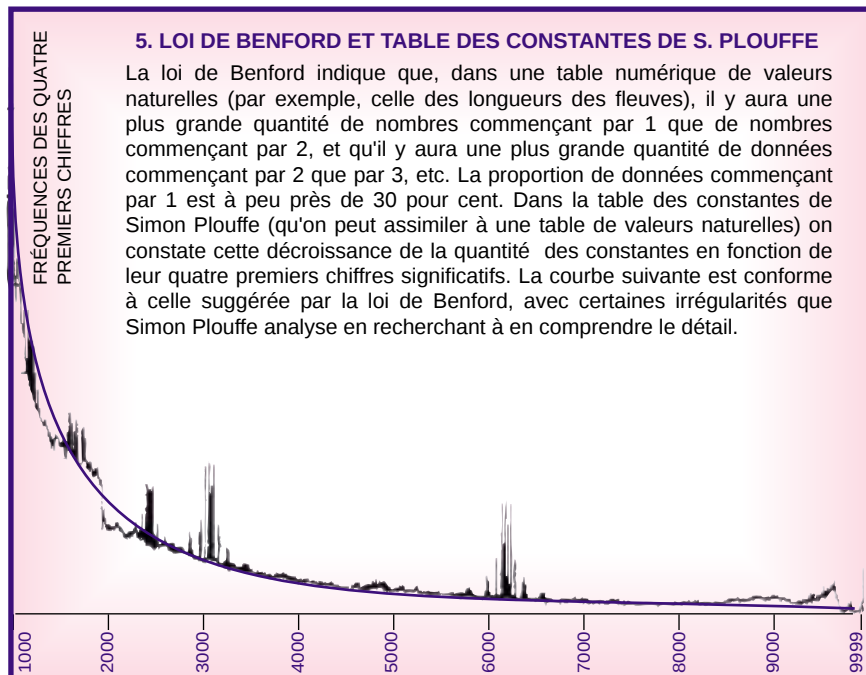


5. LOI DE BENFORD ET TABLE DES CONSTANTES DE S. PLOUFFE

La loi de Benford indique que, dans une table numérique de valeurs naturelles (par exemple, celle des longueurs des fleuves), il y aura une plus grande quantité de nombres commençant par 1 que de nombres commençant par 2, et qu'il y aura une plus grande quantité de données commençant par 2 que par 3, etc. La proportion de données commençant par 1 est à peu près de 30 pour cent. Dans la table des constantes de Simon Plouffe (qu'on peut assimiler à une table de valeurs naturelles) on constate cette décroissance de la quantité des constantes en fonction de leur quatre premiers chiffres significatifs. La courbe suivante est conforme à celle suggérée par la loi de Benford, avec certaines irrégularités que Simon Plouffe analyse en recherchant à en comprendre le détail.



reconnut que c'était $\pi^2/6$, ce qui ensuite le guida pour trouver une démonstration du résultat qu'il finit effectivement par obtenir. Gauss, autre géant des mathématiques, précisait aussi que sa façon d'arriver à la vérité mathématique était l'expérimentation systématique.

Aujourd'hui, les moyens informatiques suggèrent de reprendre cette conception empirique des mathématiques. Le développement systématique de cette approche iconoclaste ne fait aucun doute, d'autant que les systèmes de calcul formel (comme *Mathematica* ou *Maple*, qui ne manipulent plus seulement des nombres, mais aussi des formules mathématiques) étendent le champ de l'expérimentation mathématique, et que les démonstrateurs automatiques de théorèmes mécanisent parfois une part du raisonnement, permettant à l'approche expérimentale d'aller encore plus loin que le calcul numérique.

Le monde est mathématique, et certains agencements de ses composants peuvent aussi faire des mathématiques et révéler aux humains des parties de la réalité abstraite qu'ils ne verraient pas sans leur aide.

