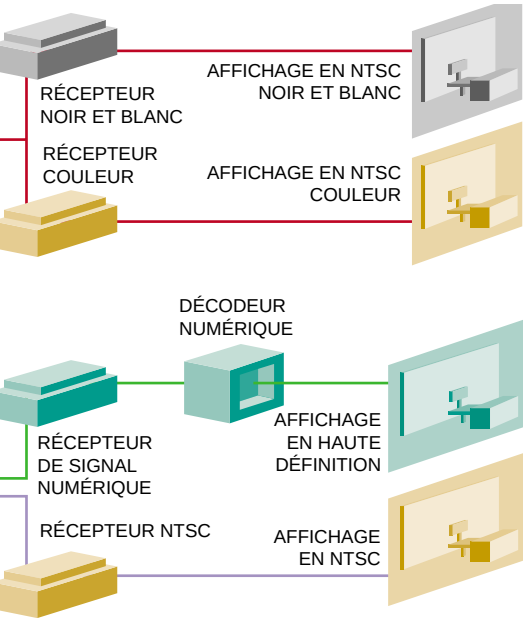


ment transmettre des doublages des films en plusieurs langues.

Le nouveau système numérique entraînera un changement, peut-être plus radical, dans l'utilisation du poste de télévision. Alors que la télévision est aujourd'hui un appareil de loisir, la transmission numérique apportera des données variées, le courrier électronique. Le téléviseur pourra même être utilisé comme visiophone, ou comme moniteur d'ordinateur.

Cette intégration des systèmes a poussé l'industrie informatique à pénétrer dans un domaine dominé jusqu'ici par les chaînes de télévision. Des deux côtés, il reste encore beaucoup de travail, mais la convergence semble inévitable. Cette intégration pourrait finalement modifier l'approche de la télévision bien plus radicalement que l'amélioration de l'image et du son numérique.

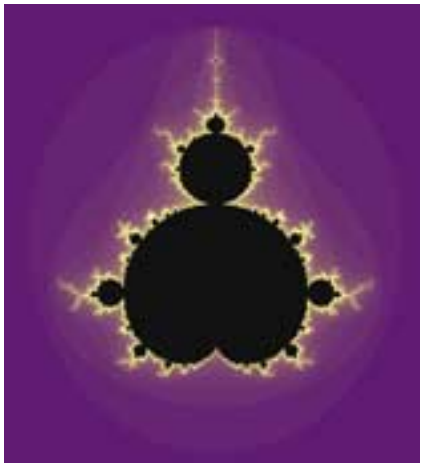
Jae LIM enseigne au département de génie électrique et d'informatique de l'Institut de technologie du Massachusetts.

Jae S. LIM, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice-Hall, 1990.

A.N. NETRAVALI et B.G. HASKELL, *Digital Pictures : Representation, Compression and Standards*, deuxième édition, Plenum Press, 1995.

HDTV and the New Digital Television, numéro spécial de IEEE Spectrum, vol. 32, n° 4, pp. 34-79, avril 1995.

ATSC Digital Television Standard, Advanced Television Systems Commitee, 16 septembre 1995.



Certitudes sans démonstration?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines.

Vous devez calculer l'intégrale de $sin(77x)sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini et, grâce à votre logiciel, vous obtenez la valeur M égale à 7,853981634. Cela ne vous semble pas très satisfaisant, et vous soupçonnez que cette intégrale a une expression simple, laquelle vous permettrait des simplifications quand vous la combinez avec d'autres expressions qui entrent dans votre calcul. Cette valeur est peut-être une fraction p/q avec p et q entiers ; ou une fraction multipliée par $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire quelque chose de la forme $p\sqrt{2}/q$ avec p et q entiers) ; ou une fraction multipliée par π (quelque chose de la forme $\pi \times p/q$) ; ou une fraction multipliée par e (quelque chose de la forme $e \times p/q$). Comment faire pour reconnaître M? Nous verrons que l'inverseur de Simon Plouffe *(voir les encadrés 2 et 4)* répond à la question, et plus encore. Nous allons examiner différentes méthodes d'identification.

