, aucune réplique gagnante n'existe. Le joueur qui commence peut gagner de manière certaine au jeu inventé par S. Golomb en plaçant le Z au centre. Signalons que le résultat a été vérifié par un programme de Richard Schroepel, totalement indépendant du premier.

Notons aussi qu'une fois le calcul fait, un ordinateur n'a pas besoin de refaire tout le calcul pour chaque partie : l'utilisation de certaines données stockées en cours du calcul lui permet de savoir comment jouer à coup sûr.

Des deux jeux envisagés par S. Kubrick «humain contre ordinateur», dans *2001, Odyssée de l'espace*, aucun n'a résisté à la machine jusqu'au XXI<sup>e</sup> siècle. L'homme perd au jeu d'échecs, comme le match Kasparov-Deeper Blue de mai 1997 l'a montré, et perd au jeu de pentamino (là, l'ordinateur a complètement résolu le jeu en indiquant la tactique gagnante et lui a, ce faisant, enlevé tout intérêt).

M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

I. Stewart, *Pavages et tâtonnements*, in *Pour La Science*, pp. 94-99, avril 1990.

S. W. Golomb, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems and Packing*, Princeton Science Library, Princeton, 1994-1996.

S. W. Golomb, *Tiling Rectangles with Polyominoes*, in *The Mathematical Intelligencer*, 18, 2, pp. 38-46, 1996.

W. R. Marshall, *Packing Rectangles with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 77, 2, pp. 181-192, 1997.

G. E. Martin, *Polyominoes. A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, in *The Mathematical Association of America, Spectrum Series*, 1996.

H. K. Orman, *Pentominoes : A First Player Win*, in *Game of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

M. Reid, *Tiling Rectangles and Half Strips with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 80, 1, 1997.

Steve Bronstein / Image Bank



# Abrogeons la loi des moyennes

IAN STEWART

*Subtilités mathématiques du jeu de pile ou face.*

**J**ouons à pile ou face, un grand nombre de fois, avec une pièce non truquée. Pile et face ont la même probabilité, égale à  $1/2$ , d'apparaître à chaque lancer. Comptabilisons les résultats au fur et à mesure et supposons que, à une étape, le nombre de tirages sur face soit supérieur de 100 à celui des pile : le nombre de pile a-t-il ensuite tendance à rattraper le nombre de face ? Ceux qui jouent à pile ou face sans en connaître les arcanes mathématiques évoquent parfois une «loi des

moyennes» fondée sur l'intuition que les nombres de pile et de face obtenus avec une pièce non truquée devraient devenir peu différents après un grand nombre de lancers. Pourtant les pièces n'ont pas de «mémoire» : la probabilité d'obtenir pile ou face lors d'un lancer est toujours  $1/2$ . Ne devrait-on pas penser plutôt que les totaux n'ont pas de raison de devenir égaux ?

Les mêmes questions se posent dans des contextes variés. Si un accident d'avion se produit en moyenne tous les quatre mois et si trois mois se sont passés sans accident, un accident est-il imminent ?

Dans tous les cas de ce type, la réponse est non : les processus aléatoires ou, plus exactement, les modèles mathématiques de ces processus n'ont pas de mémoire.

Le problème est subtil : qu'entend-on quand on dit que «le nombre de pile rattrapera celui des face» ? Certes, une longue suite de face ne change pas la probabilité d'obtenir ensuite des pile, mais, même après une série comportant par exemple 100 face de plus que de pile, la probabilité que les nombres totaux de pile et de face deviennent ultérieurement égaux est toujours égale à 1. La probabilité d'un événement est égale à 1 quand l'événement est certain, et elle est nulle quand l'événement est impossible. Ici nous envisageons une série potentiellement infinie de lancers : le jeu peut durer aussi longtemps que le désire le joueur. Dans ce cas, les mathématiciens préfèrent dire «presque certain» ou «presque impossible».