Les cerveaux humains ne sont plus les seuls microscopes mathématiques. Les vérités mathématiques commerciales (presque certaines, mais non démontrées) produites par les nouveaux outils d'explorations mathématiques seront sans doute de plus en plus nombreuses.

plusieurs milliards de chiffres, en augmentation constante. Sachant que, dans un livre moyen on met à peu près un million de chiffres on peut en déduire que, si on l'imprimait, l'encyclopédie de Simon Plouffe comporterait plusieurs milliers de tomes. Seule l'informatique permet la consultation et la mise à jour de telles bases de données! Simon Plouffe envisage que, dans l'avenir, sa table pourrait contenir jusqu'à un milliard de constantes de base! (ce qui ferait alors plusieurs centaines de milliards de chiffres).

Si la constante que vous avez indiquée à l'inverseur de Plouffe n'est pas dans sa table, une batterie d'algorithmes se met en marche pour reconnaître votre nombre. Dans un premier temps la recherche de combinaisons simples des constantes les plus fréquentes est tentée. Cette phase est l'équivalent de l'exploration d'une table virtuelle de plusieurs centaines de milliards de constantes. Puis des méthodes de décomposition en fractions continues, en fractions égyptiennes, en produits infinis, etc., sont lancées, ainsi que d'autres méthodes qui généralisent les fractions continues comme l'algorithme PLSQ, dont l'objectif est de trouver des relations complexes impliquant plusieurs constantes. Cet algorithme a déjà permis plusieurs découvertes mathématiques remarquables, dont celle, il y a trois ans, par Simon Plouffe d'une formule nouvelle pour π , qui a conduit à des méthodes de calcul des chiffres binaires indépendamment les uns des autres, et qui est à l'origine du record de plongée dans π par le fran-

çais Fabrice Bellard en octobre 1997. Ce record nous apprend que le mille milliardième chiffre binaire de π est un 1 suivi de 000011111.

En mars 1998, Robert Munafo, à Malden, dans le Massachusetts, a mené un calcul approché du centre de gravité de l'ensemble de Mandelbrot, représenté en vignette à côté du titre de cet article. L'inverseur de Simon Plouffe a été utilisé, et il a proposé la valeur $(\log(3) - 1/3)$ Feig1 où Feig1 est la première constante de Feigenbaum (4,669201609102...). Les constantes des Feigenbaum sont des constantes qu'on rencontre en théorie du chaos et dans l'étude des fractales. Il apparaît donc très vraisemblable que la formule trouvée pour le centre de gravité est juste. Pour en être plus sûr, il faudrait disposer de quelques chiffres supplémentaires dans l'évaluation du centre de gravité. Hélas, ce centre de gravité est très coûteux à évaluer et l'on considère qu'il faudra une dizaine d'années pour disposer de machines donnant un chiffre significatif de plus.

L'EXPÉRIMENTATION MATHÉMATIQUE

Les mathématiques expérimentales qui sont à la base de la conception de l'inverseur de Simon Plouffe ne sont pas totalement nouvelles. L'exemple historique le plus remarquable de cette approche est celui de la série :

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

qui intriguait les mathématiciens au XVIII^e siècle. Euler (en compétition sur ce problème avec les Bernoulli), après avoir évalué grossièrement cette somme,

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille. La société mathématique de France lui a décerné le prix d'Alembert pour son livre, *Le fascinant nombre π* .

M. BORWEIN et P. B. BORWEIN, *A Dictionary of Real Numbers*; Wadsworth, 1990. (Un dictionnaire de constantes, aujourd'hui largement dépassé par la base de nombres de l'inverseur de Simon Plouffe).

C. BREZINSKI, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer-Verlag, 1991.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Édition Pour La Science/Belin, 1997. (Pour des détails sur la nouvelle formule de calcul de π découverte par Simon Plouffe.)

G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, First Edition 1938, Fifth Edition 1979. (Pour un exposé mathématique sur les fractions continues.)

