

ne possédons parfois que les crânes de certains fossiles, tandis que nous n'avons que des carapaces pour d'autres.

Si nous avions découvert uniquement le crâne de *Palaeochersis*, nous serions parvenu à la conclusion phylogénique proposée ici. Toutefois, si nous n'avions récupéré qu'une carapace de Los Colorados, nous aurions pensé que certains pleurodires primitifs étaient présents dans le Trias d'Argentine (*Palaeochersis*) de même qu'en Allemagne (*Proterochersis*). Le bassin fusionné de *Palaeochersis* l'aurait inévitablement apparenté aux pleurodires, alors que la conclusion est différente lorsque l'on considère à la fois les caractères crâniens et postcrâniens.

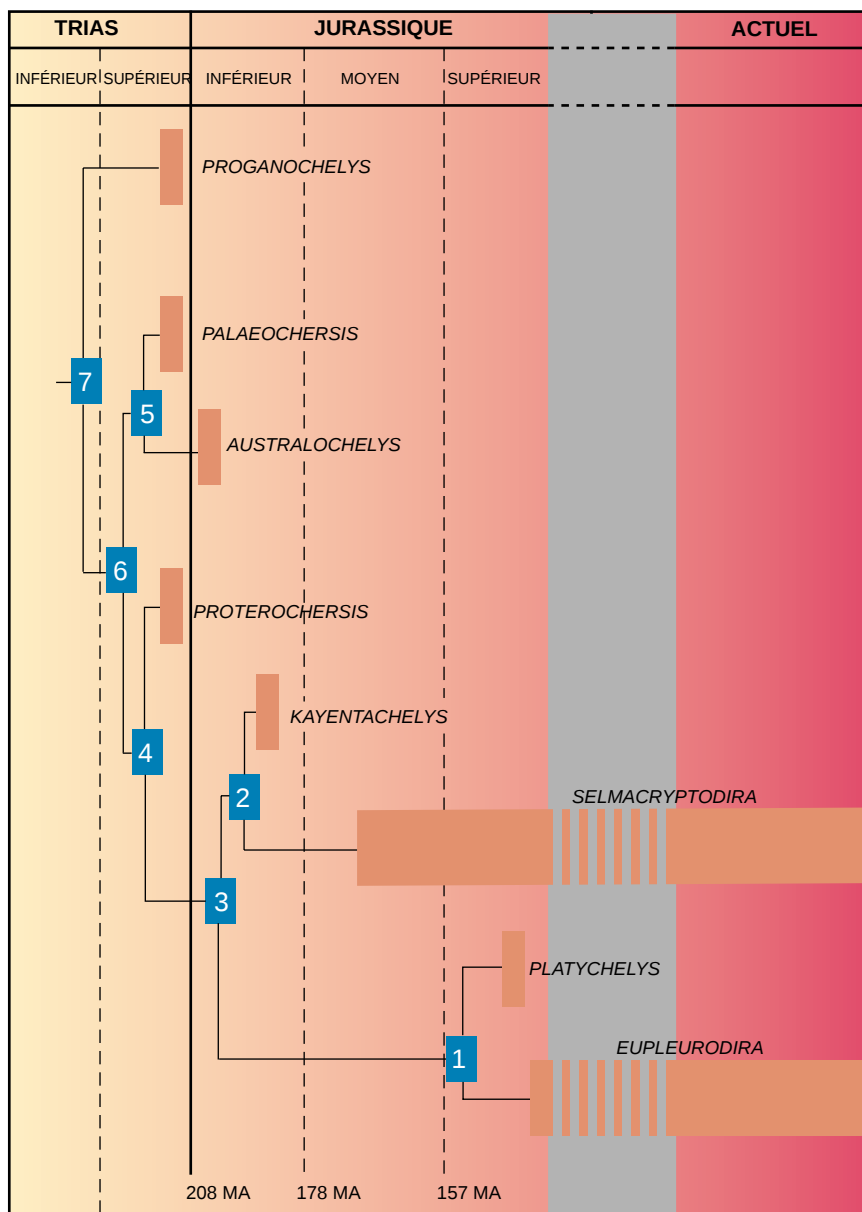
L'histoire des tortues enfin reconstituée

Nous constatons donc que, au cours de l'évolution des tortues, divers caractères sont successivement apparus, puis disparus. Par conséquent, la découverte de crânes et de squelettes associés est une condition indispensable pour élaborer des parentés entre les groupes de tortues.

Dès la fin du Trias, les tortues avaient montré des adaptations diverses dans des zones géographiques variées. Il existait trois groupes différents (*Proganochelys*, *Australochelyidae* et *Proterochersis*) qui couvraient les régions septentrionales et méridionales de la Pangée. Ce tableau du trio révèle une importante diversité écologique, avec des formes amphibies d'eau douce (*Proganochelys*) et des formes terrestres (*Proterochersis* et peut-être les *Australochelyidae*).

La faune du Trias semble très homogène, dans la mesure où des genres d'une même famille se retrouvent un peu partout. Sans remettre en cause cette affirmation, nous précisons que certaines familles sont mieux représentées dans la portion septentrionale de la Pangée triasique (tels les phytosaures) ou dans les continents du Sud (*Australochelyidae*). Cela suggère que, avant que ne se produise la scission du supercontinent Pangée, deux grandes sous-unités faunistiques s'étaient déjà différenciées.

