

Pour M/e [2, 1, 8, 28, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 48] rien n'est trouvé.

Le fait numérique que, pour M/π , on ait trouvé, à très peu près, la fraction $5/2$ nous montre à nouveau que vraisemblablement M/π vaut $5/2$, c'est-à-dire que M vaut $5\pi/2$.

Pour s'assurer de la validité de notre méthode (c'est-à-dire pour avoir de meilleures raisons encore de croire que M vaut $5\pi/2$), on calcule non plus 10, mais 20 termes des fractions continues (ce qui correspond à des millions d'essais de constantes) ; on trouve cette fois deux candidats pour M . Le premier est toujours $5\pi/2$, le second est le nombre rationnel : 3926990817/500000000 (simplification de 7853981634/100000000 par 2).

Entre les deux candidats, le plus simple est sans hésitation possible $5\pi/2$, c'est lui qu'on retiendra donc si l'on est mis en demeure de choisir sans pouvoir faire de calculs ou de preuves supplémentaires. Remarquons que, concernant l'exemple de départ, les trois méthodes essayées aboutissent au même résultat (ce qui semble le rendre encore plus probable). Un calcul direct de l'intégrale à l'origine du problème est d'ailleurs possible et confirme que l'identification $5\pi/2$ est bonne.

Considérons un autre exemple pour illustrer l'idée des fractions continues : $M = 4,222012200165$.

Pour M : [4, 4, 1, 1, 58, 4, 2, 2, 37, 3, 1] ; pour $M/\sqrt{2}$: [2, 1, 67, 1, 1, 3, 1, 14, 1, 26, 5] ; pour M/π : [1, 2, 1, 9, 1, 5, 3, 1, 3, 4, 1] ; pour M/e : [1, 1, 1, 4, 4, 1, 1/829123] ~ [1, 1, 1, 4, 4, 1] = 73/47. Cela suggère fortement que $M = 73 e / 47$ (qui est effectivement l'expression utilisée pour définir M).

La méthode des fractions continues va droit au but. Aussi est-elle beaucoup plus puissante que les méthodes envisagées au début, car les nombres quadratiques ont des développements périodiques, et certains nombres transcendants ont des développements en fractions continues simples qu'un œil attentif peut identifier.

L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Aujourd'hui il existe une méthode supplémentaire, bien plus puissante encore et plus commode que celles décrites ci-dessus. Cette

méthode est l'inverseur de Simon Plouffe, qui est à la fois un immense dictionnaire de constantes mathématiques et une machine à rechercher des expressions simples pour les constantes numériques qu'on lui soumet.

Alors que d'habitude on donne une expression à une machine pour qu'elle la calcule, l'inverseur, lui, retrouve l'expression à partir du résultat, d'où son nom.

Lorsque vous avez un nombre dont vous connaissez quelques chiffres, vous pouvez le soumettre à l'inverseur de Plouffe en ouvrant la page internet de son site : <http://www.lacim.uqam.ca/pi/>. Vous pouvez aussi lui soumettre une question par courrier électronique à : numbers@math.uqam.ca. Exemple de question : «lookup 1.4142». L'inverseur, après quelques secondes de calcul, vous renverra sa réponse par courrier électronique.

Si on lui propose une constante M , l'inverseur de Plouffe l'examine en mettant en œuvre progressivement des méthodes de recherche de plus en plus complexes et puissantes.

Dans un premier temps, il se contente de comparer votre M à une liste de

constantes mathématiques qui sont mémorisées dans une grande table. Ensuite, il utilise une série d'algorithmes (dont celui des fractions continues) pour rechercher des combinaisons de ces constantes ou des expressions remarquables vérifiées par le nombre étudié.

TABLEAU DE MENDELEÏEV

La grande table de constantes, noyau de l'inverseur de Simon Plouffe, peut être vue comme un tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques. Elle tente de réunir tous les nombres réels simples rencontrés en mathématiques, quel qu'en soit le domaine. La table ne contient pas les constantes physiques qui souvent dépendent de choix arbitraires dans les unités de mesure (cela n'empêche pas que de nombreux physiciens utilisent l'inverseur pour mener leurs travaux théoriques).

Les nombres de la table sont stockés avec la plus grande précision possible (tous ne sont pas connus avec le même nombre de décimales, certains sont d'ailleurs très difficiles à calculer).

