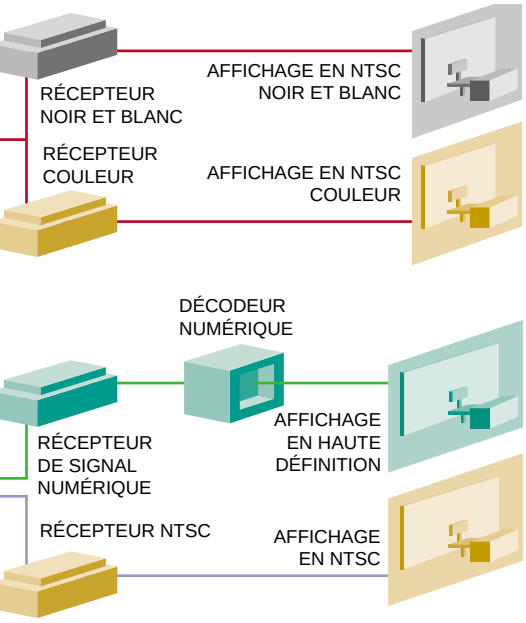


ment transmettre des doublages des films en plusieurs langues.

Le nouveau système numérique entraînera un changement, peut-être plus radical, dans l'utilisation du poste de télévision. Alors que la télévision est aujourd'hui un appareil de loisir, la transmission numérique apportera des données variées, le courrier électronique. Le téléviseur pourra même être utilisé comme visiophone, ou comme moniteur d'ordinateur.

Cette intégration des systèmes a poussé l'industrie informatique à pénétrer dans un domaine dominé jusqu'ici par les chaînes de télévision. Des deux côtés, il reste encore beaucoup de travail, mais la convergence semble inévitable. Cette intégration pourrait finalement modifier l'approche de la télévision bien plus radicalement que l'amélioration de l'image et du son numérique.

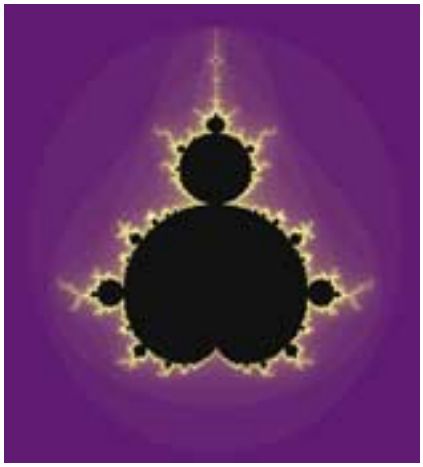
Jae LIM enseigne au département de génie électrique et d'informatique de l'Institut de technologie du Massachusetts.

Jae S. LIM, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice-Hall, 1990.

A.N. NETRAVALI et B.G. HASKELL, *Digital Pictures : Representation, Compression and Standards*, deuxième édition, Plenum Press, 1995.

HDTV and the New Digital Television, numéro spécial de IEEE Spectrum, vol. 32, n° 4, pp. 34-79, avril 1995.

ATSC Digital Television Standard, Advanced Television Systems Commitee, 16 septembre 1995.



Certitudes sans démonstration?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines.

Vous devez calculer l'intégrale de $sin(77x)sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini et, grâce à votre logiciel, vous obtenez la valeur M égale à 7,853981634. Cela ne vous semble pas très satisfaisant, et vous soupçonnez que cette intégrale a une expression simple, laquelle vous permettrait des simplifications quand vous la combinez avec d'autres expressions qui entrent dans votre calcul. Cette valeur est peut-être une fraction p/q avec p et q entiers ; ou une fraction multipliée par $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire quelque chose de la forme $p\sqrt{2}/q$ avec p et q entiers) ; ou une fraction multipliée par π (quelque chose de la forme $\pi \times p/q$) ; ou une fraction multipliée par e (quelque chose de la forme $e \times p/q$). Comment faire pour reconnaître M? Nous verrons que l'inverseur de Simon Plouffe *(voir les encadrés 2 et 4)* répond à la question, et plus encore. Nous allons examiner différentes méthodes d'identification.

ÉNUMÉRATION ET COMPARAISON

La première idée consiste à calculer tous les nombres p/q, $\sqrt{2} \times p/q$, $\pi \times p/q$, $e \times p/q$, puis à rechercher celui qui se rapproche le plus de M. Il existe une infinité de tels nombres et parmi eux certains sont aussi proches qu'on le veut de M. Abordons donc le problème progressivement. Essayons en supposant d'abord que p et q sont tous deux compris entre 1 et 10.

Il faut 100 essais pour comparer M aux nombres de la forme p/q, 100 autres pour ceux de la forme $\sqrt{2} \times p/q$, etc, soit, au total, 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que p et q sont tous deux des entiers compris entre 1 et 100. Cela nécessitera 40 000 essais. Puis, si nécessaire, on passera à l'intervalle de 1 à 1 000, ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de l'intervalle de recherche de 1 à n augmente très rapidement, comme le carré de n.

Dans notre cas, dès la première tentative, avec p et q entre 1 et 10, on découvre que, parmi les 400 nombres essayés pour approcher M, le nombre $5\pi/2$ se trouve situé à un milliardième

1. RAISONNEMENTS HEURISTIQUES

Tous les nombres considérés sont entre 0 et 40. On dispose d'un nombre M qu'on soupçonne être parmi 400 nombres candidats. On compare M aux 400 nombres, on découvre qu'il s'approche de l'un d'eux, $5\pi/2$, de moins 10^{-9} (un milliardième).
Ne doit-on pas considérer comme assuré que M vaut $5\pi/2$?

