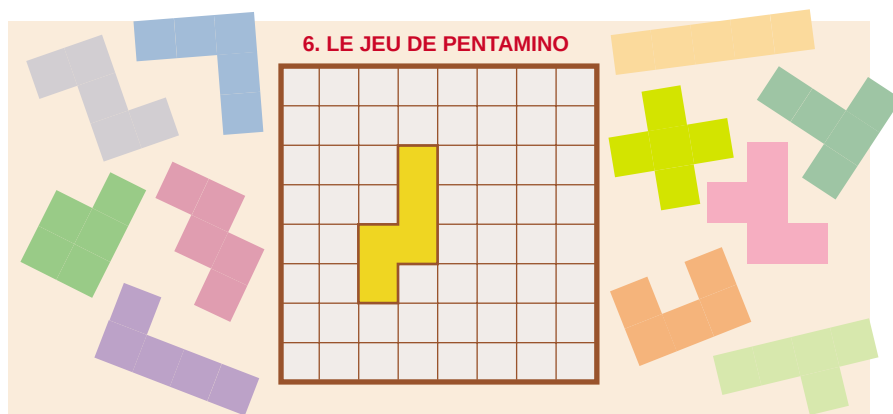




6. LE JEU DE PENTAMINO

Au jeu du pentamino, le joueur qui commence gagne.

Règle du jeu.

- Deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les douze pentaminos comme pièces.
- Les joueurs jouent chacun à leur tour, plaçant sur l'échiquier l'un des pentaminos non encore placés, de façon à recouvrir des cases vides.
- Lorsque plus aucune pièce ne peut être déposée, celui des joueurs à qui c'est le tour de jouer a perdu.

H. Orman, après un calcul de plusieurs semaines sur plusieurs ordinateurs, a établi que le joueur qui commence peut gagner s'il place le pentamino en Z, comme indiqué sur la figure.

pavages, soupçonne que la conjecture est fausse. Un lecteur de *Pour La Science* saura-t-il la résoudre, en proposant un polymino dont un nombre impair de copies remplit un rectangle sans qu'un nombre pair plus petit fasse de même ?

M. Reid considère aussi que trouver de nouveaux polyminos rectangulaires est un terrible défi qu'il faut pourtant relever pour avancer dans la compréhension de ce domaine de la géométrie élémentaire. Il serait très utile de connaître tout ce qu'il en est des polyminos les plus simples : par exemple, les polyminos rectangulaires de taille inférieure à 100, et ceux qui ne le sont pas. Une telle question est aujourd'hui totalement hors de notre portée, et les programmes (écrits par M. Reid, entre autres) qui fonctionnent en permanence à la recherche de nouveaux polyminos rectangulaires ne soulèvent que très lentement le voile.

L'étude des décompositions d'un rectangle en un nombre impair de polyminos est un autre problème difficile où des résultats intéressants ont été trouvés récemment. David Klarner proposa d'appeler polymino impair un polymino dont un nombre impair de copies peut composer un rectangle (ici, on n'impose pas que le nombre impair soit le nombre minimal d'exemplaires permettant de composer un rectangle, sinon on serait ramené à la question non résolue de savoir s'il y a des nombres rectangulaires impairs). La figure 5 donne quelques-unes des belles décompositions obtenues.

UN RÉSULTAT DE THÉORIE DES JEUX

Récemment un autre progrès remarquable a été fait concernant les polyminos. La question de l'existence d'une stratégie gagnante au jeu des pentaminos du film *2001*, posée il y a plus de 30 ans par S. Golomb, a été résolue à la suite d'une série de calculs colossaux.

Rappelons les règles du jeu : deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les 12 pentaminos comme pions, qui sont placés à côté de l'échiquier au début du jeu. Les joueurs jouent chacun à leur tour, prenant une pièce de leur choix parmi les restantes, la posant sur l'échiquier et venant occuper des cases vides de celui-ci. Cela, jusqu'à ce que plus aucune pièce ne puisse être déposée. Celui des joueurs qui se trouve dans l'impossibilité de jouer a perdu.

À l'Université d'Arizona, Hilarie Orman a programmé une étude du jeu fondée sur l'idée qu'en plaçant le pentamino en L au milieu on limitait le nombre de possibilités de jeu de l'adversaire. Le calcul a duré plusieurs mois utilisant de nombreuses machines (une machine *Intel Paragon*, 6 *Hewlett-Packard 720*, 4 *Digital Equipment Corporation RS 3000 model 600*).