On trouvera bien sûr π , $\sqrt{2}$, e , mais aussi : $\log(3)$, $\exp(\pi)$, le nombre d'or, le nombre de Champernowne 0,123456789101112..., la constante d'Artin (qui indique la proportion de nombres premiers longs), la constante de Feigenbaum liée à la théorie du chaos, la somme des $1/n^n$, et mille autres choses. Non, pas mille, bien plus : aujourd'hui, la table contient 75 millions de constantes.

Cela semble beaucoup, pourtant cela résulte d'un choix : il serait trop facile de mettre $\log(2)$, $\log(3)$, $\log(4)$ jusqu'à $\log(1000000000)$. L'intérêt de la table provient du fait que tout ce qui y est placé est assez simple. On n'y met pas π^{435256} , pas plus que $(\log(463052) \sqrt{2543})^{12}$.

Les calculs des constantes de la table sont vérifiés et complétés en permanence. Des centres de recherche au Canada, aux États Unis ou en France prêtent leurs machines pour ces calculs. Simon Plouffe évalue que plus de deux ans de temps de calculs d'un processeur rapide sont ainsi matérialisés dans sa table. Le volume de la table est de

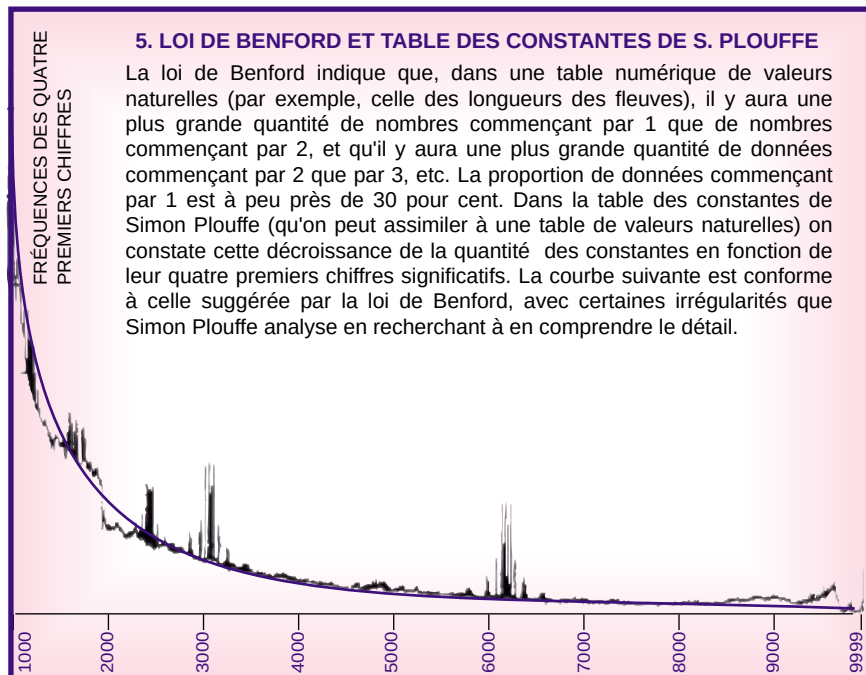
4. L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Quand on pose à l'inverseur de Plouffe la question : "Quelle est la constante : 7,853981634 ?" on obtient un extrait de la table. La réponse correcte ($5\pi/2$) est une constante tellement basique qu'elle y est représentée plusieurs fois sous des codages différents. On reconnaît $\pi/4$ qui possède les mêmes chiffres que $5\pi/2$ puisque $5\pi/2 = 10 \pi/4$

