

demeure flexible, mais que les faces ne s'interpénètrent plus. Klaus Steffen, de l'Université de Düsseldorf, a simplifié cette construction et a construit un polyèdre flexible à neuf sommets et 14 faces triangulaires (voir la figure).

Si vous construisez cet objet, vous observerez que, quand certaines faces du polyèdre se rapprochent, d'autres s'éloignent, de sorte que le volume semble rester constant. Denis Sullivan, de l'Université de New York, a testé cette hypothèse en perçant un petit trou dans un polyèdre flexible et en le remplissant de fumée ; durant la flexion du polyèdre, aucune fumée ne s'en échappa. Cette expérience corroborait l'hypothèse du volume constant, mais elle ne la démontrait pas (l'hypothèse du volume constant est nommée conjecture du soufflet, car elle implique qu'un polyèdre flexible ne se comporte pas comme un soufflet, lequel change de volume comme il change de forme, inspirant et soufflant de l'air).

Dans le plan, l'analogue à deux dimensions de la conjecture du soufflet est faux : lorsque l'on déforme un polygone flexible, sa surface diminue (un rectangle s'aplatit en parallélogramme, puis en ligne, de surface nulle). Pourquoi un soufflet polyédrique ne peut-il exister dans l'espace tridimensionnel ?

Pour résoudre cette énigme, R. Connelly et deux autres mathématiciens – Idzhad Sabitov, de l'Université de Moscou, et Anke Walz, de l'Université Cornell – partirent d'une ancienne formule qui donne l'aire d'un triangle. Sans doute trouvée par Archimède, cette formule a été attribuée à Héron d'Alexandrie, un mathématicien grec du début de notre ère qui en a donné une démonstration. Cette formule relie l'aire x d'un triangle aux longueurs a , b et c de ses côtés (voir l'encadré). La relation entre ces valeurs est polynomiale, c'est-à-dire qu'interviennent uniquement des puissances entières de x , de a , de b et de c .

Une relation analogue relie-t-elle le volume d'un polyèdre quelconque aux longueurs de ses arêtes ? Pour quelques polyèdres particuliers, de telles relations sont connues : par exemple, le volume d'un cube ou d'un parallélogramme est égal au produit de la longueur par la largeur et par la profondeur ; pour le tétraèdre, un polyèdre à quatre faces triangulaires, une relation analogue est connue. Toutefois, personne n'avait jamais trouvé une formule générale qui donne le volume d'un polyèdre.

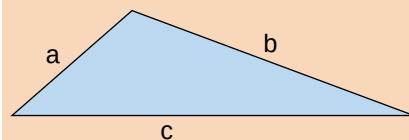
Supposons néanmoins qu'une telle formule existe. Dans ce cas, la conjecture du soufflet serait vérifiée, car le volume d'un polyèdre dépendrait seulement

des longueurs des arêtes. Lors de la flexion d'un polyèdre, les longueurs de ses arêtes sont inchangées et son volume serait donc constant. Ce raisonnement possède cependant une faille : une équation polynomiale peut avoir plusieurs solutions distinctes, de sorte qu'en théorie le volume pourrait «sauter» d'une valeur à une autre. En fait, une variation discontinue du volume ne peut pas se produire dans le monde physique : comme la flexion est continue, le volume ne peut changer subitement de valeur, de sorte qu'il doit rester constant.

Comment trouver la formule du volume ? Les mathématiciens ont commencé leur démonstration en modifiant la formule du volume d'un tétraèdre, qui est similaire à la formule de Héron. De la même façon que, dans le plan, tout polygone peut être divisé en triangles, dans l'espace, tout polyèdre peut être divisé en tétraèdres : le volume du polyèdre est alors la somme des volumes des tétraèdres constitutifs. Cette méthode ne suffit pas à résoudre le problème : elle conduit seulement à la formule qui relie les arêtes de tous les tétraèdres constitutifs. Or, plusieurs de ces arêtes ne sont pas des arêtes du polyèdre initial, mais des diagonales qui relient un sommet du polyèdre à un autre, et leur longueur peut changer lors de la flexion. Les mathématiciens ont dû travailler algébriquement leur relation pour se débarrasser de ces longueurs variables.