Les caractéristiques principales des tortues se sont affirmées au Trias supérieur. Par comparaison avec les mammifères ou les dinosaures triasiques et les oiseaux, les modifications opérées depuis chez les Chéloniens



6. NOUVEL ARBRE PHYLOGÉNÉTIQUE DES TORTUES. Dès la fin du Trias, les tortues se sont diversifiées en au moins trois groupes habitant des régions septentrionales (*Proganochelys quenstedti*, *Proganochelys rucha*, *Proterochersis robusta*) et méridionales (*Palaeochersis talampayensis*) de la Pangée. Les *Australochelyidae* (*Australochelys* et *Palaeochersis*) constituent un groupe sans descendance intermédiaire dans la séquence phylogénétique entre *Proganochelys* et les autres tortues, qui n'ont pas laissé de descendants vivants. 1 = pleurodires ; 2 = cryptodires ; 3 = Casychelydia ; 4 = sans dénomination ; 5 = *Australochelyidae* ; 6 = *Rhaptochelydia* ; 7 = Testudines.

semblent constituer de légers ajustements d'un modèle ancien à l'efficacité prouvée. La diversité des groupes qui sont nés de ce plan commun, leur dispersion géographique et les divers environnements dans lesquels ils se trouvent prouvent leur faculté d'adaptation. De leur train de sénateur, les tortues ont sillonné une planète changeante pendant 200 millions d'années, alors que nombre de groupes, dont les dinosaures, ont disparu à jamais.

G. ROUGIER, Marcelo de la FUENTE et A. ARCUCCI sont spécialistes des tortues. G. ROUGIER est professeur à l'Université de Buenos Aires.

E.S. GAFFNEY et J.W. KITCHING, *The Most Ancient African Turtle*, in *Nature*, n° 369, pp. 55-58, 1994.

M.S.Y. LEE, *The Origin of the Turtle Body Plan*, in *Science*, vol. 261, pp. 1716-1720, 1993.

G.W. ROUGIER, et al, *Late Triassic Turtles from South America*, in *Science*, vol. 328, pp. 855-858, 1995.

Géométrie et religion au Japon

TONY ROTHMAN • HIDETOSHI FUKAGAWA

Quand le Japon s'isola, entre 1639 et 1854, des pratiques mathématiques originales apparurent. Notamment le peuple dédiait aux divinités des tablettes de bois ornées de problèmes géométriques.

De 1639 à 1854, quand le Japon ferma ses frontières, les idées scientifiques occidentales cessèrent de s'introduire, et les mathématiques se développèrent sans échange avec celles des autres pays du monde. C'est alors que fleurit une tradition d'une rare élégance : des samouraïs, des marchands et des paysans passionnés de mathématiques résolvaient des problèmes de géométrie variés, puis inscrivaient leurs résultats sur des tablettes de bois, qu'ils suspendaient sous les toits des édifices religieux. Selon les cas, ces *sangaku*, littéralement « tablettes mathématiques », étaient des offrandes aux divinités ou des défis aux autres visiteurs des lieux saints.

La plupart des *sangaku* traitaient de géométrie euclidienne, mais ils mentionnent des problèmes bien différents de ceux des cours de géométrie occidentaux : les cercles et les ellipses y jouent un rôle prépondérant. On considère ainsi des cercles dans des cercles, des cercles dans des ellipses, des ellipses dans des cercles... Certains de ces problèmes sont élémentaires ; d'autres sont des casse-tête dont la résolution nécessite des techniques avancées, notamment de calcul intégral ou de géométrie affine. La plupart de ces problèmes appartiennent aujourd'hui à la catégorie des mathématiques récréatives ou pédagogiques, mais certains résultats inscrits sur les tablettes votives japonaises anticipaient des résultats qui ne furent découverts qu'ultérieurement en Occident : le problème de Malfatti (inscrire dans un triangle trois

cercles tangents entre eux deux à deux et tangents chacun à deux côtés du triangle), le théorème de Casey (trouver la relation entre les rayons de quatre cercles tangents à un cinquième cercle ou à une droite), le théorème des six sphères de Soddy (voir la page 56) ou le théorème des cercles de Descartes (trouver la relation entre les rayons de quatre cercles tangents deux à deux) furent démontrés au Japon avant de l'être en Occident. Nombre de tablettes votives japonaises tiennent autant de l'œuvre d'art que de la publication mathématique.

Mathématiques divines

Comment cette pratique est-elle apparue ? Et quand ? L'accrochage de tablettes votives aux toits des sites religieux se pratiquait depuis plusieurs siècles quand apparurent les premiers *sangaku*. Le shintoïsme, religion officielle du Japon jusqu'en 1945, est un polythéisme qui admet « huit cents myriades de dieux », les *kamis*. Ces derniers, disait-on, aimaient les chevaux, et les fidèles trop pauvres pour leur offrir un cheval vivant pouvaient, à la place, en offrir une représentation dessinée sur bois. Aussi, jusqu'au XV^e siècle, les tablettes votives représentaient souvent des chevaux.

Le plus ancien *sangaku* connu, découvert dans la préfecture de Tochigi,

date de 1683. On a également trouvé, à Tokyo, une deuxième tablette datant de 1686, puis une troisième datant de 1691. Au XIX^e siècle, le mathématicien japonais Kazu Yamaguchi consigna dans son journal de voyage la description d'une tablette encore plus ancienne, qui aurait été réalisée en 1668. Les historiens estiment que la tradition des *sangaku* date de la seconde moitié du XVII^e siècle.

Le premier recueil de problèmes de *sangaku* fut publié en 1789. D'autres recueils parurent aux XVIII^e et XIX^e siècles. Écrits à la main ou imprimés à partir de matrices en bois, ces ouvrages sont très beaux. Plus de 880 tablettes qui subsistent aujourd'hui font elles-mêmes référence à des centaines d'autres tablettes qui figurent dans divers recueils. Un recensement des *sangaku* existants révèle que tous les milieux, urbains ou ruraux, pratiquaient la tradition de ces ex-voto mathématiques ; toutefois ces tablettes sont deux fois plus nombreuses dans les lieux de culte shintoïste que dans les temples bouddhistes.