F. LE LIONNAIS, *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris, 1983. Un des tout premiers dictionnaires de nombres (mélangeant nombres réels et nombres entiers).



Quelle coïncidence !

IAN STEWART

Les coïncidences sont parfois plus probables qu'il n'y paraît.

Voilà quelques années, un de mes amis passait sa lune de miel dans un coin perdu d'Irlande. Sa femme et lui marchaient sur une plage déserte lorsqu'ils virent s'approcher deux personnes... qui n'étaient autres que le patron de mon ami et sa femme. Aucun des couples n'avait eu vent des projets de l'autre : leur rencontre était une pure coïncidence.

Si nous sommes si fascinés par les coïncidences, c'est parce que nous avons une piètre intuition des probabilités qui s'y rapportent. Examinons l'une des coïncidences les plus communes : celle des dates d'anniversaire. Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour avoir une probabilité supérieure à un demi que deux d'entre elles au moins aient la même date de naissance ? Pour simplifier, supposons qu'il n'y ait pas d'années bissextiles, de sorte qu'il n'y ait que 365 dates d'anniversaire possibles. Supposons également chaque date équiprobable, ce qui n'est pas tout à fait exact : il naît plus d'enfants à certaines époques de l'année qu'à d'autres (on pourrait tenir compte de ces facteurs, mais cela compliquerait le calcul sans modifier les conclusions).

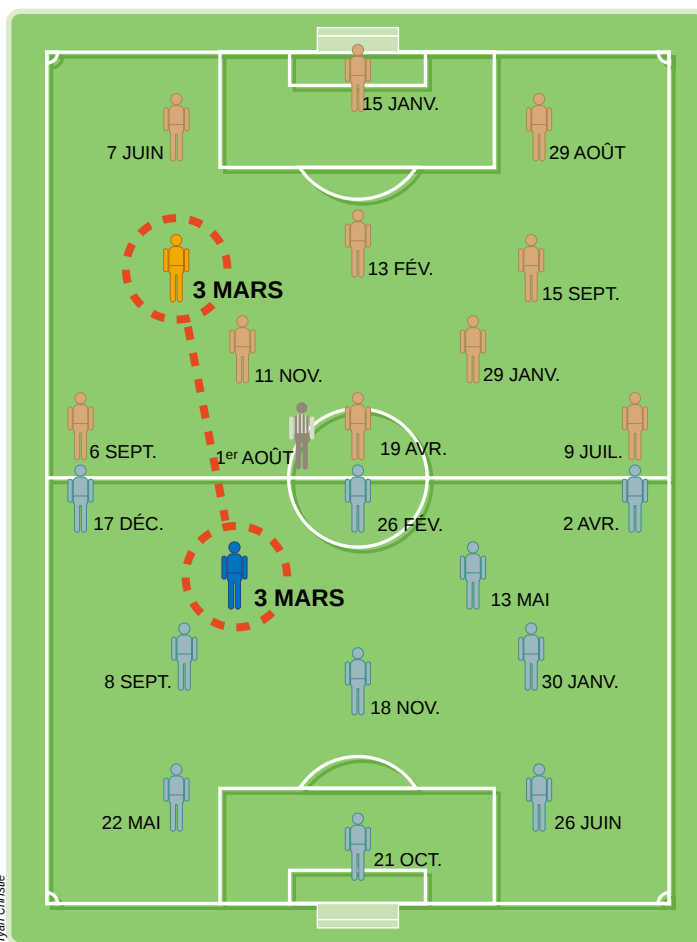
Alors, combien de personnes faut-il dans la pièce ? Cent ? Deux cents ? Mille ? Lorsque des chercheurs posèrent cette question à des étudiants d'Université, la moyenne de leurs estimations fut 385. Valeur excessive à l'évidence, puisque, dès qu'il y a 366 personnes,

une coïncidence au moins est garantie d'après le principe des tiroirs (le même, qui stipule que si l'on place trois chemises dans les tiroirs d'un meuble à deux tiroirs, un des tiroirs contient nécessairement plus d'une chemise ; ici les dates sont l'équivalent des tiroirs, et les personnes correspondent aux chemises). En fait, la réponse correcte est bien inférieure : seulement 23 personnes.