ÉNUMÉRATION ET COMPARAISON

La première idée consiste à calculer tous les nombres p/q, $\sqrt{2} \times p/q$, $\pi \times p/q$, $e \times p/q$, puis à rechercher celui qui se rapproche le plus de M. Il existe une infinité de tels nombres et parmi eux certains sont aussi proches qu'on le veut de M. Abordons donc le problème progressivement. Essayons en supposant d'abord que p et q sont tous deux compris entre 1 et 10.

Il faut 100 essais pour comparer M aux nombres de la forme p/q, 100 autres pour ceux de la forme $\sqrt{2} \times p/q$, etc, soit, au total, 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que p et q sont tous deux des entiers compris entre 1 et 100. Cela nécessitera 40 000 essais. Puis, si nécessaire, on passera à l'intervalle de 1 à 1 000, ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de l'intervalle de recherche de 1 à n augmente très rapidement, comme le carré de n.

Dans notre cas, dès la première tentative, avec p et q entre 1 et 10, on découvre que, parmi les 400 nombres essayés pour approcher M, le nombre $5\pi/2$ se trouve situé à un milliardième

1. RAISONNEMENTS HEURISTIQUES

Tous les nombres considérés sont entre 0 et 40. On dispose d'un nombre M qu'on soupçonne être parmi 400 nombres candidats. On compare M aux 400 nombres, on découvre qu'il s'approche de l'un d'eux, $5\pi/2$, de moins 10^{-9} (un milliardième).
Ne doit-on pas considérer comme assuré que M vaut $5\pi/2$?

Raisonnement 1
Si M était choisi au hasard entre 0 et 40, alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à : $400.2.10^{-9} / 40 = 2.10^{-8}$, car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur 2.10^{-9} correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés), ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée inférieure à $400.2.10^{-9}$.
Si M était choisi au hasard, la probabilité de trouver M à moins d'un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à 2.10^{-8}. C'est vraiment très peu, ce n'est donc pas par hasard que cela s'est produit, c'est parce que M vaut $5\pi/2$.

Raisonnement 2 (utilisant la formule de Bayes)
Supposons que nous ayons quelques raisons de considérer que M est l'un des 400 nombres testés (événement noté A) et que plus précisément *a priori* nous évaluions la probabilité de A à 1/10. La probabilité, *a priori*, que M ne soit pas parmi les 400 nombres (événement B) est de 9/10. La formule de Bayes indique comment recalculer cette probabilité après l'expérience conduisant à la découverte que "M est à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres" (événement E).

La nouvelle probabilité pour que M soit l'un des 400 nombres (c'est-à-dire $5\pi/2$) est :
$P_{A'} = P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B)$ où
P_A = probabilité *a priori* de A = 1/10
P_B = probabilité *a priori* de B = 9/10
Q_A = probabilité de E sachant A (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A est vrai) = 1
Q_B = probabilité de E sachant B (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A n'est pas vrai) $= 400.2.10^{-9}/40 = 2\ 10^{-8}$
$P_{A'}$ = probabilité de A sachant E (probabilité *a fortiori* que A soit l'un de 400 nombres, donc $5\ \pi/2$) $= P_A Q_A/(P_A Q_A + P_B Q_B) =$
$P_{A'} = (1/10) / (1/10 + (9/10).(\ 2\ 10^{-8})) = 0,99999982$
La probabilité est passée de 10% à 99,999982 %

En partant de $P_A = 1$ %, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99980$ %.
En partant de $P_A = 0,1$ %, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99802$ %.
Donc même si, au départ, on a très peu de raisons de croire que M est parmi les 400 nombres essayés, une fois le calcul fait on en est quasiment certain.

Notons bien qu'aucun des deux raisonnements n'est totalement justifié, car :
– M n'est pas choisi au hasard (raisonnement 1),
– on ne peut donner aucun sens rigoureux à l'évaluation *a priori* $P_A = 1/10$ (raisonnement 2)
Avec les raisonnements heuristiques, on aboutit à des quasi-certitudes, mais pas à des preuves mathématiques.

de M, alors que les 399 autres nombres sont tous situés à une distance de M plus grande que un dixième (le plus proche est 8/1, situé à 0,15 de M).