La plupart des *sangaku* conservés contiennent plusieurs théorèmes et sont souvent ornés de couleurs brillantes. Les théorèmes sont généralement livrés sans démonstration. À côté du résultat figurent le nom de l'auteur et la date de l'offrande. Les problèmes ne traitent pas uni-

1. AU JAPON, de nombreux lieux de pèlerinages shintoïstes et bouddhistes abritent des *sangaku* : ces tablettes votives étaient traditionnellement suspendues sous les avant-toits des édifices religieux. Les problèmes consignés sur les *sangaku* traitent presque toujours de géométrie. Nombre de ces tablettes sont délicatement peintes ; certains problèmes ont été inscrits en idéogrammes dorés.



quement de géométrie. Certains, qui calculent le volume de solides, imposent l'usage du calcul intégral, de sorte qu'on peut se demander quelles techniques étaient connues et utilisées par les Japonais. Nous examinerons plus loin cette question. D'autres tablettes proposent des équations diophantiennes, c'est-à-dire des équations algébriques dont on cherche des solutions en nombres entiers.

Aujourd'hui, les *sangaku* n'intéressent plus que quelques passionnés des mathématiques japonaises traditionnelles, et, parmi eux, Hidetoshi Fukagawa, un enseignant de lycée dans la préfecture d'Aichi (à mi-chemin entre Tokyo et Osaka). Il y a une trentaine d'années, H. Fukagawa décida d'étudier l'histoire des mathématiques japonaises, afin d'enrichir son enseignement. La mention de ces tablettes mathématiques, dans un vieil ouvrage trouvé en bibliothèque, le surprit, car il ignorait l'existence de tels objets. Depuis, H. Fukagawa parcourt le Japon à la recherche de ces tablettes et il est devenu un expert en *sangaku*, mais aussi en histoire des mathématiques japonaises traditionnelles.

Pour ses recherches, H. Fukagawa a dû apprendre le *kambun*, du chinois classique augmenté de signes qui facilitent la lecture par les Japonais. Équivalent japonais du latin, le *kambun* était la langue scientifique de la période d'Edo (1603-1867). H. Fukagawa est mis à contribution chaque fois que l'on découvre de nouvelles tablettes.

Les origines d'une tradition

Si l'origine des *sangaku* ne peut être datée avec précision, elle peut être localisée. En japonais, le mot *wasan* désigne les mathématiques développées au Japon, par opposition au *yosan*, qui désigne les mathématiques occidentales. L'histoire des mathématiques japonaises ancienne explique comment le *wasan* et la curieuse coutume du *sangaku* sont apparus.

Au milieu du VI^e siècle, le bouddhisme s'introduisit au Japon, ainsi que les mathématiques chinoises. Dès le début du VIII^e siècle, le Japon avait importé les grands classiques chinois sur l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. Le plus ancien de ces ouvrages est le *Chou-pei Suan-ching*, qui contient le théorème de Pythagore et la figure habituellement associée à

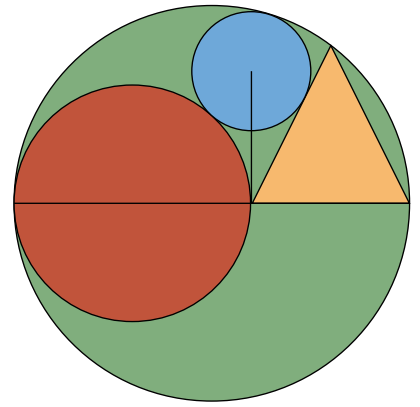
sa démonstration. Cette partie de l'ouvrage date au moins du VI^e siècle avant notre ère.

L'ouvrage intitulé *Chiu-chang Suan-shu*, qui fut le document chinois le plus important pour le développement des mathématiques japonaises, montre un état de connaissances plus avancé : il indique comment déterminer l'aire de triangles, de cercles et d'autres figures, et il résout des problèmes analogues à ceux des écoles d'aujourd'hui (Si cinq bœufs et deux moutons coûtent huit taels d'or, et si deux bœufs et huit moutons coûtent huit taels, combien coûte chaque animal?). La majeure partie de l'ouvrage fut certainement rédigée au III^e siècle avant notre ère : ainsi ce document serait le plus ancien à mentionner des nombres négatifs et à étudier une équation du second degré (certains historiens des mathématiques pensent toutefois que les Égyptiens avaient abordé les équations du second degré dès le troisième millénaire avant notre ère).

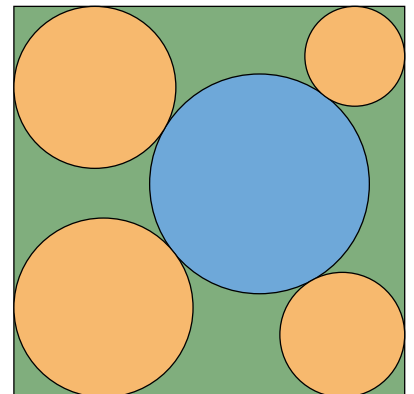
Malgré l'apport chinois, les mathématiques ne prirent pas racine au Japon. Le pays connut même une période d'obscurantisme quand l'Europe occidentale vivait son Moyen Âge. Comme les églises et les monastères européens, les temples bouddhistes devinrent les seuls centres culturels, même si les mathématiques ne semblent pas y avoir joué un rôle majeur. Durant le shogunat des Ashikaga (1338-1573), le Japon n'avait plus d'expert en division.

Les mathématiques japonaises ne naquirent véritablement qu'au début du XVII^e siècle. Un certain Shigeyoshi Mori fut particulièrement productif aux alentours de 1600. Bien qu'une seule de ses œuvres – un simple opuscule – nous soit parvenue, on sait qu'il développa le calcul sur le *soroban*, le boulier japonais, et fit connaître ce type de calcul dans le pays.

Un de ses élèves, Mitsuyoshi Yoshida (1598-1672), a laissé un ouvrage important. Ce document intitulé *Jinko-ki* (littéralement, «Des nombres grands et petits») fut publié en 1627. Il traite également du calcul sur le *soroban*, et son influence fut telle que son titre fut longtemps synonyme d'arithmétique : les mathématiciens japonais s'intéressèrent plus au calcul qu'à la logique. Mori et Yoshida furent ainsi les pères des mathématiques japonaises.