Raisonnement 1
Si M était choisi au hasard entre 0 et 40, alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à : $400.2.10^{-9} / 40 = 2.10^{-8}$, car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur 2.10^{-9} correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés), ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée inférieure à $400.2.10^{-9}$.
Si M était choisi au hasard, la probabilité de trouver M à moins d'un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à 2.10^{-8}. C'est vraiment très peu, ce n'est donc pas par hasard que cela s'est produit, c'est parce que M vaut $5\pi/2$.

Raisonnement 2 (utilisant la formule de Bayes)
Supposons que nous ayons quelques raisons de considérer que M est l'un des 400 nombres testés (événement noté A) et que plus précisément *a priori* nous évaluions la probabilité de A à 1/10. La probabilité, *a priori*, que M ne soit pas parmi les 400 nombres (événement B) est de 9/10. La formule de Bayes indique comment recalculer cette probabilité après l'expérience conduisant à la découverte que "M est à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres" (événement E).

La nouvelle probabilité pour que M soit l'un des 400 nombres (c'est-à-dire $5\pi/2$) est :
$P_{A'} = P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B)$ où
P_A = probabilité *a priori* de A = 1/10
P_B = probabilité *a priori* de B = 9/10
Q_A = probabilité de E sachant A (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A est vrai) = 1
Q_B = probabilité de E sachant B (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A n'est pas vrai) $= 400.2.10^{-9}/40 = 2\ 10^{-8}$
$P_{A'}$ = probabilité de A sachant E (probabilité *a fortiori* que A soit l'un de 400 nombres, donc $5\ \pi/2$) $= P_A Q_A/(P_A Q_A + P_B Q_B) =$
$P_{A'} = (1/10) / (1/10 + (9/10).(\ 2\ 10^{-8})) = 0,99999982$
La probabilité est passée de 10% à 99,999982 %

En partant de $P_A = 1$ %, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99980$ %.
En partant de $P_A = 0,1$ %, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99802$ %.
Donc même si, au départ, on a très peu de raisons de croire que M est parmi les 400 nombres essayés, une fois le calcul fait on en est quasiment certain.

Notons bien qu'aucun des deux raisonnements n'est totalement justifié, car :
– M n'est pas choisi au hasard (raisonnement 1),
– on ne peut donner aucun sens rigoureux à l'évaluation *a priori* $P_A = 1/10$ (raisonnement 2)
Avec les raisonnements heuristiques, on aboutit à des quasi-certitudes, mais pas à des preuves mathématiques.

de M, alors que les 399 autres nombres sont tous situés à une distance de M plus grande que un dixième (le plus proche est 8/1, situé à 0,15 de M).

N'a-t-on pas une bonne raison de croire que M est exactement $5\pi/2$ et que ce sont les erreurs de calcul et d'arrondi qui expliquent qu'il n'y a pas égalité parfaite? La question est très délicate et constitue le cœur d'une certaine pratique expérimentale des mathématiques. Que $5\pi/2$ ressemble fort à M n'est bien sûr pas une preuve mathématique que les deux nombres sont égaux. Toutefois, on prend peu de risques en acceptant d'identifier les deux nombres, car on raisonne ainsi. Les raisonnements permettant de justifier cette identification sont présentés dans l'encadré 2.

Une variante de la méthode par énumération et comparaison est de prendre M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e, et de multiplier ces quatre nombres par $q = 1, 2, 3, ..., 10$, en regardant à chaque fois si le résultat est un entier (si, par exemple pour q égal à 2, on trouve que $qM/\pi \sim 5$, cela signifie que, vraisemblablement, $M \sim 5\pi/2$).

Si on recherche comme tout à l'heure le nombre M en imposant à p et q d'être entre 1 et 10, cette méthode conduit à faire 43 multiplications (trois au départ, puis 10 pour chaque nombre). Pour p et q entre 1 et 100, il y a 403 multiplications à faire, etc. L'augmentation est plus modérée que précédemment.

Cette seconde méthode est plus efficace : elle aboutit plus rapidement au résultat que vraisemblablement M vaut $5\pi/2$. Bien sûr, on n'obtient, là aussi, qu'une forte présomption.

Une troisième idée consiste à utiliser qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain moment. On pourrait donc tenter de reconnaître la période de M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e. On serait amené à faire quatre multiplications, puis quatre recherches de périodes, ce qui semble encore meilleur que la seconde idée. Malheureusement, la période du développement d'un nombre p/q peut être de longueur q -1. C'est le cas, par exemple, pour p/q avec $0 < p < q$ et q = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193 (il s'agit de ce qu'on appelle les entiers premiers longs). Cela signifie que, si M = 13/109, on ne reconnaîtra la période que si l'on dispose de plus de 109 chiffres (disons 200), ce qui est difficile : la méthode du repérage de période est mauvaise car elle demande trop de chiffres pour aboutir.

La quatrième idée (qui va nous conduire aux techniques les plus modernes de l'identification des constantes) provient d'une méthode ancienne de recherche d'approximations des nombres par des fractions disposées sur de multiples étages, appelées fractions continues, dont les propriétés sont explicitées dans l'encadré 3.

LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

Le développement en fractions continues d'un nombre est une représentation très intéressante de ce nombre (comme le sont les développements décimaux et binaires). Cette représentation fait apparaître sa nature mieux que le développement décimal, car on a les remarquables résultats *(a)* *(b)* et *(c)* indiqués plus bas. Ils ont été prouvés aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles par Huygens, Euler et Lagrange.

(a) Un nombre x est rationnel si et seulement si son développement en fractions continues est fini.

(b) Un nombre x est quadratique, c'est-à-dire de la forme $p/q + \sqrt{r}/s$ avec p, q, r et s entiers (racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels), si et seulement si son développement en fractions continues est périodique à partir d'un certain point.

(c) Certains nombres transcendants (par définition, ils ne sont pas solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) ont un développement en fractions continues qui suit une règle clairement identifiable. Le nombre e qui est transcendant s'écrit ainsi : e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, ...]

Si on tombe sur une fraction continue infinie et non périodique ayant une règle bien claire (c'est le cas de l'exemple précédent), l'utilisation des résultats *(a)* et *(b)* nous donne une très sérieuse raison de croire que le nombre est irrationnel et non quadratique (irrationnel, car ayant une fraction continue infinie ; non quadratique, car ayant une fraction continue non périodique). Le mathématicien qui, par exemple, calculerait les 60 premiers coefficients de la fraction continue de e et verrait tout le long 2 1 2 1 1

2. QUELQUES CONSTANTES MATHÉMATIQUES PARMI LES 75 MILLIONS DE LA TABLE DE SIMON PLOUFFE

Le nombre d'Archimède
π : rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.
= 3,14159265358979323846264338327...
Connu avec une précision de 51 539 600 000 de décimales.
Durée du calcul : 29 heures 3 minutes + 37 heures 8 minutes (pour la vérification).
Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.
Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo
(calculs menés du 6 au 8 juin 1997 et du 4 au 6 juillet 1997).

La racine carrée de deux
V2 = 1,41421356237309504880168872421...
Connu avec une précision de 137 438 953 444 décimales.
Durée du calcul : 7,5 heures. Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.
Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo (3 août 1997).

La constante des logarithmes népériens
$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ... = 2,71828182845904523536028747135...$
Connue avec une précision de 50 000 817 décimales.
Durée du calcul : 714 heures. Machine : HP 9000/778 160 Mhz.
Auteur du calcul : Patrick Demichel (30 septembre 1997).
(un calcul de un milliard de décimales aurait été mené à bien par D. et G. Chudnovsky).

Logarithme de deux
log(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 -... = 0,69314718055994530941723212145 8...
Connu avec une précision de 58 486 400 décimales.
Durée du calcul : 53 heures. Machine : SGI R10000.
Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

Le nombre d'or
F = (1+√5)/2 = 1,61803398874989484820458683436...
Connu avec une précision de 10 000 000 de décimales.
Durée du calcul : 29 minutes. Machine : SGI R10000; 194 Mhz.
Auteur du calcul : Simon Plouffe (2 décembre 1996).

La constante d'Euler-Mascheroni
$\gamma = \lim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log(n) = 0,577215664901...$

Connue avec une précision de 7 286 255 décimales.
Durée du calcul : 47 heures 36 minutes. Machine: SGI R10000.
Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

La constante d'Apéry
$Zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + 1/5^3 + ...$
= 1,20205690315959428539973816151...
Connu avec une précision de 32 000 279 décimales.
Durée du calcul : 35 heures, 21 minutes. Machine: 9x MIPS R10000 180 Mhz.
Auteur du calcul : Sebastian Wedeniwski (17 mars 1998).

3. LES FRACTIONS CONTINUES

Tout nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction à une multitude d'étages, appelée fraction continue :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

a_0, a_1,a_2,... sont des nombres entiers.

Voici comment obtenir à la main la fraction continue de 233 / 177.

On fait une succession de divisions en reprenant pour dividende de la division n le diviseur de la division n – 1, et pour diviseur de la division n le reste de la division n – 1, ce qui conduit à la disposition suivante :

233	177	
177	56	1
56	9	3
9	2	6
2	1	4
0	2	

La première division s'interprète 233/177 = 1 + 56 / 177 = 1 + 1/ (177 / 56).

La seconde donne :

233/177 = 1 + 1/ (177 / 56) = 1 + 1/ (3 + 9 / 56) = 1 + 1/ (3 + 1/(56 / 9))..., etc.

Au total, la fraction continue est : [1, 3, 6, 4, 2]

$$233/177 = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue est finie. En effet :

– si la fraction continue est finie, le nombre est rationnel (on réduit la fraction continue de proche en proche jusqu'à l'avoir sous la forme p/q),

– quand on applique la méthode indiquée ci-dessus, le diviseur de l'étape n est le reste de l'étape n – 1, donc le diviseur diminue strictement à chaque étape, et il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes.

Si un nombre a un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain point, alors il s'écrit sous la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r, et s entiers.

Exemple. Prenons le nombre x = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,...]

Considérons le nombre dont le développement est :

y= [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,...]

