

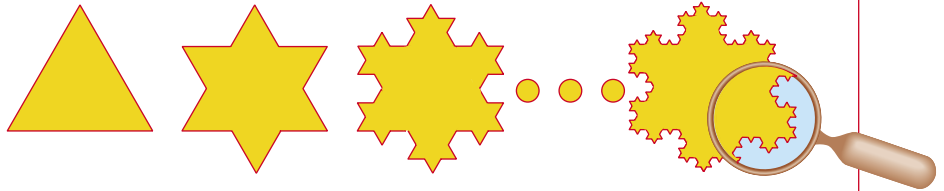
de la côte serait encore supérieure : ainsi, la longueur mesurée dépend de l'échelle. Au contraire, sur une courbe régulière formée de segments de droites ou de portions de courbes en nombre et en taille finis, la longueur mesurée tend vers une limite finie. Aussi l'augmentation de la longueur de la côte se poursuit-elle jusqu'à une certaine limite, où les objets physiques que nous observons finissent par devenir réguliers...

La courbe de von Koch a, quant à elle, une longueur infinie. En effet, à chaque étape de sa construction (voir l'encadré ci-contre), la longueur est multipliée par $4/3$ et, comme ce nombre est supérieur à 1, sa longueur tend vers l'infini. Cette courbe encadre cependant une aire finie : elle pourrait représenter une côte de Bretagne hypothétique, avec des golfes au fond desquels s'ouvriraient des baies, découpées elles-mêmes par des baies plus petites, et cela indéfiniment. Là apparaît l'analogie : l'objet mathématique obtenu par cette suite infinie d'opérations de découpage possède une parenté avec la côte de Bretagne.

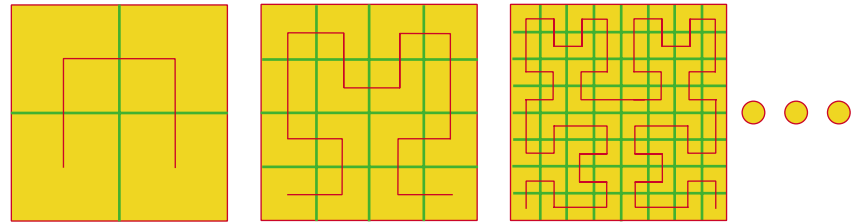
Il subsiste toutefois une nuance essentielle : la courbe de von Koch a été construite en répétant toujours la même opération, déterminée une fois pour toutes. Cette courbe est une fractale déterministe, le hasard n'intervenant nulle part dans l'opération. Or, sur la côte de Bretagne, le golfe du Morbihan n'est pas identique à la baie des Trépassés dilatée, mais la similarité est vraie statistiquement : tel golfe ressemble à telle baie agrandie, qui ressemble à telle anse, aussi agrandie... De même, les branches de chou-fleur ne sont pas exactement identiques, mais, par agrandissement, elles ressemblent au chou-fleur entier sans le reproduire exactement. La côte de Bretagne et le chou-fleur sont des fractales aléatoires.

Avant qu'ils ne soient baptisés fractals les mathématiciens avaient senti l'intérêt de ces objets et avaient étudié une de leurs caractéristiques : leur dimension. Dans la géométrie classique, une ligne est un objet à une dimension, une surface, un objet à deux dimensions, un volume, un objet à trois dimensions. Nous sommes ainsi habitués à des objets dont les dimensions sont des nombres entiers : 1, 2 ou 3. Un géomètre italien, Giuseppe Peano, avait construit, par étapes successives, une courbe de type fractal qui passait par tous les points d'un carré, c'est-à-

LES DIMENSIONS NON ENTIÈRES



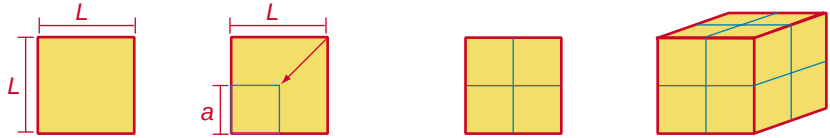
À chaque étape de la courbe de von Koch en flocon de neige, les segments du contour sont divisés en trois parties égales, et deux côtés d'un triangle équilatéral sont construits sur la partie centrale. Une partie grossie à la même structure qu'une partie du tout. La longueur de la courbe est infinie, l'aire finie.



La courbe de Hilbert, après un nombre infini d'étapes, remplit tout le plan : on subodore qu'elle est de dimension 2, ce qui est exact selon la définition généralisée de la dimension, que nous allons examiner.