Dans ce problème, qui provient d'un *sangaku* datant de 1803 et trouvé dans la préfecture de Gumma, la base d'un triangle isocèle repose sur un diamètre du grand cercle vert. En outre, ce diamètre partage en deux le cercle rouge intérieurement tangent au cercle vert et en contact avec le sommet du triangle. Le cercle bleu est tangent au triangle et au cercle rouge, et intérieurement tangent au cercle vert. Un segment de droite relie le centre du cercle bleu au point de contact du cercle rouge et du triangle. Montrer que ce segment est perpendiculaire au diamètre du cercle vert.

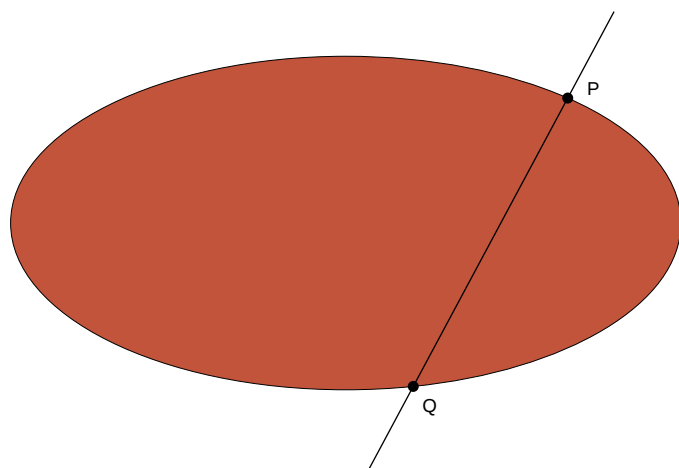
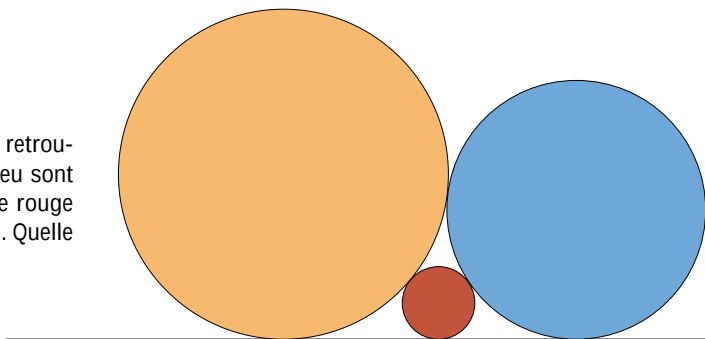


Ce problème provient d'une tablette de 1874 trouvée dans la préfecture de Gumma. Un grand cercle bleu se trouve dans un carré. Quatre petits cercles orange, de rayons différents, sont tangents d'une part au cercle bleu, d'autre part aux côtés du carré. Quelle relation unit les rayons des quatre cercles et le côté du carré (indication : ce problème peut se résoudre par le théorème de Casey, qui donne la relation entre quatre cercles tangents à un cinquième cercle ou à une droite)?

Quelques problèmes de *sangaku* dans le plan

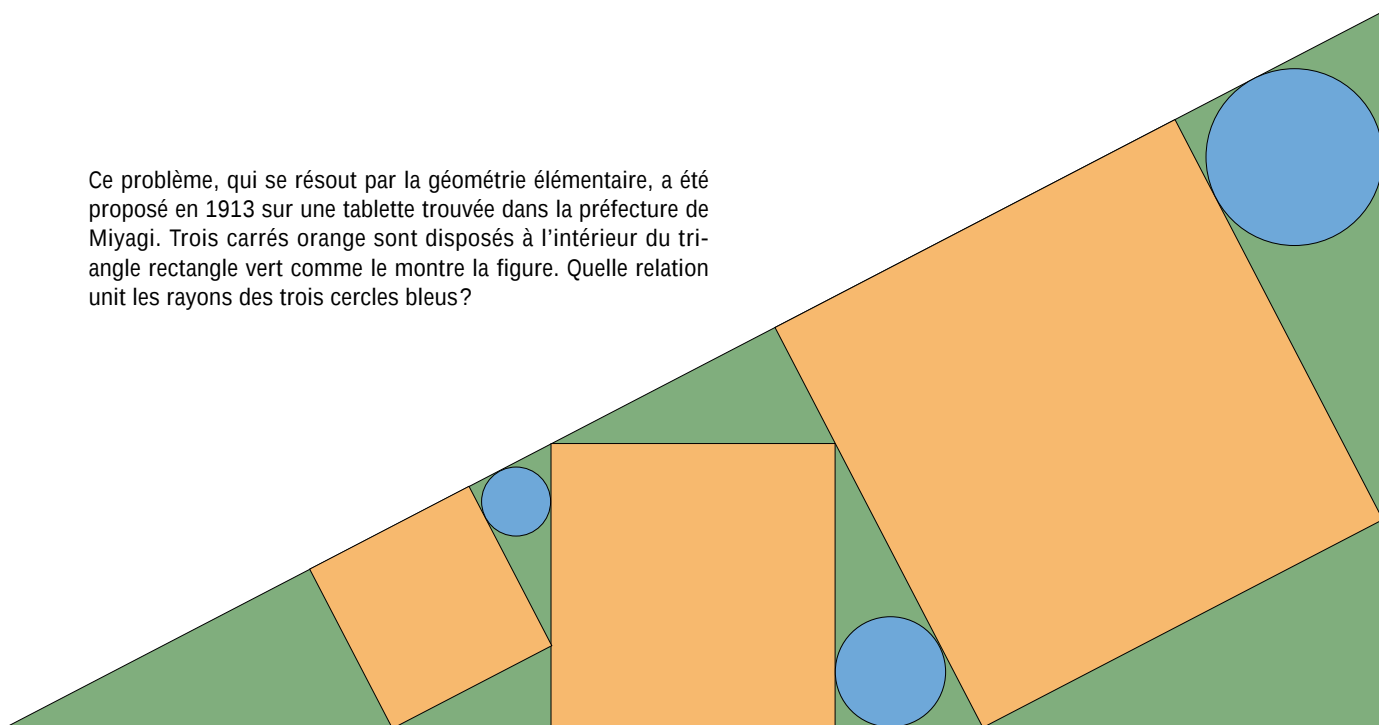
(les réponses sont données en page 58).