L'espoir de H. Orman était que, pour chacune des 1 181 répliques possibles du second joueur, une réplique gagnante soit découverte par son programme. Malheureusement le programme découvrit que deux réponses permettaient à l'adversaire de se retrouver dans une position gagnante : en plaçant le L au centre, le joueur qui

commence perd contre un joueur averti. La question subsistait : existe-t-il d'autres façons de commencer qui assurent au premier joueur de gagner contre toute défense ? Le programme de H. Orman ne pouvait considérer tous les premiers coups possibles, car le calcul aurait duré plus de dix ans ! C'est pourquoi elle avait fait le pari (perdu) que placer le L au centre était une bonne façon de jouer pour le premier joueur. Opiniâtre, Hilarie ne se découragea pas et entreprit une seconde tentative (après une phase de perfectionnement du programme), cette fois en imaginant que le premier joueur pose le Z. La réponse obtenue, en deux semaines, est que, pour ce premier coup, aucune réplique gagnante n'existe. Le joueur qui commence peut gagner de manière certaine au jeu inventé par S. Golomb en plaçant le Z au centre. Signalons que le résultat a été vérifié par un programme de Richard Schroepel, totalement indépendant du premier.

Notons aussi qu'une fois le calcul fait, un ordinateur n'a pas besoin de refaire tout le calcul pour chaque partie : l'utilisation de certaines données stockées en cours du calcul lui permet de savoir comment jouer à coup sûr.

Des deux jeux envisagés par S. Kubrick «humain contre ordinateur», dans *2001, Odyssée de l'espace*, aucun n'a résisté à la machine jusqu'au XXI^e siècle. L'homme perd au jeu d'échecs, comme le match Kasparov-Deeper Blue de mai 1997 l'a montré, et perd au jeu de pentamino (là, l'ordinateur a complètement résolu le jeu en indiquant la tactique gagnante et lui a, ce faisant, enlevé tout intérêt).

M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

I. Stewart, *Pavages et tâtonnements*, in *Pour La Science*, pp. 94-99, avril 1990.

S. W. Golomb, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems and Packing*, Princeton Science Library, Princeton, 1994-1996.

S. W. Golomb, *Tiling Rectangles with Polyominoes*, in *The Mathematical Intelligencer*, 18, 2, pp. 38-46, 1996.

W. R. Marshall, *Packing Rectangles with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 77, 2, pp. 181-192, 1997.

G. E. Martin, *Polyominoes. A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, in *The Mathematical Association of America, Spectrum Series*, 1996.

H. K. Orman, *Pentominoes : A First Player Win*, in *Game of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

M. Reid, *Tiling Rectangles and Half Strips with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 80, 1, 1997.



Abrogeons la loi des moyennes

IAN STEWART

Subtilités mathématiques du jeu de pile ou face.

Jouons à pile ou face, un grand nombre de fois, avec une pièce non truquée. Pile et face ont la même probabilité, égale à $1/2$, d'apparaître à chaque lancer. Comptabilisons les résultats au fur et à mesure et supposons que, à une étape, le nombre de tirages sur face soit supérieur de 100 à celui des pile : le nombre de pile a-t-il ensuite tendance à rattraper le nombre de face ? Ceux qui jouent à pile ou face sans en connaître les arcanes mathématiques évoquent parfois une «loi des

moyennes» fondée sur l'intuition que les nombres de pile et de face obtenus avec une pièce non truquée devraient devenir peu différents après un grand nombre de lancers. Pourtant les pièces n'ont pas de «mémoire» : la probabilité d'obtenir pile ou face lors d'un lancer est toujours $1/2$. Ne devrait-on pas penser plutôt que les totaux n'ont pas de raison de devenir égaux ?

Les mêmes questions se posent dans des contextes variés. Si un accident d'avion se produit en moyenne tous les quatre mois et si trois mois se sont passés sans accident, un accident est-il imminent ?

Dans tous les cas de ce type, la réponse est non : les processus aléatoires ou, plus exactement, les modèles mathématiques de ces processus n'ont pas de mémoire.

Le problème est subtil : qu'entend-on quand on dit que «le nombre de pile rattrapera celui des face» ? Certes, une longue suite de face ne change pas la probabilité d'obtenir ensuite des pile, mais, même après une série comportant par exemple 100 face de plus que de pile, la probabilité que les nombres totaux de pile et de face deviennent ultérieurement égaux est toujours égale à 1. La probabilité d'un événement est égale à 1 quand l'événement est certain, et elle est nulle quand l'événement est impossible. Ici nous envisageons une série potentiellement infinie de lancers : le jeu peut durer aussi longtemps que le désire le joueur. Dans ce cas, les mathématiciens préfèrent dire «presque certain» ou «presque impossible».