Le nombre y vérifie :

y = 4 + 1/(1+ 1/(1 + 1/(1 + 1/y))) = 4 + 1/(1+ 1/(1 + y/(y + 1))) = 4 + 1/(1+ (1+y)/(2y + 1)) = 4 + (2y+1)/(3y+2) = (14y+9)/(3y+2).

$3y^2 + 2y = 14y + 9$

$3y^2 - 12y - 9 = 0$

$y^2 - 4y - 3 = 0$

$y_1 = 2 + \sqrt{7}$

$y_2 = 2 - \sqrt{7}$ (à éliminer car y >4)

d'où $x = y - 2 = \sqrt{7}$

Pour tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique, on peut faire un raisonnement analogue (à chaque fois, après réduction de la fraction, on aboutit à une équation du second degré). Donc tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique est un nombre quadratique (de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$).

Il n'est pas aussi simple de démontrer la réciproque : si un nombre est de la forme $p/q+\sqrt{r/s}$ avec p, q, r et s entiers, alors son développement est périodique à partir d'un certain point. C'est pourtant ce que Lagrange a établi.

Les fractions continues des racines carrées

$\sqrt{2}$ = [1,2,2,2,2,...]
$\sqrt{3}$ = [1,1,2,1,2,1,2,..]
$\sqrt{5}$ = [1,4,4,4,4,4,4,...]
$\sqrt{6}$ = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...]
$\sqrt{7}$ = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, ...]
$\sqrt{8}$ = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...]
$\sqrt{9}$ = [3]
$\sqrt{10}$ = [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ...]
$\sqrt{11}$ = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...]
$\sqrt{12}$ = [3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, ...]
$\sqrt{13}$ = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, ...]
$\sqrt{14}$ = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, ...]

Le nombre d'or

C'est le nombre dont le développement en fraction continue est le plus simple.

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$(1 + \sqrt{5})/2$ = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]

4 1 1 6 1 1 8 1 1 10 1 1 12 jusqu'à 1 1 40 ne pourrait pas croire que cela peut changer plus loin ; il serait donc convaincu que e n'est ni rationnel, ni quadratique... mais n'aurait pas de démonstration.

Cette situation illustre plus nettement encore que notre premier exemple qu'on peut avoir de fortes raisons de croire un certain résultat mathématique, sans en avoir la moindre preuve. En mathématiques, il existe des situations où le bon sens nous commande de croire une certaine vérité que nous sommes pourtant incapable de prouver d'une façon qui satisfasse un mathématicien classique.

L'objectif des mathématiciens expérimentalistes est justement de rechercher des vérités mathématiques par tous les moyens, y compris informatiques, de collecter le plus possible de raisons de croire aux vérités découvertes et, si c'est possible, de les démontrer au sens habituel, qui reste la seule façon d'avoir des certitudes parfaites (personne ne le conteste).

Leur philosophie est qu'il vaut mieux connaître une relation mathématique qu'on ne sait pas prouver, que l'ignorer. Lorsqu'en cryptographie on fabrique des nombres premiers par des méthodes probabilistes (qui ne garantissent pas entièrement que les nombres produits sont premiers) on parle de nombres premiers à usage commercial. Par analogie, on pourrait dire que les mathématiciens expérimentalistes s'intéressent aux vérités mathématiques à usage commercial.

Notons que, contrairement au développement de e ou de racine de 2, le développement en fractions continues du nombre π malheureusement ne présente pas de régularité apparente.

π = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, ...]

QUATRIÈME MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Les fractions continues fournissent la meilleure méthode pour résoudre notre problème d'identification de M : prendre les quatre nombres M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e et calculer leur développement en fractions continues jusqu'à ce qu'un terme soit presque entier (ce qui signifiera qu'on est très proche d'un nombre rationnel).

Ici en s'arrêtant, soit au dixième terme du développement en fractions continues, soit quand on a un entier à 10^{-5} près, on obtient les résultats suivants.

Pour M : [7, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 2, 28, 1, 26] rien n'est trouvé ;

Pour $M/\sqrt{2}$: [5, 1, 1, 4, 6, 9, 1, 2, 1, 2, 5] rien n'est trouvé ;

Pour M/π : [2, 1, 1+1/765855891] ~ [2, 1, 1] = 2+1/(1+1/1) =5/2 ;

Pour M/*e* [2, 1, 8, 28, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 48] rien n'est trouvé.

Le fait numérique que, pour *M*/π, on ait trouvé, à très peu près, la fraction 5/2 nous montre à nouveau que vraisemblablement *M*/π vaut 5/2, c'est-à-dire que *M* vaut 5 πi/2.

Pour s'assurer de la validité de notre méthode (c'est-à-dire pour avoir de meilleures raisons encore de croire que *M* vaut 5π/2), on calcule non plus 10, mais 20 termes des fractions continues (ce qui correspond à des millions d'essais de constantes) ; on trouve cette fois deux candidats pour *M*. Le premier est toujours 5π/2, le second est le nombre rationnel : 3926990817/500000000 (simplification de 7853981634/1000000000 par 2).

Entre les deux candidats, le plus simple est sans hésitation possible 5π/2, c'est lui qu'on retiendra donc si l'on est mis en demeure de choisir sans pouvoir faire de calculs ou de preuves supplémentaires. Remarquons que, concernant l'exemple de départ, les trois méthodes essayées aboutissent au même résultat (ce qui semble le rendre encore plus probable). Un calcul direct de l'intégrale à l'origine du problème est d'ailleurs possible et confirme que l'identification 5Pi/2 est bonne.