7853977541646791 = (p212) S10(1,2)(8,-8,8,2,-9)
7853977611656700 = (a261) $-3-2*x+3*x^2+3*x^3-2*x^4-6*x^5$
7853978825673085 = (q399) 5/63662
7853979266757639 = (v131) $\sum(1/(8^n-8^n+52), n=1..inf)$
7853979538716315 = (m001) $(\exp(-1/2*\pi)-\log(\gamma(n+1+sr(2))))/\ln(1+sr(2))$
7853980101855253 = (a311) $\cos(\pi/158)*\sin(\pi/17/59)$
7853980314963090 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
7853980378630278 = (a334) $21^{1/2}*(12^{1/4}-19)$
7853980996271272 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
7853981032645112 = (v131) $\sum(1/(5/2^n+145/2^n-44), n=1..inf)$
7853981126778084 = (m001) $(1/2-Backhouse^*GAM(5/6))/Backhouse$
7853981633974126 = (v131) $\sum(1/(4^n-4^n+101), n=1..inf)$
7853981633974483 = (a007) $\pi/4$
7853981633974483 = (m001) $\pi*\cos(\pi/12)*\sin(\pi/12)$
7853981633974483 = (m405) $1/4*sr(\pi)^2$
7853981633974483 = (p199) $S(1,1)[1,1,1,0,-1,1,-1,0]$
7853981633974483 = (s207) A003881 Concatenated sequence from EIS
7853981689970672 = (v003) $\sum(1/(2^n+(29/2^n+31/2^n-12)), n=1..inf)$
7853981829182755 = (f259) $F(7/12, 9/10; 1/10, 2/9, 4/7; 1)$
7853982300884955 = (q399) 355/452
7853982572371080 = (m001) $BesK(0,1)+\cos(1)^*GAM(13/24)$
7853982658543988 = (f259) $F(7/12, 5/8; 1/7, 4/5, 2/3; 1)$
7853982819699420 = (p212) S10(1,5)(6,5,0,-3,-2)
7853983015535401 = (v003) $\sum(1/(3^n+(17/2^n-25/2^n+28)), n=1..inf)$
7853983588391700 = (m001) $BesJ(0,1)/BesK(0,1)*\exp(-\pi)$
7853983588391700 = (m001) $BesJ(0,1)/\exp(\pi)/BesK(0,1)$
7853983685097973 = (m001) $\exp(1/2)*Zeta(1,2)^*GAM(1/12)$
7853983963809479 = (p210) $\sqrt{3}*(2/0,1,-1,-1,1,1,-1,0,0,-1,-1)$
7853984493158376 = (v015) $\sum((19/6^n-3-19^n+2+353/6^n-28)^n/n^n, n=1..inf)$
7853984748948144 = (g404) $-\Psi(2/15)+\Psi(9/14)-\Psi(13/20)$
7853984752358357 = (m001) $(sr(2)+GAM(11/12))^*BesI(0,2)$
7853984917319985 = (v131) $\sum(1/((13/2^n-173/2^n+47)), n=1..inf)$

5. LOI DE BENFORD ET TABLE DES CONSTANTES DE S. PLOUFFE

La loi de Benford indique que, dans une table numérique de valeurs naturelles (par exemple, celle des longueurs des fleuves), il y aura une plus grande quantité de nombres commençant par 1 que de nombres commençant par 2, et qu'il y aura une plus grande quantité de données commençant par 2 que par 3, etc. La proportion de données commençant par 1 est à peu près de 30 pour cent. Dans la table des constantes de Simon Plouffe (qu'on peut assimiler à une table de valeurs naturelles) on constate cette décroissance de la quantité des constantes en fonction de leur quatre premiers chiffres significatifs. La courbe suivante est conforme à celle suggérée par la loi de Benford, avec certaines irrégularités que Simon Plouffe analyse en recherchant à en comprendre le détail.



reconnut que c'était $\pi^2/6$, ce qui ensuite le guida pour trouver une démonstration du résultat qu'il finit effectivement par obtenir. Gauss, autre géant des mathématiques, précisait aussi que sa façon d'arriver à la vérité mathématique était l'expérimentation systématique.

Aujourd'hui, les moyens informatiques suggèrent de reprendre cette conception empirique des mathématiques. Le développement systématique de cette approche iconoclaste ne fait aucun doute, d'autant que les systèmes de calcul formel (comme *Mathematica* ou *Maple*, qui ne manipulent plus seulement des nombres, mais aussi des formules mathématiques) étendent le champ de l'expérimentation mathématique, et que les démonstrateurs automatiques de théorèmes mécanisent parfois une part du raisonnement, permettant à l'approche expérimentale d'aller encore plus loin que le calcul numérique.

Le monde est mathématique, et certains agencements de ses composants peuvent aussi faire des mathématiques et révéler aux humains des parties de la réalité abstraite qu'ils ne verraient pas sans leur aide.

Les cerveaux humains ne sont plus les seuls microscopes mathématiques. Les vérités mathématiques commerciales (presque certaines, mais non démontrées) produites par les nouveaux outils d'explorations mathématiques seront sans doute de plus en plus nombreuses.

plusieurs milliards de chiffres, en augmentation constante. Sachant que, dans un livre moyen on met à peu près un million de chiffres on peut en déduire que, si on l'imprimait, l'encyclopédie de Simon Plouffe comporterait plusieurs milliers de tomes. Seule l'informatique permet la consultation et la mise à jour de telles bases de données! Simon Plouffe envisage que, dans l'avenir, sa table pourrait contenir jusqu'à un milliard de constantes de base! (ce qui ferait alors plusieurs centaines de milliards de chiffres).