Ce problème simple figurait sur une tablette datant de 1824, retrouvée dans la préfecture de Gumma. Les cercles orange et bleu sont tangents et tous deux tangents à une droite. Le petit cercle rouge est tangent aux deux premiers cercles et à cette même droite. Quelle relation unit les rayons des trois cercles ?



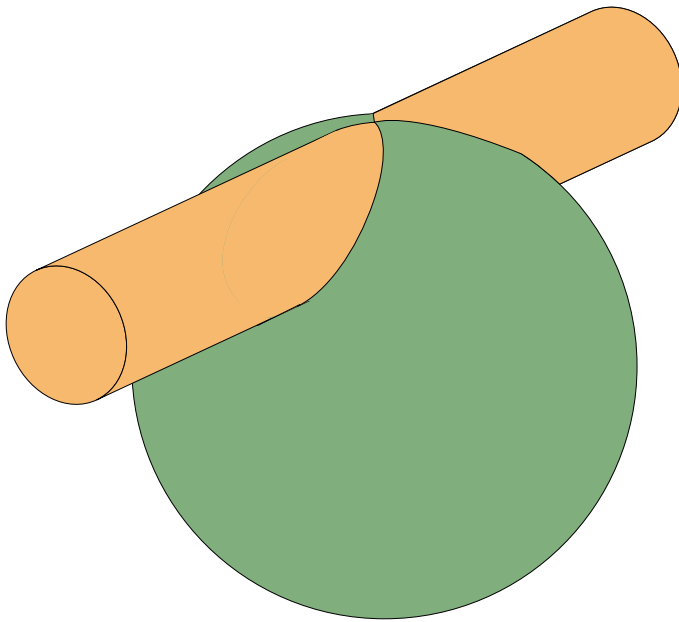
Ce problème fut consigné en 1912 sur une tablette conservée dans la préfecture de Miyagi. Par un point P d'une ellipse, on trace la normale à l'ellipse, et l'on nomme Q l'intersection de cette normale avec l'autre côté de l'ellipse. Quelle est la valeur minimale de PQ ? Ce problème semble simple : la valeur minimale de PQ est le petit axe de l'ellipse. Ce n'est toutefois la solution que si $b < a \leq \sqrt{2}b$, où a et b sont respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. En fait, la tablette ne donne pas cette solution, mais une autre, correspondant à $2b^2 < a^2$.

Ce problème, qui se résout par la géométrie élémentaire, a été proposé en 1913 sur une tablette trouvée dans la préfecture de Miyagi. Trois carrés orange sont disposés à l'intérieur du triangle rectangle vert comme le montre la figure. Quelle relation unit les rayons des trois cercles bleus ?



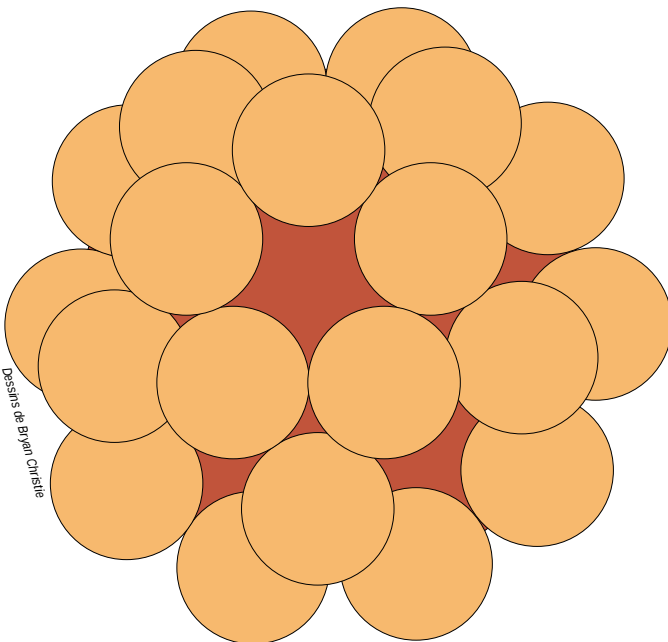
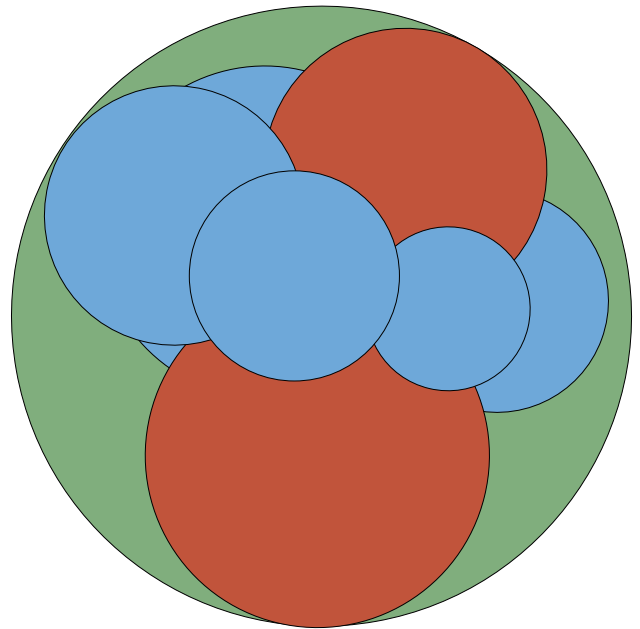
Dessins de Bryan Christie

Quelques problèmes dans l'espace



Ce problème, provenant d'un *sangaku* de 1825, fut probablement résolu à l'aide de l'*enri*, ou principe du cercle dans les mathématiques japonaises. Un cylindre coupe une sphère tout en étant intérieurement tangent à cette sphère. Quelle est l'aire de la surface du cylindre contenue dans la sphère ?