Considérons un autre exemple pour illustrer l'idée des fractions continues : *M* = 4,222012200165.

Pour *M* : [4, 4, 1, 1, 58, 4, 2, 2, 37, 3, 1] ; pour *M*/√2 : [2, 1, 67, 1, 1, 3, 1, 14, 1, 26, 5] ; pour *M*/π : [1, 2, 1, 9, 1, 5, 3, 1, 3, 4, 1] ; pour *M*/*e* : [1, 1, 1, 4, 4, 1 1/829123] ~ [1, 1, 1, 4, 4, 1] = 73/47. Cela suggère fortement que *M* = 73 *e* /47 (qui est effectivement l'expression utilisée pour définir *M*).

La méthode des fractions continues va droit au but. Aussi est-elle beaucoup plus puissante que les méthodes envisagées au début, car les nombres quadratiques ont des développements périodiques, et certains nombres transcendants ont des développements en fractions continues simples qu'un œil attentif peut identifier.

L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Aujourd'hui il existe une méthode supplémentaire, bien plus puissante encore et plus commode que celles décrites ci-dessus. Cette méthode est l'inverseur de Simon Plouffe, qui est à la fois un immense dictionnaire de constantes mathématiques et une machine à rechercher des expressions simples pour les constantes numériques qu'on lui soumet.

Alors que d'habitude on donne une expression à une machine pour qu'elle la calcule, l'inverseur, lui, retrouve l'expression à partir du résultat, d'où son nom.

Lorsque vous avez un nombre dont vous connaissez quelques chiffres, vous pouvez le soumettre à l'inverseur de Plouffe en ouvrant la page internet de son site : http://www.lacim.uqam.ca/pi/. Vous pouvez aussi lui soumettre une question par courrier électronique à : numbers@math.uqam.ca. Exemple de question : «lookup 1.4142». L'inverseur, après quelques secondes de calcul, vous renverra sa réponse par courrier électronique.

Si on lui propose une constante *M*, l'inverseur de Plouffe l'examine en mettant en œuvre progressivement des méthodes de recherche de plus en plus complexes et puissantes.

Dans un premier temps, il se contente de comparer votre *M* à une liste de constantes mathématiques qui sont mémorisées dans une grande table. Ensuite, il utilise une série d'algorithmes (dont celui des fractions continues) pour rechercher des combinaisons de ces constantes ou des expressions remarquables vérifiées par le nombre étudié.

4. L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Quand on pose à l'inverseur de Plouffe la question : "Quelle est la constante : 7,853981634 ?" on obtient un extrait de la table. La réponse correcte (5π /2) est une constante tellement basique qu'elle y est représentée plusieurs fois sous des codages différents. On reconnaît π/4qui possède les mêmes chiffres que 5π/2 puisque 5π/2 =10 π/4

7853977541646791 = (p212) S10(1,2)(8,–8,8,2,-9)
7853977611656700 = (a261) –3–2*x+3*x^2+3*x^3–2*x^4–6*x^5
7853978825673085 = (q399) 5/63662
7853979266757639 = (v131) sum(1/(8*n^2–8*n+52),n=1..inf)
7853979538716315 = (m001) (exp(–1/2*Pi)-log(gamma)*ln(1+sr(2)))/ln(1+sr(2))
7853980101855253 = (a311) cos(Pi*1/58)*sin(Pi*17/59)
7853980314963090 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
7853980378630278 = (a334) 21^(1/2)*(12^(1/4)–19)
7853980996271272 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
7853981032645112 = (v131) sum(1/(5/2*n^2+145/2*n–44),n=1..inf)
7853981126778084 = (m001) (1/2–Backhouse*GAM(5/6))/Backhouse
7853981633974126 = (v131) sum(1/(4*n^2–4*n+101),n=1..inf)
7853981633974483 = (a007) Pi/4
7853981633974483 = (m001) Pi*cos(Pi/12)*sin(Pi/12)
7853981633974483 = (m405) 1/4*sr(Pi)^2
7853981633974483 = (p199) S(1,1)[1,1,1,0,-1,1,-1,0]
7853981633974483 = (s207) A003881 Concatenated sequence from EIS
7853981689970672 = (v003) sum(1/(2^n+(29/2*n^2+31/2*n-12)),n=1..inf)
7853981829182755 = (f259) F(7/12,9/10;1/10,2/9,4/7;1)
7853982300884955 = (q399) 355/452
7853982572371080 = (m001) BesK(0,1)+cos(1)^GAM(13/24)
7853982658543988 = (f259) F(7/12,5/8;1/7,4/5,2/3;1)
7853982819699420 = (p212) S10(1,5)(6,5,0,–3,–2)
7853983015535401 = (v003) sum(1/(3^n+(17/2*n^2–25/2*n+28)),n=1..inf)
7853983588391700 = (m001) BesJ(0,1)/BesK(0,1)*exp(–Pi)
7853983588391700 = (m001) BesJ(0,1)/exp(Pi)/BesK(0,1)
7853983685097973 = (m001) exp(1/2)*Zeta(1,2)^GAM(1/12)
7853983963809479 = (p210) sqrt(3)*T_2(0,1,–1,–1,1,1,1,–1,0,0,–1,–1)
7853984493158376 = (v015) sum((19/6*n^3-19*n^2+353/6*n-28)*n!/n^n,n=1..inf)
7853984748948144 = (g404) –Psi(2/15)+Psi(9/14)–Psi(13/20)
7853984752358357 = (m001) (sr(2)+GAM(11/12))^BesI(0,2)
7853984917319985 = (v131) sum(1/(113/2*n^2–173/2*n+47),n=1..inf)