Ce processus laborieux aboutit en 1996 : I. Sabitov construisit un algorithme qui permet de trouver le volume de n'im-

La formule d'Héron



Nommons a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle, x , son volume, et p , la moitié de son périmètre, soit :

$$p = (a+b+c)/2.$$

On a alors :

$$x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Lorsqu'on élève cette équation au carré, on obtient la formule de Héron :

$$16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

Johnny Johnson

porte quel polyèdre. Puis, en 1997, l'équipe de trois mathématiciens simplifia considérablement cet algorithme. Pour un octaèdre – un solide à huit faces triangulaires –, la formule est une équation polynomiale qui contient le volume élevé à la puissance 16. Pour des polyèdres plus compliqués, les puissances sont encore supérieures.

L'existence d'une relation polynomiale pour n'importe quel polyèdre est étonnante, car, dans le plan, il n'existe pas d'équivalent de la formule de Héron qui s'appliquerait à tous les polygones. R. Connelly et I. Sabitov pensent savoir prouver la conjecture du soufflet dans un espace à quatre dimensions, mais pas à cinq dimensions. Et là, il n'est plus question de plier du papier pour se faire une idée des résultats !

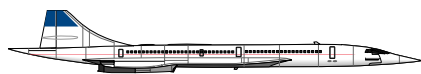
RÉACTIONS

En réponse à l'article *Us et charmes des dés* (voir *Pour la Science*, mars 1998), plusieurs lecteurs m'ont indiqué d'autres ensembles de dés non transitifs. Le dé A est marqué 3, 3, 4, 4, 8, 8 ; le dé B, 1, 1, 5, 5, 9, 9 ; et le dé C, 6, 6, 7, 7, 2, 2. En moyenne, le dé B bat A cinq fois sur neuf, C bat B cinq fois sur neuf et A bat C cinq fois sur neuf. George Trepal, de Floride, fait remarquer que ces nombres arrangés correctement forment les colonnes d'un carré magique (voir ci-dessous), où la somme des nombres de chaque ligne ou de chaque colonne est égale à 15. De surcroît, si l'on utilise les nombres des lignes pour former les faces des dés, l'ensemble de dés obtenus – A (8, 8, 1, 1, 6, 6) ; B (3, 3, 5, 5, 7, 7) ; et C (4, 4, 9, 9, 2, 2) – est également non transitif : A bat B, B bat C et C bat A, avec des probabilités égales à 5/9. Des ensembles de dés similaires, construits à partir de carrés magiques plus grands, semblent ne pas avoir cette propriété de non-transitivité. Cette proposition peut-elle être montrée ou infirmée ?

Le meilleur ensemble de dés non transitifs proposé par G. Trepal, c'est-à-dire celui qui utilise les nombres les plus petits, a des faces marquées de la façon suivante : A (1, 1, 4, 4, 4, 4) ; B (3, 3, 3, 3, 3, 3) ; et C (2, 2, 2, 5, 5, 5). Dans ce cas, A bat B avec une probabilité 6/9, B bat C avec une probabilité 6/9 et C bat A avec une probabilité 5/9.