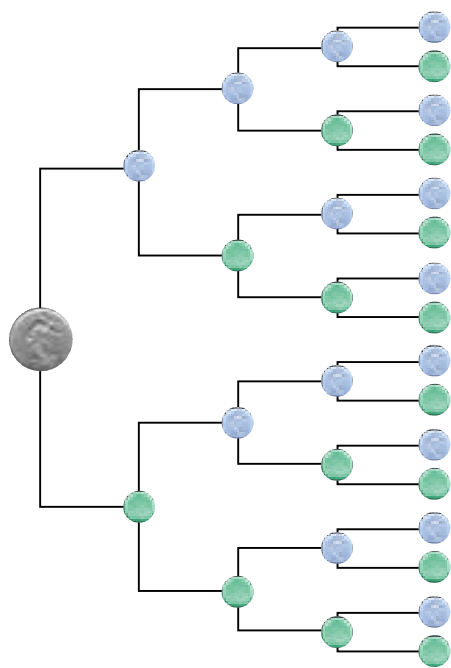
D'un autre point de vue, après une série où le nombre de face est supérieur de 100 au nombre de pile, la probabilité que, plus tard, vienne un moment où le total des face soit supérieur à celui des pile d'au moins un million est aussi égale à 1.

Pour analyser ces apparentes contradictions, examinons de plus près le jeu de pile ou face. Nous avons lancé une pièce 20 fois et avons obtenu la suite PPPFPFFFFFFFPFPPFPF, qui comprend 11 pile (P) et 9 face (F). D'après une loi de la théorie des probabilités nommée loi des grands nombres, la fréquence d'apparition d'un événement tend vers sa probabilité quand le nombre d'expériences augmente indéfiniment. Dans la série précédente, les fréquences des événements «tirer pile» et «tirer face» sont respectivement $11/20$, soit 0,55 et $9/20$, soit 0,45. Elles sont proches de 0,5, mais pas égales à 0,5.

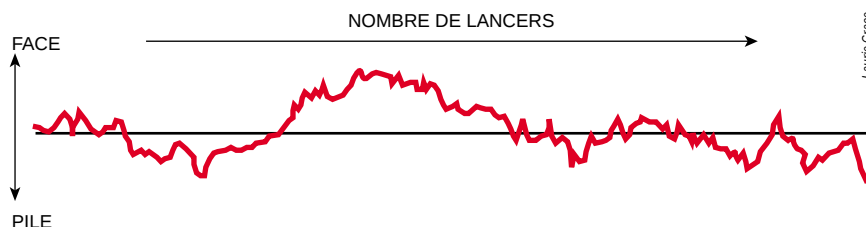
La suite précédente ne vous semble-t-elle pas assez aléatoire ? Préférez-vous FFPFPFPFPFPFPFPFPFP, où les fréquences de pile et de face sont exactement égales à 0,5 ? Cette deuxième séquence semble plus aléatoire... mais elle ne l'est pas.

La première suite ne semble pas aléatoire, car elle contient de longues chaînes du même événement, telles PPPP ou FFFFFFF. En réalité, notre intuition est trompeuse : les séquences aléatoires contiennent souvent des motifs et des répétitions, et cela ne doit pas nous étonner (à moins que face sorte à chaque coup pendant très longtemps, auquel cas la pièce a probablement deux côtés marqués face).

Lançons une pièce quatre fois de suite. La figure 1 indique les résultats possibles. Le premier lancer donne soit F, soit P (chacun avec une probabilité $1/2$). Le deuxième lancer donne encore soit F, soit P, et ainsi de suite, de sorte qu'après quatre lancers on obtient un arbre à 16 branches. D'après la théorie des probabilités, chaque chemin a une probabilité égale à $1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$, soit $1/16$. Remarquez que la probabilité de



1. Les résultats possibles d'une suite de quatre lancers à pile (en vert) ou face (en bleu).



2. Marche au hasard, où «face» correspond à un pas vers le haut et «pile» à un pas vers le bas. Les nombres de «face» et de «pile» totalisés depuis le début du jeu sont rarement égaux ; quand cela se produit, la courbe rouge croise l'axe des abscisses.

PPPP est égale à $1/16$, tout comme celle de FFFF. Ainsi, bien que FFFF paraisse plus aléatoire que PPPP, les deux séquences ont la même probabilité.