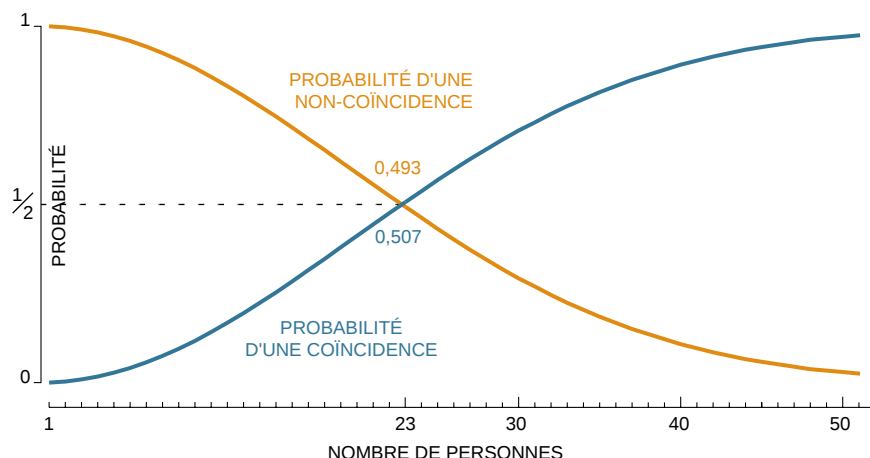
Pour ce calcul, il est plus aisé de déterminer la probabilité qu'un évé-

ment ne se produise pas. En soustrayant ce nombre à un, on obtient la probabilité que l'événement se produise. Par exemple, quand l'événement « Deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire » n'est-il pas réalisé ? Lorsque toutes les dates sont différentes. Supposons qu'il y ait d'abord une personne dans la pièce et introduisons les autres personnes une à une. Nous pouvons calculer la probabilité qu'une nouvelle personne ait une date d'anniversaire différente de toutes celles des personnes déjà entrées. Ces probabilités décroissent constamment, et celles d'une coïncidence croissent en conséquence. Or, un événement est plus vraisemblable que son contraire si et seulement si sa probabilité est supérieure à 1/2. Dès que la probabilité de dates toutes différentes devient inférieure à 1/2, nous savons que l'existence d'une coïncidence au moins est plus probable que son contraire.

Avec une seule personne, que nous nommerons Arthur, pas de coïncidence possible : la probabilité cherchée est donc égale à un. Voici qu'entre Élise. Son anniversaire peut être l'un des 365 jours de l'année, mais, comme Arthur est né l'un de ces jours, la probabilité d'avoir des dates distinctes est égale à $364/365$ (le quotient du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles). Puis arrive Pierre. Il reste 363 dates non prises, d'où la probabilité d'avoir une date distincte des deux autres, qui est de $363/365$. La probabilité combinée d'avoir trois dates distinctes est égale au produit $(364/365)$



1. Lors d'un match de football hypothétique, la probabilité que deux des personnes présentes aient leur anniversaire le même jour est supérieure à 1/2.



2. La probabilité que deux dates de naissance soient identiques (au moins) est supérieure à $1/2$ dès que 23 personnes sont présentes. Elle augmente rapidement et atteint 0,9 avec 40 personnes.

$\times (363/365)$ (de la même façon que la probabilité d'obtenir deux face de suite, à pile ou face, est égale à $1/2 \times 1/2$).