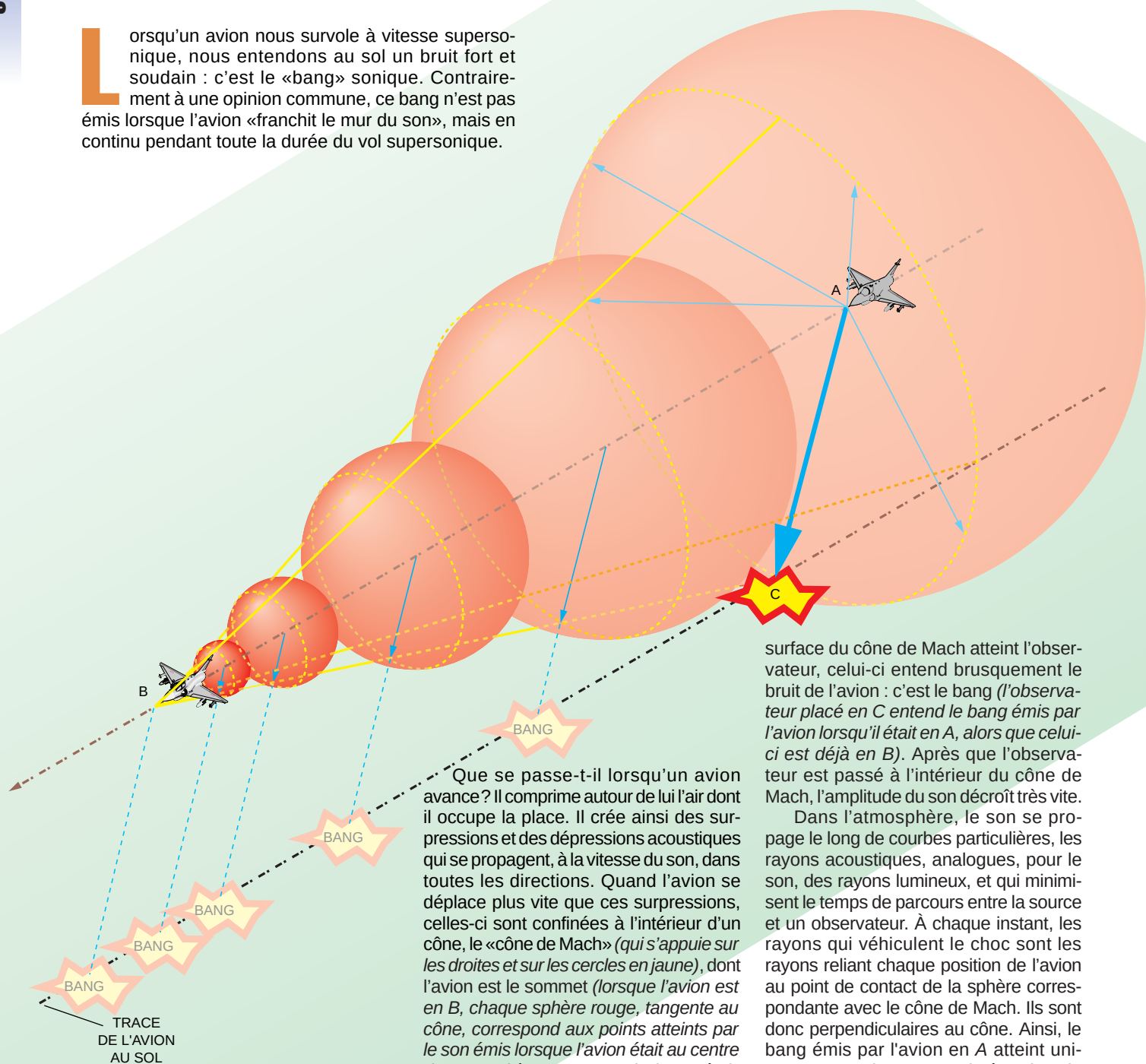
8	1	6
3	5	7
4	9	2

JOHNNY JOHNSON



Le bang sonique

Lorsqu'un avion nous survole à vitesse supersonique, nous entendons au sol un bruit fort et soudain : c'est le «bang» sonique. Contrairement à une opinion commune, ce bang n'est pas émis lorsque l'avion «franchit le mur du son», mais en continu pendant toute la durée du vol supersonique.



Que se passe-t-il lorsqu'un avion avance ? Il comprime autour de lui l'air dont il occupe la place. Il crée ainsi des surpressions et des dépressions acoustiques qui se propagent, à la vitesse du son, dans toutes les directions. Quand l'avion se déplace plus vite que ces surpressions, celles-ci sont confinées à l'intérieur d'un cône, le «cône de Mach» (qui s'appuie sur les droites et sur les cercles en jaune), dont l'avion est le sommet (lorsque l'avion est en B, chaque sphère rouge, tangente au cône, correspond aux points atteints par le son émis lorsque l'avion était au centre de cette sphère ; par exemple, le son émis en A est localisé sur la plus grande sphère). Plus l'avion est rapide, plus ce cône est pointu.