N'a-t-on pas une bonne raison de croire que M est exactement $5\pi/2$ et que ce sont les erreurs de calcul et d'arrondi qui expliquent qu'il n'y a pas égalité parfaite? La question est très délicate et constitue le cœur d'une certaine pratique expérimentale des mathématiques. Que $5\pi/2$ ressemble fort à M n'est bien sûr pas une preuve mathématique que les deux nombres sont égaux. Toutefois, on prend peu de risques en acceptant d'identifier les deux nombres, car on raisonne ainsi. Les raisonnements permettant de justifier cette identification sont présentés dans l'encadré 2.

Une variante de la méthode par énumération et comparaison est de prendre M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e, et de multiplier ces quatre nombres par $q = 1, 2, 3, ..., 10$, en regardant à chaque fois si le résultat est un entier (si, par exemple pour q égal à 2, on trouve que $qM/\pi \sim 5$, cela signifie que, vraisemblablement, $M \sim 5\pi/2$).

Si on recherche comme tout à l'heure le nombre M en imposant à p et q d'être entre 1 et 10, cette méthode conduit à faire 43 multiplications (trois au départ, puis 10 pour chaque nombre). Pour p et q entre 1 et 100, il y a 403 multiplications à faire, etc. L'augmentation est plus modérée que précédemment.

Cette seconde méthode est plus efficace : elle aboutit plus rapidement au résultat que vraisemblablement M vaut $5\pi/2$. Bien sûr, on n'obtient, là aussi, qu'une forte présomption.

Une troisième idée consiste à utiliser qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain moment. On pourrait donc tenter de reconnaître la période de M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e. On serait amené à faire quatre multiplications, puis quatre recherches de périodes, ce qui semble encore meilleur que la seconde idée. Malheureusement, la période du développement d'un nombre p/q peut être de longueur q -1. C'est le cas, par exemple, pour p/q avec $0 < p < q$ et q = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193 (il s'agit de ce qu'on appelle les entiers premiers longs). Cela signifie que, si M = 13/109, on ne reconnaîtra la période que si l'on dispose de plus de 109 chiffres (disons 200), ce qui est difficile : la méthode du repérage de période est mauvaise car elle demande trop de chiffres pour aboutir.

La quatrième idée (qui va nous conduire aux techniques les plus modernes de l'identification des constantes) provient d'une méthode ancienne de recherche d'approximations des nombres par des fractions disposées sur de multiples étages, appelées fractions continues, dont les propriétés sont explicitées dans l'encadré 3.

LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

Le développement en fractions continues d'un nombre est une représentation très intéressante de ce nombre (comme le sont les développements décimaux et binaires). Cette représentation fait apparaître sa nature mieux que le développement décimal, car on a les remarquables résultats *(a)* *(b)* et *(c)* indiqués plus bas. Ils ont été prouvés aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles par Huygens, Euler et Lagrange.

(a) Un nombre x est rationnel si et seulement si son développement en fractions continues est fini.

(b) Un nombre x est quadratique, c'est-à-dire de la forme $p/q + \sqrt{r}/s$ avec p, q, r et s entiers (racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels), si et seulement si son développement en fractions continues est périodique à partir d'un certain point.

(c) Certains nombres transcendants (par définition, ils ne sont pas solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) ont un développement en fractions continues qui suit une règle clairement identifiable. Le nombre e qui est transcendant s'écrit ainsi : e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, ...]