Nous voyons apparaître la formule générale. Lorsque Catherine entre dans la pièce, la probabilité d'avoir quatre dates distinctes est égale à :

$$(364/365) \times (363/365) \times (362/365).$$

Plus généralement, lorsqu'il y a n personnes dans la pièce, la probabilité d'avoir n dates différentes est :

$$(364/365) \times (363/365) \times \dots \times ((365 - n + 1)/365).$$

Il nous suffit donc de calculer les valeurs successives de cette expression pour savoir à partir de quel n elle devient inférieure à $1/2$. Vingt-deux personnes ont une probabilité de 0,524 d'avoir des dates de naissance toutes distinctes, et ce résultat descend à 0,493 pour 23 personnes. Donc, dès que 23 personnes sont rassemblées, la probabilité d'une coïncidence au moins est $1 - 0,493$, soit 0,507 : l'événement est légèrement plus probable que son contraire.

Testez ce résultat dans des rassemblements de plus de 23 personnes en prenant des paris : à la longue, vous gagnerez. Plus il y aura de monde, plus vite vous gagnerez. La plupart des participants jugeront qu'une coïncidence est improbable, parce qu'ils se focaliseront sur un aspect trompeur du problème : le nombre de personnes dans la pièce. Bien que 23 soit petit, il existe pour 23 personnes, 253 manières de les associer par paires (pour n , il y en a $n(n-1)/2$). Ce grand nombre est révélateur de la probabilité d'une coïncidence.

Robert Matthews, un journaliste britannique et mathématicien, et Fiona Stones ont vérifié ce résultat d'une manière expérimentale. Dans un match de football, il y a 23 personnes sur le

terrain : les deux équipes de 11 joueurs et l'arbitre. Donc, l'événement «deux joueurs au moins ont la même date d'anniversaire» est plus probable que son contraire. Ils se sont intéressés aux matchs de première division du Royaume-Uni joués le 19 avril 1997. Sur dix rencontres, six étaient avec coïncidences, et quatre sans.

En fait, dans deux des matchs, il y avait deux coïncidences ! Dans celui opposant Liverpool à Manchester United, deux joueurs étaient nés le 21 janvier et deux le 1^{er} août ; entre Chelsea et Leicester City les coïncidences étaient le 1^{er} novembre et le 22 décembre. Cette double coïncidence est également prédite par la théorie des probabilités. Elle évalue la probabilité d'avoir deux coïncidences parmi 23 personnes à 0,111... : l'événement se produit donc en moyenne tous les neuf matchs de football. La probabilité d'avoir trois coïncidences parmi 23 personnes est égale 0,018..., et celle d'avoir une coïncidence triple (trois personnes parmi les 23 ont la même date de naissance) est égale 0,007... : on l'observe une fois sur 143 rencontres en moyenne. Amusez-vous à vérifier ces valeurs avec les matchs de la Coupe du monde.

INTUITION, INTUITION...

Une question légèrement différente à présent : combien de personnes en plus de vous-même doivent être dans la pièce pour que l'événement «une personne au moins a votre date de naissance» soit plus probable que son contraire ? On pourrait croire que la réponse est $(364/2) + 1$, soit 183, puis qu'il y a 364 dates différentes de la vôtre et que, si plus de la moitié de ce nombre de personnes se trouve dans la salle, vous avez plus d'une chance sur deux

de partager votre date de naissance avec l'une d'elles. Mais la réponse correcte est 253.

Pour obtenir ce nombre, reprenons la technique déjà utilisée : on cherche la probabilité que les dates d'anniversaire soient différentes de la vôtre, puis l'on soustrait ce nombre à un. Vous êtes déjà dans la pièce et les autres personnes se présentent l'une après l'autre : Arthur, Élise, Pierre, Catherine, etc. La probabilité qu'Arthur ait une date de naissance différente de la vôtre est $364/365$. La probabilité qu'Élise ait une date de naissance différente de la vôtre est encore $364/365$. Il en est de même pour tous les autres. Nous nous désintéressons ici des coïncidences entre dates de naissance de personnes autres que vous, par exemple si Arthur et Élise sont nés le 3 avril. Seul compte si une date de naissance est la même que la vôtre, de sorte que, après l'entrée de n personnes, la probabilité pour qu'elles aient toutes des dates différentes de la vôtre est égale à $(364/365)^n$. La première valeur de n pour laquelle cette expression est inférieure à $1/2$ est 253 ($(364/365)^{253} = 0,499...$).