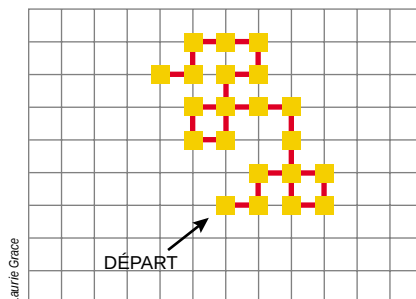
En lançant quatre fois une pièce, on obtient en moyenne deux fois face. Obtiendra-t-on le plus souvent deux pile et deux face ? Non : la figure 1 montre que, sur les 16 chemins, 6 comportent exactement deux faces : FFPP, FFPF, FPPF, PFFP, PFPP, PPFF. La probabilité de tirer exactement deux fois face est donc égale à $6/16$, soit $0,375$. Elle est inférieure à la probabilité de ne pas avoir exactement deux face, qui est égale à $0,625$. Avec des séquences plus longues, l'effet est encore accentué.

Ce genre d'études montre qu'il n'existe pas de «loi des moyennes» : les probabilités des événements futurs ne dépendent pas des résultats passés. Il existe cependant une façon intéressante de considérer le problème, selon laquelle les comptes tendent à la longue à s'équilibrer. Représentons par une courbe la différence entre le nombre de F et le nombre de P en fonction du nombre de lancers : chaque F obtenu fait monter la courbe d'un niveau et chaque P la fait descendre d'un niveau. On obtient ainsi ce que les mathématiciens nomment une marche aléatoire, ou marche au hasard.

La figure 2 représente une marche au hasard typique qui correspond à 10 000 lancers. Son allure déséquilibrée (ici vers le côté face) est tout à fait normale. Par exemple, quand on lance 10 000 fois une pièce, la probabilité qu'un côté soit en tête 9 930 fois et l'autre 70 fois est de l'ordre de $1/10$, ce qui est loin d'être négligeable.

On peut également démontrer que la probabilité de ne jamais obtenir l'égalité est nulle ; autrement dit, une des faces ne peut l'emporter indéfiniment, et la courbe croquera nécessairement l'axe des abscisses. C'est dans ce sens que la loi des moyennes est vraie, mais cela ne vous permettra pas d'améliorer vos chances de gain si vous pariez à pile ou face. En effet, ce résultat ne dit pas combien de coups seront nécessaires pour revenir à l'égalité : on sait seulement que ce temps sera vraisemblablement très long si le déséquilibre initial est notable.

Supposez qu'en 100 lancers vous obteniez 55F et 45P – un excès de 10F. La théorie des marches aléatoires indique qu'après un nombre suffisant de lancers supplémentaires le bilan se rééquilibrera (avec une probabilité égale à 1). N'est-ce pas la loi des moyennes ? Non, du moins pas telle qu'elle est interprétée habituellement. Si vous choisissez à l'avance un nombre de lancers supplémentaires (par exemple, un million), ce million de coups ne sera pas influencé par l'excès



3. Marche aléatoire bidimensionnelle.

initial. En outre, si vous faites un grand nombre d'expériences, chacune avec un million de coups supplémentaires, vous obtiendrez en moyenne 500 055F et 500 045P dans la séquence combinée de 1 000 100 lancers : en moyenne, le déséquilibre persiste. Notez toutefois que la fréquence des F passe de $55/100$ ($0,55$) à $500\,055/1\,000\,100$ ($0,500\,005$). La loi des moyennes s'affirme non en éliminant les déséquilibres mais en les noyant.

Au lieu d'une pièce, lançons maintenant un dé et comptons combien de fois chaque face apparaît. Admettons que toutes les faces ont la même probabilité à chaque lancer, égale à $1/6$. Quand nous commençons à jouer, les nombres totaux d'apparitions des différentes faces sont tous égaux à zéro. Après quelques lancers, ces nombres commencent à différer (ils ne peuvent redevenir égaux qu'après au moins six coups). Quelle est la probabilité que les six nombres redeviennent égaux au bout d'un certain temps, si long soit-il ? Je ne connais pas la valeur exacte ; c'est là une lacune que vous pourrez combler, mais nous allons voir que la réponse n'est pas 1, à la différence du jeu de pile ou face.

Réactions

Dans mon article «Bouteilles et rubans», paru dans le numéro de mai 1998, je demandais de découper une bouteille de Klein selon une ligne telle que le résultat soit un unique ruban de Möbius. Alan Bennett a écrit sa solution en verre.