Si on tombe sur une fraction continue infinie et non périodique ayant une règle bien claire (c'est le cas de l'exemple précédent), l'utilisation des résultats *(a)* et *(b)* nous donne une très sérieuse raison de croire que le nombre est irrationnel et non quadratique (irrationnel, car ayant une fraction continue infinie ; non quadratique, car ayant une fraction continue non périodique). Le mathématicien qui, par exemple, calculerait les 60 premiers coefficients de la fraction continue de e et verrait tout le long 2 1 2 1 1

2. QUELQUES CONSTANTES MATHÉMATIQUES PARMI LES 75 MILLIONS DE LA TABLE DE SIMON PLOUFFE

Le nombre d'Archimède
π : rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.
= 3,14159265358979323846264338327...
Connu avec une précision de 51 539 600 000 de décimales.
Durée du calcul : 29 heures 3 minutes + 37 heures 8 minutes (pour la vérification).
Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.
Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo
(calculs menés du 6 au 8 juin 1997 et du 4 au 6 juillet 1997).

La racine carrée de deux
V2 = 1,41421356237309504880168872421...
Connu avec une précision de 137 438 953 444 décimales.
Durée du calcul : 7,5 heures. Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.
Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo (3 août 1997).

La constante des logarithmes népériens
$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ... = 2,71828182845904523536028747135...$
Connue avec une précision de 50 000 817 décimales.
Durée du calcul : 714 heures. Machine : HP 9000/778 160 Mhz.
Auteur du calcul : Patrick Demichel (30 septembre 1997).
(un calcul de un milliard de décimales aurait été mené à bien par D. et G. Chudnovsky).

Logarithme de deux
log(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 -... = 0,69314718055994530941723212145 8...
Connu avec une précision de 58 486 400 décimales.
Durée du calcul : 53 heures. Machine : SGI R10000.
Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

Le nombre d'or
F = (1+√5)/2 = 1,61803398874989484820458683436...
Connu avec une précision de 10 000 000 de décimales.
Durée du calcul : 29 minutes. Machine : SGI R10000; 194 Mhz.
Auteur du calcul : Simon Plouffe (2 décembre 1996).

La constante d'Euler-Mascheroni
$\gamma = \lim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log(n) = 0,577215664901...$

Connue avec une précision de 7 286 255 décimales.
Durée du calcul : 47 heures 36 minutes. Machine: SGI R10000.
Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

La constante d'Apéry
$Zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + 1/5^3 + ...$
= 1,20205690315959428539973816151...
Connu avec une précision de 32 000 279 décimales.
Durée du calcul : 35 heures, 21 minutes. Machine: 9x MIPS R10000 180 Mhz.
Auteur du calcul : Sebastian Wedeniwski (17 mars 1998).

3. LES FRACTIONS CONTINUES

Tout nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction à une multitude d'étages, appelée fraction continue :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

a_0, a_1,a_2,... sont des nombres entiers.

Voici comment obtenir à la main la fraction continue de 233 / 177.

On fait une succession de divisions en reprenant pour dividende de la division n le diviseur de la division n – 1, et pour diviseur de la division n le reste de la division n – 1, ce qui conduit à la disposition suivante :

233	177	
177	56	1
56	9	3
9	2	6
2	1	4
0	2	

La première division s'interprète 233/177 = 1 + 56 / 177 = 1 + 1/ (177 / 56).

La seconde donne :

233/177 = 1 + 1/ (177 / 56) = 1 + 1/ (3 + 9 / 56) = 1 + 1/ (3 + 1/(56 / 9))..., etc.

Au total, la fraction continue est : [1, 3, 6, 4, 2]

$$233/177 = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue est finie. En effet :

– si la fraction continue est finie, le nombre est rationnel (on réduit la fraction continue de proche en proche jusqu'à l'avoir sous la forme p/q),

– quand on applique la méthode indiquée ci-dessus, le diviseur de l'étape n est le reste de l'étape n – 1, donc le diviseur diminue strictement à chaque étape, et il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes.

Si un nombre a un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain point, alors il s'écrit sous la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r, et s entiers.

Exemple. Prenons le nombre x = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,...]

Considérons le nombre dont le développement est :

y= [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,...]

Le nombre y vérifie :

y = 4 + 1/(1+ 1/(1 + 1/(1 + 1/y))) = 4 + 1/(1+ 1/(1 + y/(y + 1))) = 4 + 1/(1+ (1+y)/(2y + 1)) = 4 + (2y+1)/(3y+2) = (14y+9)/(3y+2).