Ce problème était mentionné sur une tablette de 1822, retrouvée dans la préfecture de Kanagawa. Il anticipe de plus d'un siècle un théorème de Frederick Soddy, le chimiste britannique qui, avec Ernest Rutherford, découvrit la transmutation des éléments chimiques. Deux sphères rouges tangentes entre elles sont intérieurement tangentes à la grande sphère verte. Un «collier» de sphères bleues plus petites et de tailles différentes entoure le point de tangence des deux sphères rouges. Les sphères bleues du collier sont deux à deux tangentes, tangentes aux sphères rouges et tangentes à la sphère verte. Quel est le nombre des sphères bleues ? Quelle relation unit les rayons des sphères bleues ?



Hidetoshi Fukagawa fut si fasciné par ce problème, qui date de 1798, qu'il en a construit un modèle en bois. Soit une grande sphère entourée de 30 petites sphères identiques, chacune tangente à ses quatre voisines et à la grande sphère. Quelle relation unit le rayon de la grande sphère et celui des petites sphères ?

Dessins de Bryan Christie

Isolement et géométrie

Les mathématiques qui s'affichèrent sur les *sangaku* furent toutefois l'œuvre de nombreux individus, et non celle d'une élite. En 1639, le shogunat des Tokugawa (durant la période d'Edo) décréta de fermer les frontières du Japon afin de renforcer son pouvoir. Durant cette période de *sakoku*, de «fermeture du pays», le gouvernement proscrivit les ouvrages étrangers, interdit les voyages à l'étranger, persécuta les chrétiens et interdit l'accostage des navires portugais et espagnols. L'isolement persista durant plus de deux siècles, jusqu'à ce que le capitaine Matthew Perry, à la tête d'une flotte de guerre américaine, oblige le Japon à mettre fin à son *sakoku*, en 1854.

L'isolement du pays eut quelques avantages : la fin du XVII^e siècle fut une renaissance, ou *Genroku*. Les arts du *haïku*, des théâtres *no* et *kabuki* atteignirent leur apogée ; l'*ukiyo-e*, l'art des peintures d'un «monde flottant», apparut ; la cérémonie du thé et l'art du bouquet se développèrent, tandis que les mathématiques prospéraient autour de Takakazu Seki (1642-1708).

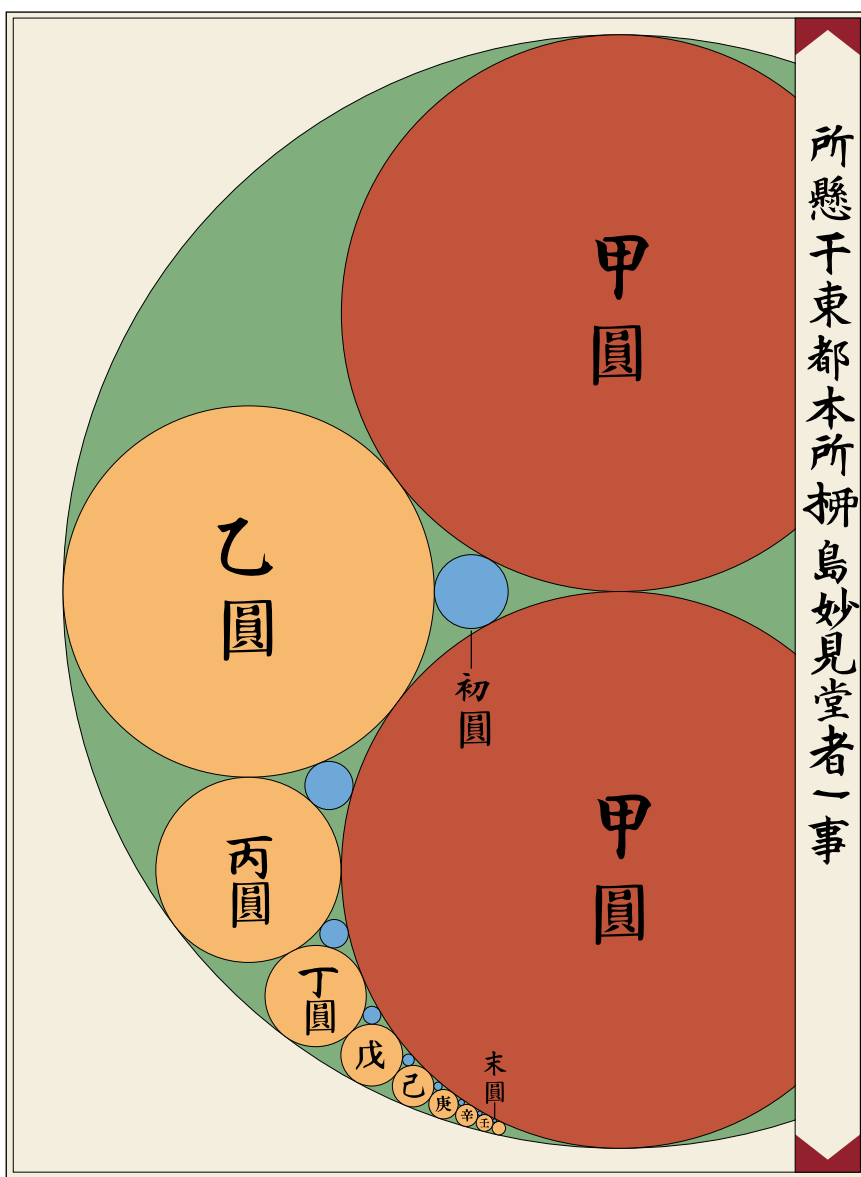
Au Japon, Seki est aussi connu qu'Isaac Newton ou Antoine Laurent de Lavoisier en Europe. On lui a attribué un très grand nombre de manuscrits et l'on sait qu'il forma de nombreux élèves, qui développèrent les mathématiques japonaises.