La longueur L d'un segment mesuré par une règle de longueur a est égale à $N.a$ où N est le nombre de règles mises bout à bout pour recouvrir le segment.

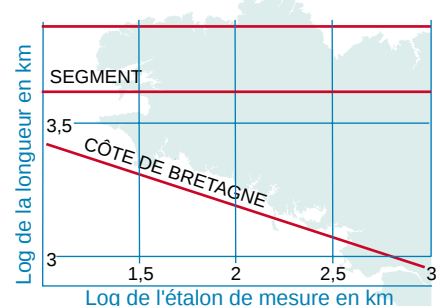


L'aire A d'un carré de côté L est égale à $N.a^2$, où r est le taux de réduction faisant passer du carré de côté L au carré de côté a ($r = L/a$). N est le nombre de petits carrés, de côté a , qui recouvrent le carré de côté L . Plus généralement, si la taille de l'étalon de mesure est réduit dans un rapport r , le nombre d'étalons qui recouvrent la grandeur à mesurer est multiplié par N et la dimension D est égale à $\log N / \log r$. Pour le segment, si l'étalon de mesure est divisé par 2, N est multiplié par 2, et la dimension D , égale à $\log 2 / \log 2$, vaut 1. Pour le carré, si l'étalon de mesure est divisé par 2, N est égal à 4, et la dimension D est égale à $\log 4 / \log 2$, soit 2, ce qui est bien la dimension habituelle d'une surface. De même pour le cube, si $r = 2$, $N = 8$ et D est égale à $\log 8 / \log 2$, soit 3.



Pour la courbe de von Koch, si l'on réduit la taille de l'étalon d'un rapport 3, la règle va mieux épouser le contour et mesurer la longueur du triangle équilatéral central de ce segment, qu'elle ignorait auparavant. Ici $N = 4$, et la dimension D de cette courbe est $\log 4 / \log 3$, soit 1,26... Par ce type de raisonnement, on justifie que la dimension de la courbe de Hilbert est égale à 2.

Historiquement, le mathématicien anglais Richardson a montré que, en mesurant une côte avec des étalons de mesure de plus en plus petits, la longueur de la côte varie linéairement sur une échelle doublement logarithmique : la dimension de la côte est approximativement égale à 1,25. La côte est une fractale.

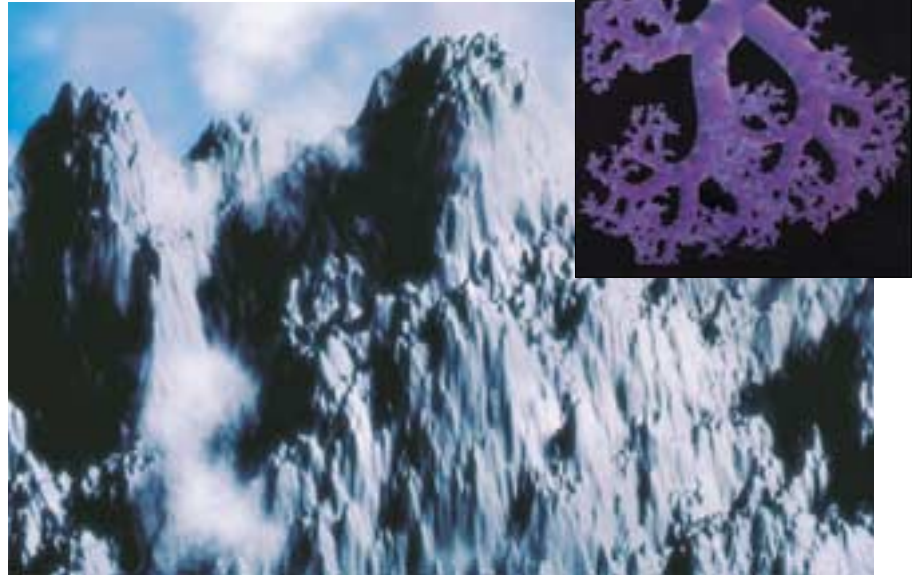


dire «remplissait» tout le carré. Était-elle de dimension 1 comme une courbe ou de dimension 2 comme une surface? Une variante de cette courbe conçue par Hilbert est représentée dans l'encadré de la page précédente. Pour élucider l'énigme, les mathématiciens ont généralisé la notion de dimension à des valeurs non entières : la courbe de von Koch a la dimension $\log 4 / \log 3$, soit 1,26. Bien sûr, vous l'avez deviné, la courbe de Hilbert a la dimension 2.