Pour traiter le cas des dés, on doit étendre la marche au hasard à des dimensions supérieures. Par exemple, la marche au hasard la plus simple dans le plan s'effectue sur un quadrillage infini : un point part d'une origine et se déplace par pas successifs égaux vers le Nord, le Sud, l'Est ou l'Ouest, avec, à chaque pas, une probabilité $1/4$ pour chaque direction. La figure 3 représente un chemin typique. Une marche au hasard sur un réseau à trois dimensions est similaire, mais les six directions (Nord, Sud, Est, Ouest, haut, bas) ont chacune une probabilité égale à $1/6$.

On peut calculer que, dans une marche au hasard à deux dimensions, la probabilité de repasser par l'origine au bout d'un certain temps est égale à 1. En revanche, le mathématicien hongrois Stanislaw Ulam, qui fut l'un des inventeurs de la bombe à hydrogène, a prouvé que, dans un espace à trois dimensions, la probabilité de retour à l'origine n'est plus que de l'ordre de $0,35$. Ainsi, si vous vous perdez dans le désert, marchez au hasard : vous retrouverez votre oasis, à condition d'en avoir le temps ; en revanche, si vous vous perdez dans l'espace, vous n'avez qu'une chance sur trois de retrouver la Terre.

Associons aux six directions d'une marche au hasard tridimensionnelle les faces d'un dé : Nord = 1, Sud = 2, Est = 3, Ouest = 4, haut = 5 et bas = 6. Lançons le dé et déplaçons-nous dans la direction qu'il indique. Dans ce cas, revenir à l'origine signifie obtenir autant de 1 que de 2, de 3 que de 4 et de 5 que de 6. Or, nous avons vu que la probabilité que cela se produise est égale à $0,35$. Soulignons que les totaux doivent ici être égaux par paires, alors que, dans le problème des dés, on demande que les six totaux soient égaux : comme cette condition est plus restrictive, la probabilité cherchée est inférieure à $0,35$.

Même la marche au hasard la plus simple, à une dimension, a de nombreuses caractéristiques qui heurtent l'intuition. Choisissez un nombre de lancers de pièce à l'avance, par exemple un million, et observez quel côté est en tête à chaque étape. En moyenne, quelle proportion de ces bilans donnera l'avantage à face ? Penchez-vous pour $1/2$? En fait, cette proportion est la moins vraisemblable, et les proportions extrêmes sont les plus probables : les face sont soit toujours en tête, soit jamais !

William FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, deuxième édition, Wiley, New York, 1957.

Les freins hydrauliques

Les freins hydrauliques sont une garantie de sécurité pour les automobilistes. Jusqu'en 1930, dans la plupart des systèmes de freinage, la force appliquée par le pied du conducteur était transmise mécaniquement jusqu'aux roues. Des câbles ou des tiges pressaient alors des patins de freins contre un tambour, ce qui ralentissait les roues. Les systèmes hydrauliques, au contraire, utilisent un fluide afin d'appliquer des forces plus intenses et plus régulières. Quand on presse la pédale de frein, on actionne des pistons contenus dans un maître cylindre qui transforment la force appliquée sur la pédale en pression dans le système hydraulique : des pistons placés dans les cylindres des roues actionnent alors des

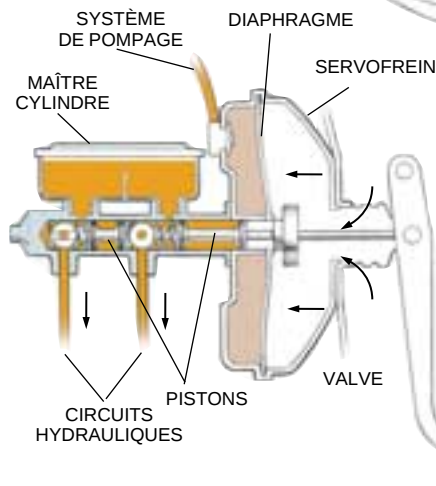
freins à tambour ou des freins à disque. Comme la section des cylindres de roue est supérieure à la section du maître cylindre, la force appliquée sur la pédale de frein est amplifiée.