Si la constante que vous avez indiquée à l'inverseur de Plouffe n'est pas dans sa table, une batterie d'algorithmes se met en marche pour reconnaître votre nombre. Dans un premier temps la recherche de combinaisons simples des constantes les plus fréquentes est tentée. Cette phase est l'équivalent de l'exploration d'une table virtuelle de plusieurs centaines de milliards de constantes. Puis des méthodes de décomposition en fractions continues, en fractions égyptiennes, en produits infinis, etc., sont lancées, ainsi que d'autres méthodes qui généralisent les fractions continues comme l'algorithme PLSQ, dont l'objectif est de trouver des relations complexes impliquant plusieurs constantes. Cet algorithme a déjà permis plusieurs découvertes mathématiques remarquables, dont celle, il y a trois ans, par Simon Plouffe d'une formule nouvelle pour π , qui a conduit à des méthodes de calcul des chiffres binaires indépendamment les uns des autres, et qui est à l'origine du record de plongée dans π par le fran-

çais Fabrice Bellard en octobre 1997. Ce record nous apprend que le mille milliardième chiffre binaire de π est un 1 suivi de 000011111.

En mars 1998, Robert Munafo, à Malden, dans le Massachusetts, a mené un calcul approché du centre de gravité de l'ensemble de Mandelbrot, représenté en vignette à côté du titre de cet article. L'inverseur de Simon Plouffe a été utilisé, et il a proposé la valeur $(\log(3) - 1/3)$ Feig1 où Feig1 est la première constante de Feigenbaum (4,669201609102...). Les constantes des Feigenbaum sont des constantes qu'on rencontre en théorie du chaos et dans l'étude des fractales. Il apparaît donc très vraisemblable que la formule trouvée pour le centre de gravité est juste. Pour en être plus sûr, il faudrait disposer de quelques chiffres supplémentaires dans l'évaluation du centre de gravité. Hélas, ce centre de gravité est très coûteux à évaluer et l'on considère qu'il faudra une dizaine d'années pour disposer de machines donnant un chiffre significatif de plus.

L'EXPÉRIMENTATION MATHÉMATIQUE

Les mathématiques expérimentales qui sont à la base de la conception de l'inverseur de Simon Plouffe ne sont pas totalement nouvelles. L'exemple historique le plus remarquable de cette approche est celui de la série :

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

qui intriguait les mathématiciens au XVIII^e siècle. Euler (en compétition sur ce problème avec les Bernoulli), après avoir évalué grossièrement cette somme,

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille. La société mathématique de France lui a décerné le prix d'Alembert pour son livre, *Le fascinant nombre π* .

M. BORWEIN et P. B. BORWEIN, *A Dictionary of Real Numbers*; Wadsworth, 1990. (Un dictionnaire de constantes, aujourd'hui largement dépassé par la base de nombres de l'inverseur de Simon Plouffe).

C. BREZINSKI, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer-Verlag, 1991.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Édition Pour La Science/Belin, 1997. (Pour des détails sur la nouvelle formule de calcul de π découverte par Simon Plouffe.)

G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, First Edition 1938, Fifth Edition 1979. (Pour un exposé mathématique sur les fractions continues.)

F. LE LIONNAIS, *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris, 1983. Un des tout premiers dictionnaires de nombres (mélangeant nombres réels et nombres entiers).



Quelle coïncidence !

IAN STEWART

Les coïncidences sont parfois plus probables qu'il n'y paraît.

Voilà quelques années, un de mes amis passait sa lune de miel dans un coin perdu d'Irlande. Sa femme et lui marchaient sur une plage déserte lorsqu'ils virent s'approcher deux personnes... qui n'étaient autres que le patron de mon ami et sa femme. Aucun des couples n'avait eu vent des projets de l'autre : leur rencontre était une pure coïncidence.

Si nous sommes si fascinés par les coïncidences, c'est parce que nous avons une piètre intuition des probabilités qui s'y rapportent. Examinons l'une des coïncidences les plus communes : celle des dates d'anniversaire. Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour avoir une probabilité supérieure à un demi que deux d'entre elles au moins aient la même date de naissance ? Pour simplifier, supposons qu'il n'y a pas d'années bissextiles, de sorte qu'il n'y ait que 365 dates d'anniversaire possibles. Supposons également chaque date équitablement probable, ce qui n'est pas tout à fait exact : il naît plus d'enfants à certaines époques de l'année qu'à d'autres (on pourrait tenir compte de ces facteurs, mais cela compliquerait le calcul sans modifier les conclusions).