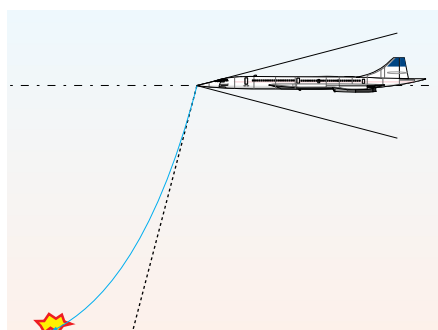
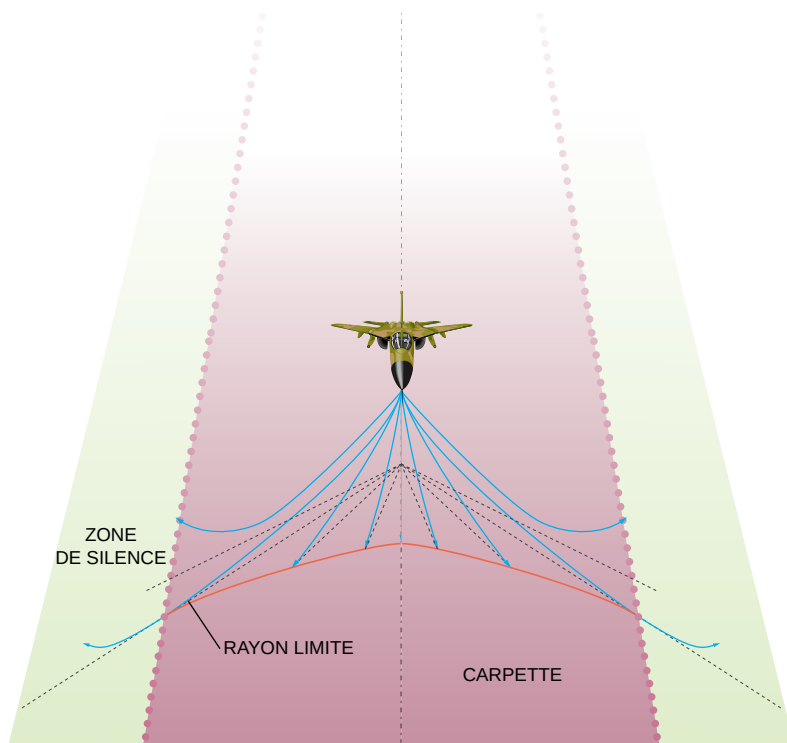
Qu'entend un observateur au sol ? Tant qu'il est situé à l'extérieur du cône de Mach, il n'entend rien. Lorsque la

surface du cône de Mach atteint l'observateur, celui-ci entend brusquement le bruit de l'avion : c'est le bang (l'observateur placé en C entend le bang émis par l'avion lorsqu'il était en A, alors que celui-ci est déjà en B). Après que l'observateur est passé à l'intérieur du cône de Mach, l'amplitude du son décroît très vite.

Dans l'atmosphère, le son se propage le long de courbes particulières, les rayons acoustiques, analogues, pour le son, des rayons lumineux, et qui minimisent le temps de parcours entre la source et un observateur. À chaque instant, les rayons qui véhiculent le choc sont les rayons reliant chaque position de l'avion au point de contact de la sphère correspondante avec le cône de Mach. Ils sont donc perpendiculaires au cône. Ainsi, le bang émis par l'avion en A atteint uniquement un observateur situé sur l'un de ces rayons particuliers (en bleu). Un observateur situé un peu plus loin entendra le bang émis par l'avion à un instant ultérieur, et ainsi de suite. Un observateur fixe n'entend donc le bang qu'une seule fois, bien que celui-ci soit émis continûment.

Où entend-on le bang? Si l'atmosphère était homogène, les rayons acoustiques seraient des droites, et le bang atteindrait tous les points du sol, atténué seulement par la distance. Toutefois, la température varie avec l'altitude : de 15 °C au sol à -56,5 °C environ à 11 kilomètres d'altitude pour l'atmosphère standard utilisée en aéronautique. Comme la vitesse du son dépend de la température, elle décroît aussi, de 340 mètres par seconde au sol à 295 mètres par seconde à 11 kilomètres d'altitude. À mesure qu'ils se rapprochent du sol, les rayons acoustiques issus de l'avion sont donc déviés vers le haut (*ci-dessous*) : c'est la réfraction atmosphérique, analogue au mirage optique. Le vent contribue aussi à la déformation des rayons acoustiques.