TABLEAU DE MENDELEÏEV

La grande table de constantes, noyau de l'inverseur de Simon Plouffe, peut être vue comme un tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques. Elle tente de réunir tous les nombres réels simples rencontrés en mathématiques, quel qu'en soit le domaine. La table ne contient pas les constantes physiques qui souvent dépendent de choix arbitraires dans les unités de mesure (cela n'empêche pas que de nombreux physiciens utilisent l'inverseur pour mener leurs travaux théoriques).

Les nombres de la table sont stockés avec la plus grande précision possible (tous ne sont pas connus avec le même nombre de décimales, certains sont d'ailleurs très difficiles à calculer).

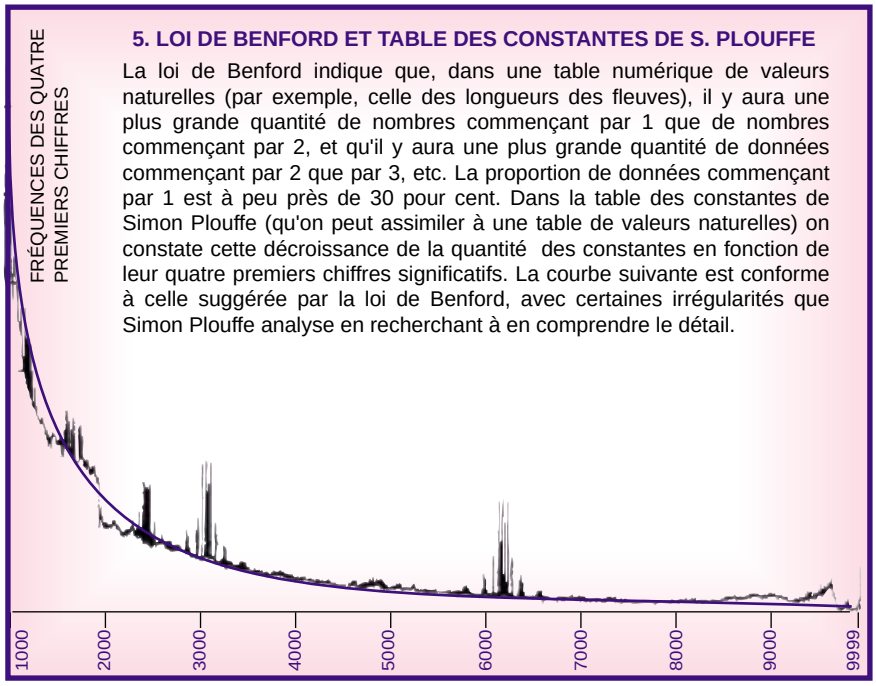
On trouvera bien sûr π, √2, *e*, mais aussi : log(3), exp(π), le nombre d'or, le nombre de Champernowne 0,123456789101112..., la constante d'Artin (qui indique la proportion de nombres premiers longs), la constante de Feigenbaum liée à la théorie du chaos, la somme des $1/n^n$, et mille autres choses. Non, pas mille, bien plus : aujourd'hui, la table contient 75 millions de constantes.

Cela semble beaucoup, pourtant cela résulte d'un choix : il serait trop facile de mettre log(2), log(3), log(4) jusqu'à log(1000000000). L'intérêt de la table provient du fait que tout ce qui y est placé est assez simple. On n'y met pas π^{435256}, pas plus que (log(463052) $\sqrt{2543})^{12}$.

Les calculs des constantes de la table sont vérifiés et complétés en permanence. Des centres de recherche au Canada, aux États Unis ou en France prêtent leurs machines pour ces calculs. Simon Plouffe évalue que plus de deux ans de temps de calculs d'un processeur rapide sont ainsi matérialisés dans sa table. Le volume de la table est de

5. LOI DE BENFORD ET TABLE DES CONSTANTES DE S. PLOUFFE

La loi de Benford indique que, dans une table numérique de valeurs naturelles (par exemple, celle des longueurs des fleuves), il y aura une plus grande quantité de nombres commençant par 1 que de nombres commençant par 2, et qu'il y aura une plus grande quantité de données commençant par 2 que par 3, etc. La proportion de données commençant par 1 est à peu près de 30 pour cent. Dans la table des constantes de Simon Plouffe (qu'on peut assimiler à une table de valeurs naturelles) on constate cette décroissance de la quantité des constantes en fonction de leur quatre premiers chiffres significatifs. La courbe suivante est conforme à celle suggérée par la loi de Benford, avec certaines irrégularités que Simon Plouffe analyse en recherchant à en comprendre le détail.



plusieurs milliards de chiffres, en augmentation constante. Sachant que, dans un livre moyen on met à peu près un million de chiffres on peut en déduire que, si on l'imprimait, l'encyclopédie de Simon Plouffe comporterait plusieurs milliers de tomes. Seule l'informatique permet la consultation et la mise à jour de telles bases de données! Simon Plouffe envisage que, dans l'avenir, sa table pourrait contenir jusqu'à un milliard de constantes de base! (ce qui ferait alors plusieurs centaines de milliards de chiffres).