$3y^2 + 2y = 14y + 9$

$3y^2 - 12y - 9 = 0$

$y^2 - 4y - 3 = 0$

$y_1 = 2 + \sqrt{7}$

$y_2 = 2 - \sqrt{7}$ (à éliminer car y >4)

d'où $x = y - 2 = \sqrt{7}$

Pour tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique, on peut faire un raisonnement analogue (à chaque fois, après réduction de la fraction, on aboutit à une équation du second degré). Donc tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique est un nombre quadratique (de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$).

Il n'est pas aussi simple de démontrer la réciproque : si un nombre est de la forme $p/q+\sqrt{r/s}$ avec p, q, r et s entiers, alors son développement est périodique à partir d'un certain point. C'est pourtant ce que Lagrange a établi.

Les fractions continues des racines carrées

$\sqrt{2}$ = [1,2,2,2,2,...]
$\sqrt{3}$ = [1,1,2,1,2,1,2,..]
$\sqrt{5}$ = [1,4,4,4,4,4,4,...]
$\sqrt{6}$ = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...]
$\sqrt{7}$ = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, ...]
$\sqrt{8}$ = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...]
$\sqrt{9}$ = [3]
$\sqrt{10}$ = [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ...]
$\sqrt{11}$ = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...]
$\sqrt{12}$ = [3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, ...]
$\sqrt{13}$ = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, ...]
$\sqrt{14}$ = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, ...]

Le nombre d'or

C'est le nombre dont le développement en fraction continue est le plus simple.

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$(1 + \sqrt{5})/2$ = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]

4 1 1 6 1 1 8 1 1 10 1 1 12 jusqu'à 1 1 40 ne pourrait pas croire que cela peut changer plus loin ; il serait donc convaincu que e n'est ni rationnel, ni quadratique... mais n'aurait pas de démonstration.

Cette situation illustre plus nettement encore que notre premier exemple qu'on peut avoir de fortes raisons de croire un certain résultat mathématique, sans en avoir la moindre preuve. En mathématiques, il existe des situations où le bon sens nous commande de croire une certaine vérité que nous sommes pourtant incapable de prouver d'une façon qui satisfasse un mathématicien classique.

L'objectif des mathématiciens expérimentalistes est justement de rechercher des vérités mathématiques par tous les moyens, y compris informatiques, de collecter le plus possible de raisons de croire aux vérités découvertes et, si c'est possible, de les démontrer au sens habituel, qui reste la seule façon d'avoir des certitudes parfaites (personne ne le conteste).

Leur philosophie est qu'il vaut mieux connaître une relation mathématique qu'on ne sait pas prouver, que l'ignorer. Lorsqu'en cryptographie on fabrique des nombres premiers par des méthodes probabilistes (qui ne garantissent pas entièrement que les nombres produits sont premiers) on parle de nombres premiers à usage commercial. Par analogie, on pourrait dire que les mathématiciens expérimentalistes s'intéressent aux vérités mathématiques à usage commercial.

Notons que, contrairement au développement de e ou de racine de 2, le développement en fractions continues du nombre π malheureusement ne présente pas de régularité apparente.

π = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, ...]

QUATRIÈME MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Les fractions continues fournissent la meilleure méthode pour résoudre notre problème d'identification de M : prendre les quatre nombres M, $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e et calculer leur développement en fractions continues jusqu'à ce qu'un terme soit presque entier (ce qui signifiera qu'on est très proche d'un nombre rationnel).

Ici en s'arrêtant, soit au dixième terme du développement en fractions continues, soit quand on a un entier à 10^{-5} près, on obtient les résultats suivants.

Pour M : [7, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 2, 28, 1, 26] rien n'est trouvé ;

Pour $M/\sqrt{2}$: [5, 1, 1, 4, 6, 9, 1, 2, 1, 2, 5] rien n'est trouvé ;

Pour M/π : [2, 1, 1+1/765855891] ~ [2, 1, 1] = 2+1/(1+1/1) =5/2 ;