Le premier accomplissement de Seki fut sa théorie des déterminants, qui est plus puissante que celle de Gottfried Wilhelm Leibniz et la précède d'au moins une décennie. Il trouva également des méthodes pour résoudre des équations de degré élevé (une grande partie des mathématiques traditionnelles japonaises de cette époque concerne des équations de degré atteignant plusieurs centaines ; l'une d'elles est de degré 1 458). Enfin Seki semble avoir été à l'origine de l'*enri*, ou «principe du cercle».

L'*enri* était un champ de recherches mathématiques qui s'est développé après Seki. À la base, il utilise des méthodes analogues à celles qu'employaient Eudoxe et Archimède pour calculer l'aire des cercles : à l'aide de polygones à n côtés, on approche la circonférence du cercle et l'on utilise de telles approximations pour calculer des aires et des volumes, par exemple. Ainsi l'*enri* fut une forme de calcul intégral, appliquée ensuite à d'autres figures,



Hiroshi Umeda



Bryan Christie, d'après Toshitaka Iwasaki

2. LES PLAQUETTES VOTIVES accrochées dans les temples japonais (*en haut*) mentionnent souvent des problèmes mathématiques où figurent des cercles emboîtés ou des sphères inscrites à l'intérieur d'autres figures. Le problème reproduit en bas figurait sur une plaquette votive peinte en 1788, dans la préfecture de Tokyo. On cherche le rayon du n -ième cercle bleu en fonction du rayon r du cercle vert. Les deux cercles rouges sont identiques et leur rayon est égal à $r/2$ (indication : le rayon du cinquième cercle bleu est égal à $r/95$). La solution de ce problème fait intervenir l'équivalent japonais du théorème des cercles de Descartes, qui détermine la relation entre les rayons de quatre cercles tangents deux à deux ; elle est donnée page 58.

telles les sphères et les ellipses. Les techniques de l'*enri* ont été mises en œuvre dans la réalisation de *sangaku*.

Des sphères dans des ellipsoïdes

Les premiers livres utilisant l'*enri* et les premiers *sangaku* attestés sont contemporains de Seki. Il ne s'agit pas là d'une coïncidence : les disciples de Yoshida et de Seki contribuèrent probablement au développement du *wasan* en même temps qu'ils en subissaient l'influence.

Certains racontent que Seki a rencontré son premier *sangaku* alors qu'il se rendait au château du shogun, dont il était le mathématicien officiel ; les tablettes votives l'auraient incité à approfondir ses recherches. Est-ce une légende ?

On ne le saura sans doute jamais, mais, au siècle suivant apparurent des livres contenant des problèmes typiquement japonais, mettant en jeu des cercles à l'intérieur de triangles, des

sphères à l'intérieur de pyramides, des ellipsoïdes entourant des sphères... Les problèmes trouvés dans ces ouvrages diffèrent peu de ceux qui ont été retrouvés sur les tablettes, les historiens ont conclu que l'engouement pour tous les problèmes de *wasan* – et la vogue des *sangaku* – résulta de la politique d'autarcie du Japon.

Cette autarcie fut-elle totale ? À l'exception des Hollandais, autorisés à accoster dans le port de Nagasaki, sur l'île méridionale de Kyushu, tous les commerçants occidentaux étaient interdits de séjour. De surcroît, les déplacements des Japonais étaient sévèrement limités : un voyage à l'étranger était un acte de trahison, passible de la peine de mort. L'autarcie fut suffisamment complète pour minimiser l'influence des mathématiques étrangères sur les mathématiques japonaises.

En revanche, au XIX^e siècle, le *wasan* fut progressivement supplanté par le *yosan*. Apparurent alors des manus-

crits mêlant des textes en *kambun* et des notations mathématiques occidentales. Puis, après l'ouverture du Japon et l'effondrement du shogunat des Tokugawa, en 1867, le nouveau gouvernement adopta le *yosan* et délaissa les mathématiques locales. Certains praticiens du *wasan* continuèrent de suspendre des tablettes (quelques *sangaku* datent même de la dernière décennie), mais la quasi-totalité des problèmes proposés durant le XX^e siècle sont des plagiat.

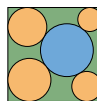
Qui étaient les auteurs des *sangaku* ? Les théorèmes merveilleusement dessinés sur les tablettes votives étaient-ils l'œuvre de mathématiciens professionnels ou de simples amateurs ? La question est difficile. Le traité d'histoire des mathématiques japonaises de David Smith et de Yoshio Mikami ne mentionne que quelques *sangaku*. Il cite le recueil *Shimpeki Sampo* («Problèmes mathématiques suspendus devant le temple»), publié en 1789 par le mathématicien profes-

Réponses aux problèmes de *sangaku*

Nous ne donnons ici que l'indication des solutions. Les lecteurs intéressés trouveront les solutions détaillées sur le site Internet de la revue *Pour la Science*, à l'adresse <http://www.pourlascience.com>.

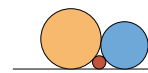


Réponse : Dans sa solution, l'auteur du problème trace un segment de droite qui passe par le centre du cercle bleu et qui est perpendiculaire au diamètre du cercle vert. Il suppose ensuite que ce segment est différent du segment décrit dans l'énoncé du problème. Ainsi, ces deux segments devraient couper le diamètre tracé en deux points différents. Il montre ensuite que la distance entre ces deux points est nécessairement nulle : autrement dit, les deux segments sont identiques et, donc, perpendiculaires au diamètre du cercle vert.



Réponse : Si a désigne le côté du carré et r_1, r_2, r_3 et r_4 sont respectivement les rayons des cercles supérieur droit, supérieur gauche, inférieur gauche et inférieur droit, alors :

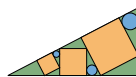
$$a = \frac{2(r_1 r_3 - r_2 r_4) + \sqrt{2(r_1 - r_2)(r_1 - r_4)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4}$$



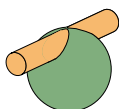
Réponse : $1/\sqrt{3} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$, où r_1, r_2 et r_3 sont respectivement les rayons des cercles orange, bleu et rouge. On peut résoudre le problème à l'aide du théorème de Pythagore.