Si la constante que vous avez indiquée à l'inverseur de Plouffe n'est pas dans sa table, une batterie d'algorithmes se met en marche pour reconnaître votre nombre. Dans un premier temps la recherche de combinaisons simples des constantes les plus fréquentes est tentée. Cette phase est l'équivalent de l'exploration d'une table virtuelle de plusieurs centaines de milliards de constantes. Puis des méthodes de décomposition en fractions continues, en fractions égyptiennes, en produits infinis, etc., sont lancées, ainsi que d'autres méthodes qui généralisent les fractions continues comme l'algorithme PLSQ, dont l'objectif est de trouver des relations complexes impliquant plusieurs constantes. Cet algorithme a déjà permis plusieurs découvertes mathématiques remarquables, dont celle, il y a trois ans, par Simon Plouffe d'une formule nouvelle pour π, qui a conduit à des méthodes de calcul des chiffres binaires indépendamment les uns des autres, et qui est à l'origine du record de plongée dans π par le français Fabrice Bellard en octobre 1997. Ce record nous apprend que le mille milliardième chiffre binaire de Pi est un 1 suivi de 0000111111.

En mars 1998, Robert Munafo, à Malden, dans le Massachusetts, a mené un calcul approché du centre de gravité de l'ensemble de Mandelbrot, représenté en vignette à côté du titre de cet article. L'inverseur de Simon Plouffe a été utilisé, et il a proposé la valeur (log(3) - 1/3) Feig1 où Feig1 est la première constante de Feigenbaum (4,669201609102..). Les constantes des Feigenbaum sont des constantes qu'on rencontre en théorie du chaos et dans l'étude des fractales. Il apparaît donc très vraisemblable que la formule trouvée pour le centre de gravité est juste. Pour en être plus sûr, il faudrait disposer de quelques chiffres supplémentaires dans l'évaluation du centre de gravité. Hélas, ce centre de gravité est très coûteux à évaluer et l'on considère qu'il faudra une dizaine d'années pour disposer de machines donnant un chiffre significatif de plus.

L'EXPÉRIMENTATION MATHÉMATIQUE

Les mathématiques expérimentales qui sont à la base de la conception de l'inverseur de Simon Plouffe ne sont pas totalement nouvelles. L'exemple historique le plus remarquable de cette approche est celui de la série :

$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + ...$,

qui intriguait les mathématiciens au XVIII^{e} siècle. Euler (en compétition sur ce problème avec les Bernoulli), après avoir évalué grossièrement cette somme, reconnut que c'était $\pi^2/6$, ce qui ensuite le guida pour trouver une démonstration du résultat qu'il finit effectivement par obtenir. Gauss, autre géant des mathématiques, précisait aussi que sa façon d'arriver à la vérité mathématique était l'expérimentation systématique.

Aujourd'hui, les moyens informatiques suggèrent de reprendre cette conception empirique des mathématiques. Le développement systématique de cette approche iconoclaste ne fait aucun doute, d'autant que les systèmes de calcul formel (comme *Mathematica* ou *Maple,* qui ne manipulent plus seulement des nombres, mais aussi des formules mathématiques) étendent le champ de l'expérimentation mathématique, et que les démonstrateurs automatiques de théorèmes mécanisent parfois une part du raisonnement, permettant à l'approche expérimentale d'aller encore plus loin que le calcul numérique.

Le monde est mathématique, et certains agencements de ses composants peuvent aussi faire des mathématiques et révéler aux humains des parties de la réalité abstraite qu'ils ne verraient pas sans leur aide.

Les cerveaux humains ne sont plus les seuls microscopes mathématiques. Les vérités mathématiques commerciales (presque certaines, mais non démontrées) produites par les nouveaux outils d'explorations mathématiques seront sans doute de plus en plus nombreuses.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille. La société mathématique de France lui a décerné le prix d'Alembert pour son livre, *Le fascinant nombre* π.

M. BORWEIN et P. B. BORWEIN, *A Dictionnary of Real Numbers ; Wadsworth*, 1990. (Un dictionnaire de constantes, aujourd'hui largement dépassé par la base de nombres de l'inverseur de Simon Plouffe).

C. BREZINSKI, History of Continued Fractions and Padé Approximants. Springer-Verlag, 1991.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre* π, Édition Pour La Science/Belin, 1997. (Pour des détails sur la nouvelle formule de calcul de π découverte par Simon Plouffe.)

G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, First Edition 1938, Fifth Edition 1979. (Pour un exposé mathématique sur les fractions continues.)

F. LE LIONNAIS, *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris, 1983. Un des tout premiers dictionnaires de nombres (mélangeant nombres réels et nombres entiers).

Quelle coïncidence !

IAN STEWART

Les coïncidences sont parfois plus probables qu'il n'y paraît.