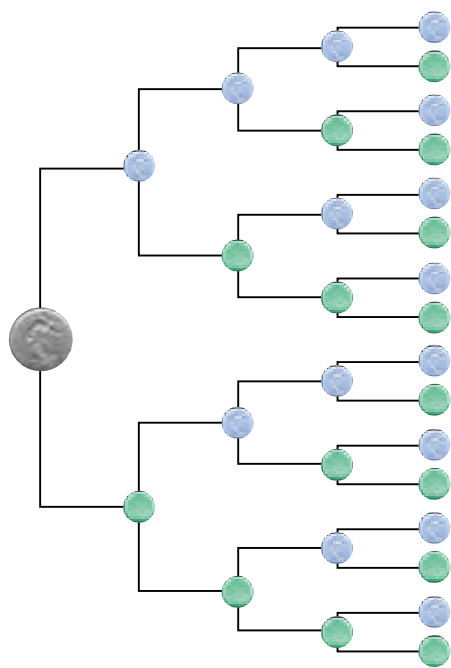
D'un autre point de vue, après une série où le nombre de face est supérieur de 100 au nombre de pile, la probabilité que, plus tard, vienne un moment où le total des face soit supérieur à celui des pile d'au moins un million est aussi égale à 1.

Pour analyser ces apparentes contradictions, examinons de plus près le jeu de pile ou face. Nous avons lancé une pièce 20 fois et avons obtenu la suite PPPFPFFFFFFFPFPFPFPF, qui comprend 11 pile (P) et 9 face (F). D'après une loi de la théorie des probabilités nommée loi des grands nombres, la fréquence d'apparition d'un événement tend vers sa probabilité quand le nombre d'expériences augmente indéfiniment. Dans la série précédente, les fréquences des événements «tirer pile» et «tirer face» sont respectivement  $11/20$ , soit 0,55 et  $9/20$ , soit 0,45. Elles sont proches de 0,5, mais pas égales à 0,5.

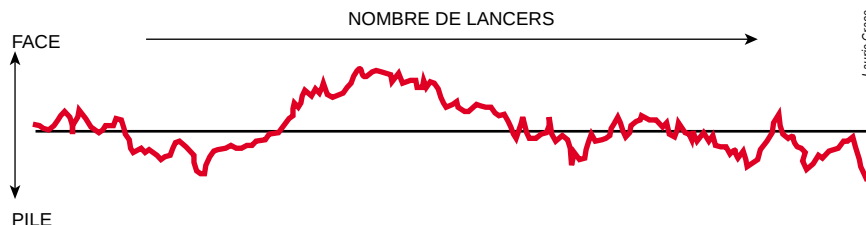
La suite précédente ne vous semble-t-elle pas assez aléatoire ? Préférez-vous FFPFPFPFPFPFPFPFPFP, où les fréquences de pile et de face sont exactement égales à 0,5 ? Cette deuxième séquence semble plus aléatoire... mais elle ne l'est pas.

La première suite ne semble pas aléatoire, car elle contient de longues chaînes du même événement, telles PPPP ou FFFFFFFF. En réalité, notre intuition est trompeuse : les séquences aléatoires contiennent souvent des motifs et des répétitions, et cela ne doit pas nous étonner (à moins que face sorte à chaque coup pendant très longtemps, auquel cas la pièce a probablement deux côtés marqués face).

Lançons une pièce quatre fois de suite. La figure 1 indique les résultats possibles. Le premier lancer donne soit F, soit P (chacun avec une probabilité  $1/2$ ). Le deuxième lancer donne encore soit F, soit P, et ainsi de suite, de sorte qu'après quatre lancers on obtient un arbre à 16 branches. D'après la théorie des probabilités, chaque chemin a une probabilité égale à  $1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$ , soit  $1/16$ . Remarquez que la probabilité de



1. Les résultats possibles d'une suite de quatre lancers à pile (en vert) ou face (en bleu).



2. Marche au hasard, où «face» correspond à un pas vers le haut et «pile» à un pas vers le bas. Les nombres de «face» et de «pile» totalisés depuis le début du jeu sont rarement égaux ; quand cela se produit, la courbe rouge croise l'axe des abscisses.

Laurie Grace