Si l'avion vole juste un peu au-dessus de la vitesse du son (à moins de 1,15



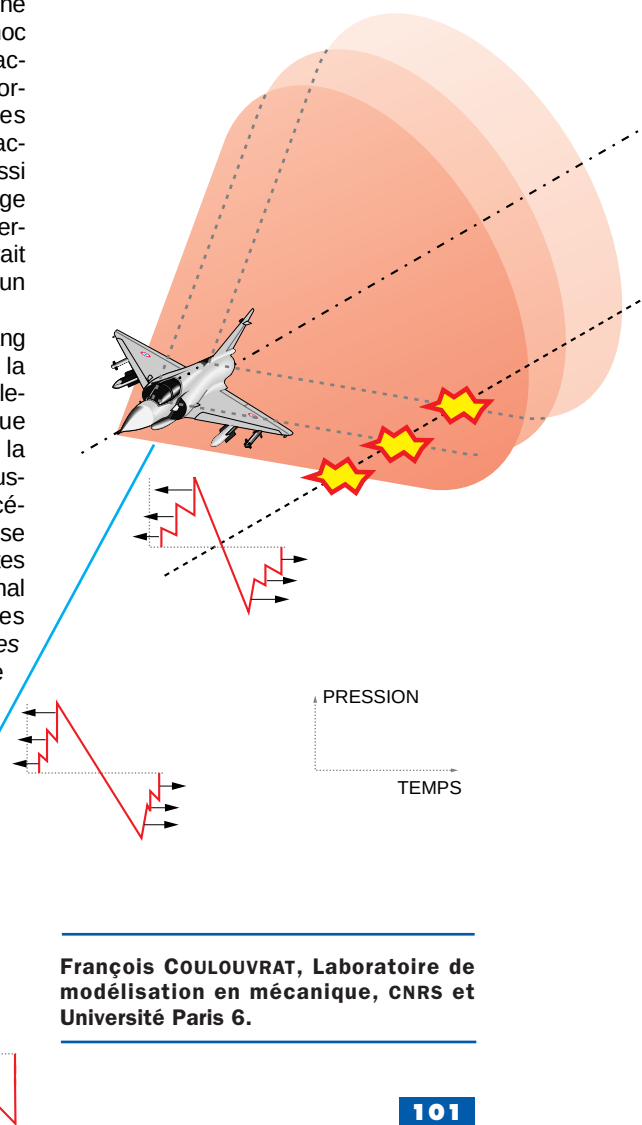
fois la vitesse du son pour l'atmosphère standard), le cône de Mach est très ouvert. Les rayons acoustiques partent presque à l'horizontale, se retournent avant de toucher le sol et remontent vers la haute atmosphère : le bang n'est pas entendu au sol. Pour une vitesse supérieure, les rayons émis dans le plan défini par la trajectoire de l'avion et la verticale touchent le sol (*en haut, à droite*). Les rayons émis latéralement sont d'autant plus déviés qu'ils partent proches de l'horizontale (*ils touchent le sol sur la ligne rouge, intersection du cône de Mach, déformé par la propagation atmosphérique, avec le sol*). Il existe ainsi un rayon limite qui se retourne juste au moment de toucher le sol. Son point de contact avec le sol (*en violet*) sépare deux zones : la «carpette», où l'on entend le bang, et la zone de silence (*en vert*). Selon cette description géométrique, le bruit est nul dans la zone de silence. En réalité, le bruit n'est pas complètement nul, mais il décroît rapidement quand on s'éloigne du bord de la carpette. Pour un avion volant à deux fois la vitesse du son et à 15 kilomètres d'altitude, la carpette est large d'environ 85 kilomètres.

Si l'avion était un point, il émettrait un son très court, localisé exactement sur

la surface du cône de Mach, qui définirait l'onde de choc suscitée par le mouvement supersonique. En réalité, l'avion occupe un certain volume. Chaque variation de sa géométrie (nez, sections du fuselage, bords d'attaque et de fuite des ailes, réacteurs...) produit son propre cône de Mach (*en bas, à droite*). L'onde de choc associée est d'autant plus forte que l'accident dans la géométrie est plus important. De façon analogue, les forces exercées par la voilure sur l'air en réaction à la portance contribuent elles aussi au bang. Au fur et à mesure du passage des cônes de Mach successifs, un observateur à proximité de l'avion entendrait donc plusieurs bangs, associés à chacun des détails de la géométrie.

Pourquoi n'entend-on qu'un seul bang au sol? La vitesse du son varie avec la température, nous l'avons vu. Or, localement, le passage de l'onde acoustique modifie la température de l'air, donc la vitesse du son : une surpression acoustique réchauffe faiblement l'air et accélère le son ; au contraire, une détente se propage un peu moins vite. Les différentes ondes de choc présentes dans le signal (*en rouge*) se propagent donc à des vitesses légèrement différentes (*flèches noires*). Sur de grandes distances de propagation (ici plusieurs dizaines de kilomètres), les ondes de choc les plus intenses rattrapent les plus faibles et fusionnent avec elles, si bien que, au sol, le signal acoustique ne présente plus en général que deux chocs, un à l'avant du signal et un à l'arrière. Le signal de pression acoustique en fonction du temps présente une forme caractéristique

en N. C'est le choc avant, brusque variation de pression, qui produit la sensation auditive de bang. Suivant son intensité et le temps qui le sépare du choc arrière, on entend éventuellement ce dernier, et on parle alors de «double bang».



François COULOUVRAT, Laboratoire de modélisation en mécanique, CNRS et Université Paris 6.