Incidemment, le fait que cette réponse soit égale au nombre de paires dans le premier problème (avec 23 personnes) semble n'avoir aucune signification mathématique. Une coïncidence donc !

Que nous enseignent ces calculs de probabilité ? D'abord ils nous engagent à ne pas être impressionné outre mesure par des événements qui semblent improbables : ils ne le sont peut-être pas. Une paire de footballeurs ayant la même date d'anniversaire seront probablement surpris de la coïncidence, mais tout match a plus d'une chance sur deux d'en posséder une. Les joueurs se souviendront probablement de cette coïncidence pendant des années, mais les 252 autres paires de joueurs ne s'étonneront pas que leurs dates de naissance ne coïncident pas, car nous remarquons les coïncidences et ignorons les non-coïncidences, et faisons de la sorte paraître les premières plus importantes qu'elles ne le sont en réalité.

La rencontre de mon ami durant sa lune de miel paraît moins surprenante si l'on songe au nombre de couples qu'il a rencontrés durant sa vie et qui n'étaient pas son patron et son épouse.

Robert MATTHEWS et Fiona STONES, *Teaching Statistics*, printemps 1998.

Martin GARDNER, *La magie des paradoxes*, Bibliothèque Pour la Science, 1997.

Henri BROCH, *Le paranormal*, Seuil (Poche), 1989.

Rater n'est pas fausser

Une pièce de monnaie mal frappée, anormalement lourde ou légère, ou encore mal sertie si elle a plusieurs éléments, est probablement faussée. Aujourd'hui, la valeur nominale d'une pièce est supérieure à celle du métal qu'elle contient : son cours est garanti par l'État. Ainsi, le coût de fabrication d'une pièce de dix francs est aujourd'hui de 0,996 franc seulement, celui d'une pièce d'un franc de 0,742 franc. Paradoxalement, celui d'une pièce de 50 centimes est de 0,551 franc. Comme pour les billets de banque, seule la qualité de fabrication d'une pièce en certifie la provenance, donc la valeur.

La pièce dont les deux faces sont présentées ici en couleur, un statère averne (mal) frappé en Gaule au II^e siècle avant notre ère, n'est pas faussée : elle a circulé comme celle, mieux fabriquée, qui est présentée en noir et blanc, et elle avait la même valeur. Les motifs portés par ces pièces, une tête ornée d'une couronne de laurier et un cheval accompagné d'une amphore, imitent ceux du statère macédonien frappé par Philippe II, père d'Alexandre le Grand, et utilisé dans tout le monde méditerranéen aux III^e et II^e siècles avant notre ère. Plus généralement, pendant toute l'Antiquité, les pièces mal frappées, très nombreuses, valaient autant que les autres : leur cours était celui du métal qu'elles contenaient.

Comment fabriquait-on les pièces ? On coulait d'abord des rondelles de métal de la taille souhaitée, nommées flans, dans des moules en terre. Puis l'on déposait chaque flan, chauffé au rouge, sur une matrice enchâssée dans une enclume et qui portait en creux l'empreinte de l'une des faces de la pièce. Le monnayeur posait sur le dessus un tampon portant, en creux, l'autre face, et frappait d'un grand coup de marteau.

Le flan n'était pas toujours posé exactement au centre de la matrice, ni le tampon au centre du flan : l'empreinte s'imprimait alors seulement en partie. Le flan pouvait aussi se fendre sous le coup de marteau, ou son diamètre varier légèrement.



Errare humanum est, exposition au Musée d'archéologie du Jura à Lons-le-Saunier, jusqu'au 13 septembre 1998.

Musée national suisse, Zurich