Réponse : $PQ = \sqrt{27} a^2 b^2 / (a^2 + b^2)^{3/2}$. On peut résoudre ce problème à l'aide de la géométrie analytique : on cherche une équation pour PQ ; puis on prend la dérivée de cette équation et on l'égale à zéro pour obtenir la valeur minimale de PQ. On ignore si les premiers auteurs de ce problème l'ont résolu en recourant au calcul différentiel.



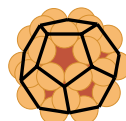
Réponse : $r_2^2 = r_1 r_3$, où r_1, r_2 et r_3 sont respectivement les rayons des grand, moyen et petit cercles bleus (autrement dit, r_2 est la moyenne géométrique de r_1 et r_3). On peut résoudre le problème en observant que les triangles verts délimités par les carrés orange sont tous semblables. La solution, telle qu'elle fut initialement proposée, consiste alors rechercher la relation unissant les trois carrés.



Réponse : $16t \sqrt{t(r-t)}$, où r et t sont respectivement les rayons de la sphère et du cylindre.



Réponse : Six sphères. Le théorème des six sphères de Soddy stipule que le nombre de sphères est égale à six. Curieusement, les rayons $t_1, t_2, \dots, t_6$ des diverses sphères bleues qui composent le collier sont liés par les relations : $1/t_1 + 1/t_4 = 1/t_2 + 1/t_5 = 1/t_3 + 1/t_6$.



Réponse : $R = \sqrt{5r}$, où R et r sont respectivement les rayons de la grande sphère et des petites sphères. On peut résoudre le problème en observant que le centre de chaque petite sphère se trouve au milieu d'une arête de dodécaèdre régulier – un solide régulier à douze faces pentagonales.



Réponse : $r / [(2n - 1)^2 + 14]$. La solution originelle de ce problème fait intervenir à plusieurs reprises la version japonaise du théorème du cercle de Descartes. On peut toutefois utiliser l'inversion, qui était à l'époque inconnue des mathématiciens japonais.



Hiroshi Umeoka

3. LES EX-VOTO MATHÉMATIQUES DU JAPON furent parfois l'œuvre de mathématiciens professionnels, mais, parfois aussi, ils furent réalisés par des commerçants, des samourais, des enfants... Sur

ces plaques de bois, sont généralement mentionnés le problème, le nom de celui qui a réalisé l'ex-voto, la date de l'offrande ; certains *sangaku* sont des chefs-d'œuvre.

sionnel Kagen Fujita. D. Smith et Y. Mikami mentionnent une tablette sur laquelle la solution proposée est suivie de la référence suivante : «District féodal de Kakegawa, province d'Enshu, troisième mois de 1795, Sonobei Keichi Miyajima, élève de Sadasuke Fujita, de l'école de Seki». Dans son ouvrage consacré au développement des mathématiques en Chine et au Japon, Y. Mikami mentionne le «problème du temple de Gion», qui fut suspendu au temple de Gion, à Kyoto, par Enkyu Tsuda, élève d'Enri Nishimura. En outre, ces tablettes furent rédigées en *kambun*, signe que leurs auteurs appartenaient à une classe sociale cultivée.

D'autres observations montrent toutefois que les tablettes votives ne furent pas l'apanage des mathématiciens professionnels. Notamment nombre de problèmes proposés sont élémentaires et ne sont pas de ceux qu'étudieraient des professionnels. Dans la préfecture de Mie, H. Fukagawa a trouvé une tablette signée par un marchand. Sur d'autres tablettes figurent des noms de femmes et d'enfants âgés de 12 à 14 ans. Selon H. Fukagawa, la majorité des problèmes furent inventés par les samourais, mais quelques uns furent proposés par des paysans : le mathématicien Sen Sakuma (1819-1896), par exemple,

enseignait le *wasan* aux fermiers de la préfecture de Fukushima et eut jusqu'à 2 000 élèves.

Ce type d'enseignement rappelle la période d'Edo, où le Japon n'avait ni lycées ni universités. Le peuple japonais venait alors apprendre à lire, à écrire et à calculer sur des bouliers dans des écoles privées ou dans des temples.

Des individus de toutes les classes sociales semblent donc avoir contribué aux *sangaku* : de nombreux Japonais s'adonnaient avec autant de plaisir aux mathématiques qu'à la poésie et à d'autres formes d'art, parce qu'ils étaient attirés par la beauté de la géométrie. Les maîtres, au terme de leur journée d'enseignement, ou les samourais qui avaient cessé de

combattre s'isolaient pour concevoir des problèmes mettant en jeu des sphères et des ellipsoïdes ; la sereine contemplation mathématique était alors un loisir. Quand la solution était trouvée, on l'écrivait sur une plaque de bois que l'on suspendait ensuite au temple local. Les visiteurs du temple remarquaient la tablette colorée et admiraient sa beauté. Nombre d'entre eux quittaient alors le temple en se demandant comment l'auteur du problème était parvenu à une telle solution. Certains décidaient de résoudre le problème ou d'étudier la géométrie afin de tenter de le résoudre. D'autres quittaient le temple en se demandant «Que se passerait-il si l'on modifiait légèrement le problème et que...»

Tony ROTHMAN est professeur de mathématiques à l'Université Harvard. Hidetoshi FUKAGAWA est professeur de mathématiques dans la préfecture d'Aichi.

Annick HORIUCHI, *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo (1600-1868), une étude des travaux de Seki Takakazu et de Takebe Katahiro*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1994.

Yoshio MIKAMI, *The Development of Mathematics in China and Japan*, deuxième édition, Chelsea Publishing Company, New York, 1974.

H. FUKAGAWA et D. PEDOE, *Japanese Temple Geometry Problems*, Charles Babbage Research Foundation, Winnipeg, Canada, 1989.

David E. SMITH et Yoshio MIKAMI, *A History of Japanese Mathematics*, Open Court Publishing Company, Chicago, 1914 (également disponible sur microfilm).

H. FUKAGAWA et D. SOKOLOWSKY, *Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th Centuries*, Science Culture Technology Publishing, Singapour, à paraître.