Un autre exemple de fractale est apparu lors de la recherche d'un béton optimisé. Les entrepreneurs veulent un bon remplissage de l'espace, et les fabricants de béton cherchent à remplir un volume par des assemblages de galets, cailloux, gravillons, sables et poudres de plus en plus fins pour diminuer la proportion de ciments. Cette configuration est celle des sphères apolloniennes (figure 5).

Le comportement des objets physiques dépend de leur dimension fractale ainsi définie. Montrons maintenant comment des processus physiques très courants peuvent engendrer des fractales. L'un d'entre eux est le mouvement brownien des molécules et des atomes qui assure la diffusion des particules ; ces phénomènes aléatoires structurent certaines formes, et la géométrie de l'aléatoire est la géométrie fractale.

Des processus de croissance désordonnés se retrouvent partout, dans la forme des arbres, les figures de croissance des arbres ou dans les figures que dessine la foudre. Un exemple est l'agrégation limitée par la diffusion qui donne des agrégats. Imaginons un fluide où sont disséminées des particules ; ces particules diffusent selon les trajectoires aléatoires du mouvement brownien et se collent pour former des agrégats. C'est le phénomène banal de l'obturation des filtres à poussière : des grains de poussière se col-



2. Paysage de montagne nuageux. En haut à droite un modèle fractal du poumon.

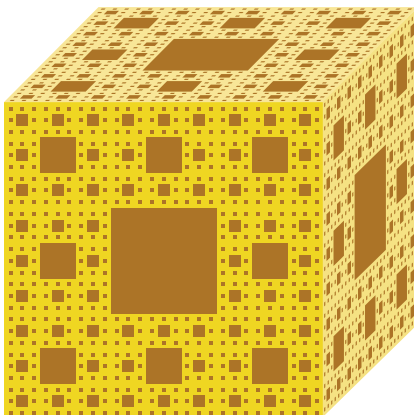
lent sur les mailles du filtre, puis des grains se fixent sur les agrégats déjà formés, etc. Ces formations, parfaitement reproductibles par ordinateurs, décrivent aussi la formation des agrégats de noir de carbone utilisés pour augmenter la durée de vie des pneumatiques, la formation des poussières atmosphériques, les croissances de bactéries, la filtration des liquides dans les milieux poreux, et bien d'autres encore. Un processus très simple donne des morphologies extrêmement compliquées, mais hiérarchisées : très souvent l'aléatoire donne des géométries plus simples qu'on ne le croyait.

L'universalité des fractales n'est alors plus surprenante : les propriétés de nombreux processus vitaux comme la respiration, l'assimilation des aliments ou l'élimination des toxines, dépendent de ce mouvement aléatoire des molécules et des particules.

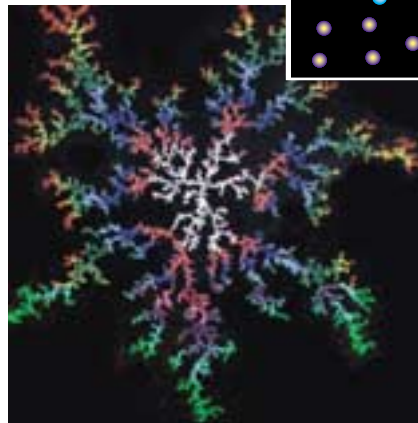
«La nature imite l'art», écrivait Oscar Wilde : aussi n'est-il pas étonnant, *a posteriori*, que si les processus naturels donnent naissance à des fractales, les formes naturelles puissent être reconstituées par des fractales. Les logiciels graphiques utilisent les fractales pour reconstituer des paysages. Il serait amusant d'effectuer des tests en double aveugle, pour voir si un observateur peut distinguer les paysages artificiels et les paysages naturels...

Ces points de vue changent notre approche scientifique. Longtemps nous avons cru que le macroscopique était explicable par une meilleure compréhension du microscopique. L'identité de structure de la partie et du tout modifie notre vision de la physique et dramatise une certaine impuissance du réductionnisme classique à expliquer certains phénomènes naturels.