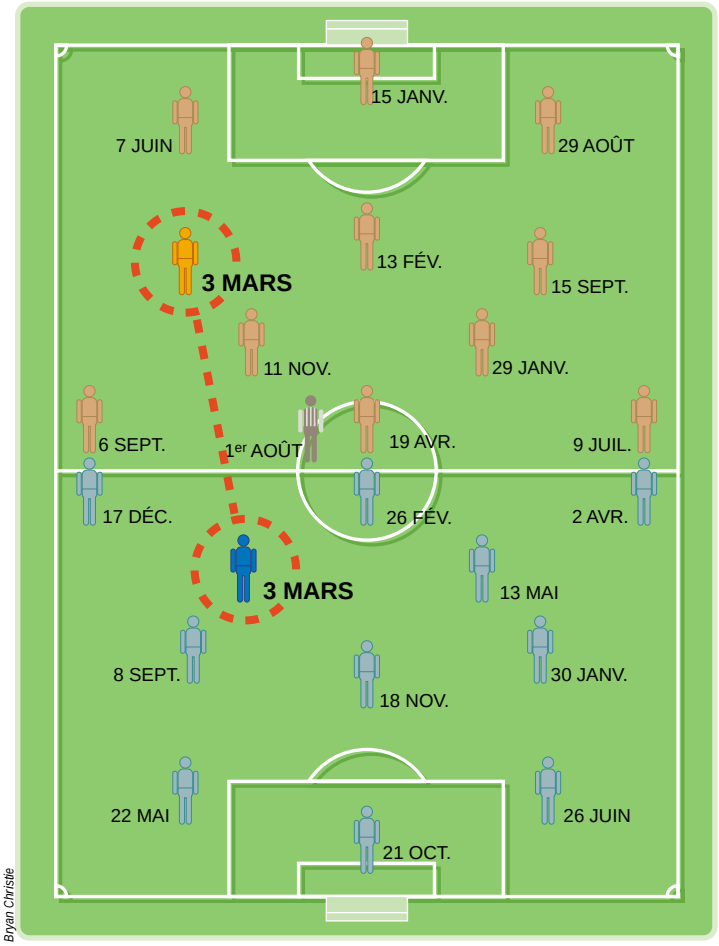
Voilà quelques années, un de mes amis passait sa lune de miel dans un coin perdu d'Irlande. Sa femme et lui marchaient sur une plage déserte lorsqu'ils virent s'approcher deux personnes... qui n'étaient autres que le patron de mon ami et sa femme. Aucun des couples n'avait eu vent des projets de l'autre : leur rencontre était une pure coïncidence.

Si nous sommes si fascinés par les coïncidences, c'est parce que nous avons une piètre intuition des probabilités qui s'y rapportent. Examinons l'une des coïncidences les plus communes : celle des dates d'anniversaire. Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour avoir une probabilité supérieure à un demi que deux d'entre elles au moins aient la même date de naissance ? Pour simplifier, supposons qu'il n'y a pas d'années bissextiles, de sorte qu'il n'y ait que 365 dates d'anniversaire possibles. Supposons également chaque date équiprobable, ce qui n'est pas tout à fait exact : il naît plus d'enfants à certaines époques de l'année qu'à d'autres (on pourrait tenir compte de ces facteurs, mais cela compliquerait le calcul sans modifier les conclusions).

Alors, combien de personnes faut-il dans la pièce ? Cent ? Deux cents ? Mille ? Lorsque des chercheurs posèrent cette question à des étudiants d'Université, la moyenne de leurs estimations fut 385. Valeur excessive à l'évidence, puisque, dès qu'il y a 366 personnes, une coïncidence au moins est garantie d'après le principe des tiroirs (le même, qui stipule que si l'on place trois chemises dans les tiroirs d'un meuble à deux tiroirs, un des tiroirs contient nécessairement plus d'une chemise ; ici les dates sont l'équivalent des tiroirs, et les personnes correspondent aux chemises). En fait, la réponse correcte est bien inférieure : seulement 23 personnes.

Pour ce calcul, il est plus aisé de déterminer la probabilité qu'un événement ne se produise pas. En soustrayant ce nombre à un, on obtient la probabilité que l'événement se produise. Par exemple, quand l'événement «Deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire» n'est-il pas réalisé ? Lorsque toutes les dates sont différentes. Supposons qu'il y ait d'abord une personne dans la pièce et introduisons les autres personnes une à une. Nous pouvons calculer la probabilité qu'une nouvelle personne ait une date d'anniversaire différente de toutes celles des personnes déjà entrées. Ces probabilités décroissent constamment, et celles d'une coïncidence croissent en conséquence. Or, un événement est plus vraisemblable que son contraire si et seulement si sa probabilité est supérieure à 1/2. Dès que la probabilité de dates toutes différentes devient inférieure à 1/2, nous savons que l'existence d'une coïncidence au moins est plus probable que son contraire.

Avec une seule personne, que nous nommerons Arthur, pas de coïncidence possible : la probabilité cherchée est donc égale à un. Voici qu'entre Élise. Son anniversaire peut être l'un des 365 jours de l'année, mais, comme Arthur est né l'un de ces jours, la probabilité d'avoir des dates distinctes est égale à 364/365 (le quotient du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles). Puis arrive Pierre. Il reste 363 dates non prises, d'où la probabilité d'avoir une date distincte des deux autres, qui est de 363/365. La probabilité combinée d'avoir trois dates distinctes est égale au produit (364/365)



Bryan Christie

1. Lors d'un match de football hypothétique, la probabilité que deux des personnes présentes aient leur anniversaire le même jour est supérieure à 1/2.