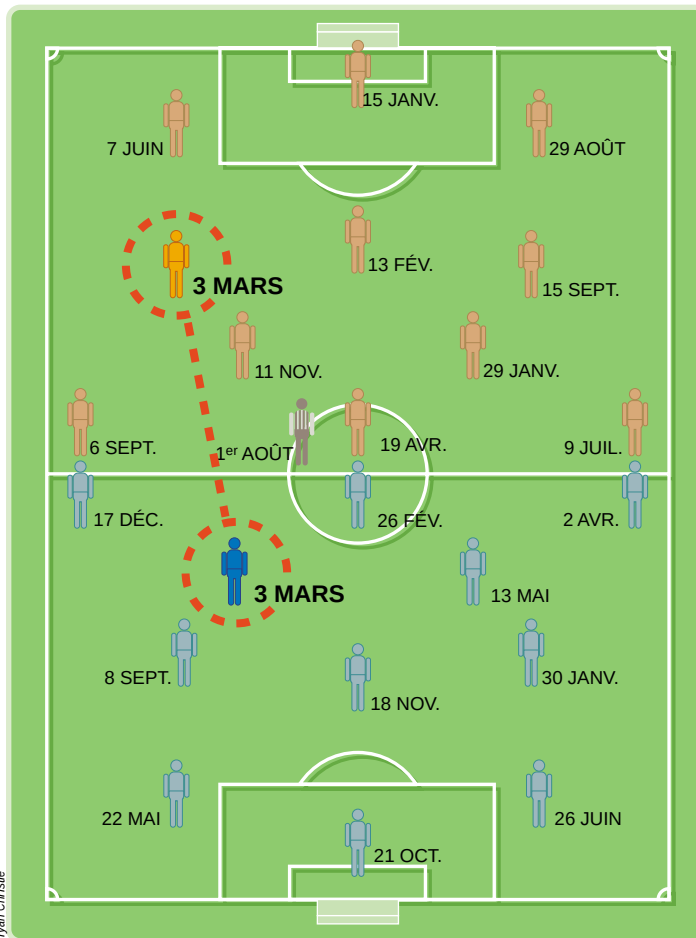
Alors, combien de personnes faut-il dans la pièce? Cent? Deux cents? Mille? Lorsque des chercheurs posèrent cette question à des étudiants d'Université, la moyenne de leurs estimations fut 385. Valeur excessive à l'évidence, puisque, dès qu'il y a 366 personnes,

une coïncidence au moins est garantie d'après le principe des tiroirs (le même, qui stipule que si l'on place trois chemises dans les tiroirs d'un meuble à deux tiroirs, un des tiroirs contient nécessairement plus d'une chemise ; ici les dates sont l'équivalent des tiroirs, et les personnes correspondent aux chemises). En fait, la réponse correcte est bien inférieure : seulement 23 personnes.

Pour ce calcul, il est plus aisé de déterminer la probabilité qu'un événe-

ment ne se produise pas. En soustrayant ce nombre à un, on obtient la probabilité que l'événement se produise. Par exemple, quand l'événement «Deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire» n'est-il pas réalisé ? Lorsque toutes les dates sont différentes. Supposons qu'il y ait d'abord une personne dans la pièce et introduisons les autres personnes une à une. Nous pouvons calculer la probabilité qu'une nouvelle personne ait une date d'anniversaire différente de toutes celles des personnes déjà entrées. Ces probabilités décroissent constamment, et celles d'une coïncidence croissent en conséquence. Or, un événement est plus vraisemblable que son contraire si et seulement si sa probabilité est supérieure à $1/2$. Dès que la probabilité de dates toutes différentes devient inférieure à $1/2$, nous savons que l'existence d'une coïncidence au moins est plus probable que son contraire.

Avec une seule personne, que nous nommerons Arthur, pas de coïncidence possible : la probabilité cherchée est donc égale à un. Voici qu'entre Élise. Son anniversaire peut être l'un des 365 jours de l'année, mais, comme Arthur est né l'un de ces jours, la probabilité d'avoir des dates distinctes est égale à $364/365$ (le quotient du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles). Puis arrive Pierre. Il reste 363 dates non prises, d'où la probabilité d'avoir une date distincte des deux autres, qui est de $363/365$. La probabilité combinée d'avoir trois dates distinctes est égale au produit $(364/365)$



1. Lors d'un match de football hypothétique, la probabilité que deux des personnes présentes aient leur anniversaire le même jour est supérieure à 1/2.