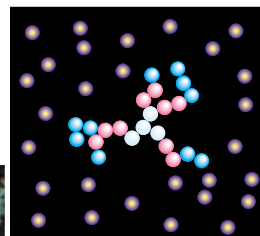
Bernard SAPOVAL est professeur de physique à l'École Polytechnique



3. L'éponge fractale de Webern.



4. Le résultat d'un processus d'agrégation.



5. Les sphères apolloniennes.

L'organisation des formes

Donald E. Ingber

La nature utilise partout – à l'échelle moléculaire comme à l'échelle macroscopique – les mêmes règles d'assemblage : aussi des motifs tels que spirales, pentagones et formes triangulaires sont-ils omniprésents. Ils apparaissent dans les structures cristallines les plus régulières et dans les protéines les plus contournées, dans des organismes aussi différents que les virus, le plancton, le pollen et... l'être humain. Les fractales, sujet de l'article précédent, nous ont montré cette remarquable «disposition de la nature». Ce constat nous étonne, mais doit-il nous stupéfier? Tout ce qui vit est constitué des mêmes atomes de carbone, d'hydrogène, d'oxygène, d'azote et de phosphore : aussi n'est-il pas extraordinaire que l'on retrouve souvent les mêmes configurations. Ce que nous allons montrer dans cet article est l'organisation des superstructures qui les rassemble, et pourquoi le monde est fractalisé.

Par auto-assemblage, les constituants se fédèrent pour donner naissance à des structures stables, plus grandes, dont les propriétés, nouvelles, ne pouvaient être prévues par les seules caractéristiques des éléments individuels. Cet auto-assemblage se manifeste à diverses échelles. À l'intérieur du corps humain, de grosses molécules s'auto-assemblent en composants cellulaires, ou organites, lesquels s'auto-assemblent en cellules, cellules qui s'auto-organisent en tissus, et tissus en organes. Le résultat est le corps, organisé hiérarchiquement en différents systèmes emboîtés comme des poupées russes.

L'ADN n'est pas la seule source de structuration : pas plus que la carte n'est le territoire, la connaissance des pièces du puzzle ne donne pas les règles de leur assemblage. Nous pensons qu'un large éventail de systèmes naturels, atomes de carbone, molécules d'eau, protéines, virus, cellules, tissus, et toutes les créatures

vivantes, sont construits sur un même principe architectural, que nous désignons par *tenségrité*. Ce terme désigne la faculté d'un système à se stabiliser mécaniquement par le jeu de forces de tension et de compression qui s'y répartissent et s'y équilibrent. Le concept de tenségrité s'applique à tous les systèmes vivants, du microbe à l'homme, en passant par la cellule, l'unité constitutrice de tous les organismes.

Ainsi la cellule n'est-elle pas une outre pleine de liquide, elle est structurée par un réseau de câbles et de filaments. Ce réseau capte et transporte l'information sur l'environnement cellulaire et commande l'activité des gènes de déplacement et de survie de la cellule. La tenségrité explique comment la forme cellulaire et les forces mécaniques – telles que la pression dans les vaisseaux

sanguins ou la compression dans les os – influent sur l'activité des gènes. Une meilleure intelligence des règles naturelles de l'auto-assemblage nous permet d'intégrer avec plus de pertinence les caractéristiques des molécules, des cellules et des autres constituants biologiques. L'omniprésence de la tenségrité dans la nature ouvre de nouvelles perspectives sur les forces qui régulent l'organisation biologique et, peut-être, sur l'Évolution elle-même.

Dans les structures régies par la tenségrité, les forces sont transmises à tous les éléments : un accroissement de la tension sur l'un des éléments est répercuté aux autres éléments de la structure, y compris les plus éloignés. Cette augmentation globale de la tension est équilibrée par une augmentation de la compression de certains éléments de la structure. Ainsi une structure se stabilise par un mécanisme associant tension globale et compression locale. Dans les élégantes sculptures de Kenneth Snelson, des éléments travaillent en compression, d'autres en traction, reproduisant et expliquant la structuration du corps humain, avec ses 206 os et les muscles qui les relient. Les os sont comprimés par la force de gravité et stabilisés par la traction exercée par les muscles, les tendons et les ligaments.

Vers la fin des années 1970, les biologistes se représentaient la cellule comme un fluide visqueux délimité par une membrane ; on savait pourtant que les cellules contiennent une armature interne, ou cytosquelette, composée de trois types de protéines, les microfilaments, les filaments intermédiaires et les microtubules. Toutefois, leur rôle dans le contrôle de la forme des cellules était mal compris. On s'interrogeait également sur le comportement des cellules quand elles sont disposées sur différentes surfaces ; les cellules s'étalent et s'aplatissent lorsqu'elles adhèrent à du verre ou au fond d'une boîte de Pétri en matière plastique. En 1980, Albert Harris, de l'Université de Caroline du Nord, montra que, lorsqu'elles sont fixées sur un substrat en caoutchouc flexible,



1. Dans les structures en porte à faux, cou de girafe ou sculpture à tiges et à câbles, les forces sur les organes en extension – les muscles et les câbles – sont équilibrées par les forces sur les dispositifs agissant en compression, les os et les tiges.



Schering-Plough