Dans les années 1950, les servofreins, qui augmentent encore la pression du liquide agissant sur les cylindres de roue, ont réduit l'effort que les conducteurs doivent exercer pour freiner. En outre, dans les freins modernes, le système hydraulique est divisé en deux sous-systèmes, de sorte qu'une éventuelle fuite du liquide dans un des systèmes ne compromet pas

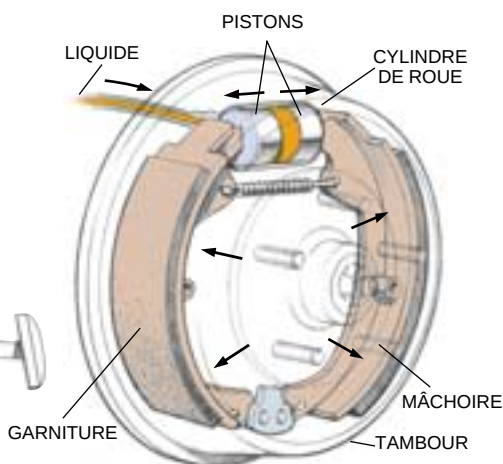
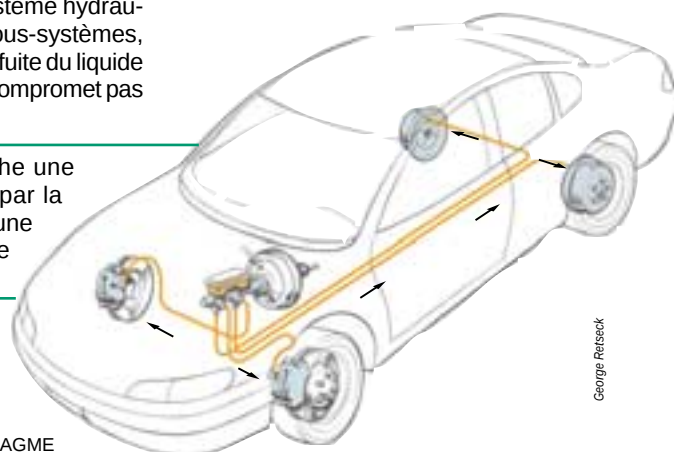
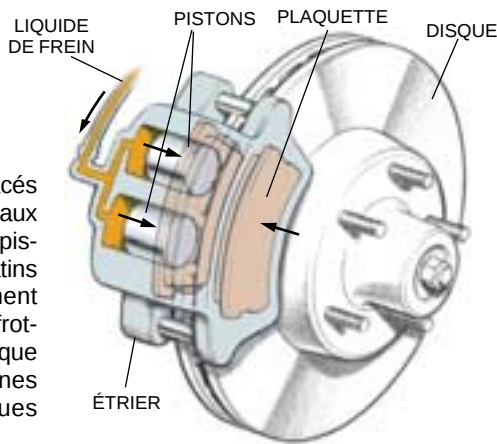
le freinage global. Le liquide est envoyé aux freins à partir de deux pistons du maître cylindre. Chaque piston ne dessert qu'un jeu de roues. Dans les systèmes les plus récents, chaque sous-système envoie le liquide vers des roues réparties en diagonale, afin de réduire les risques en cas de fuite du liquide de freins.

Presser la pédale de freins déclenche une chaîne d'événements qui commence par la transformation de la force exercée en une pression qui actionne les freins à disque ou les freins à tambour.

Les servofreins s'adaptent sur le maître cylindre et amplifient l'action du pied. Quand la pédale de frein est libre, un large diaphragme est dans le vide. Quand le conducteur freine, une valve qui s'ouvre laisse entrer de l'air d'un côté du diaphragme, où règne alors la pression atmosphérique. La différence de pression entre les deux faces du diaphragme pousse ce dernier vers l'intérieur, ce qui active les pistons du maître cylindre. Ce système augmente la puissance du système hydraulique. Le liquide de freinage poussé par ce mouvement pousse alors les pistons dans les cylindres de chaque roue ; puis les pistons actionnent les freins à tambour ou à disque.



Les disques sont généralement placés sur les roues avant, où la chaleur due aux frottements est mieux dissipée. Les pistons dans les freins poussent des patins de freins, dont les garnitures viennent presser un disque métallique. Les frottements ralentissent le disque, ainsi que la roue qui en est solidaire. Certaines automobiles ont des freins à disques sur les quatre roues.



Des freins à tambour équipent généralement les roues arrière des automobiles. Les freins à tambour sont généralement composés d'un cylindre contenant deux mâchoires mobiles. Les pistons du cylindre poussent les mâchoires contre un tambour externe. La garniture des mâchoires de freins frotte contre le tambour, ce qui ralentit la roue.

Stanley Stokes est membre de l'Association des ingénieurs de l'industrie automobile.