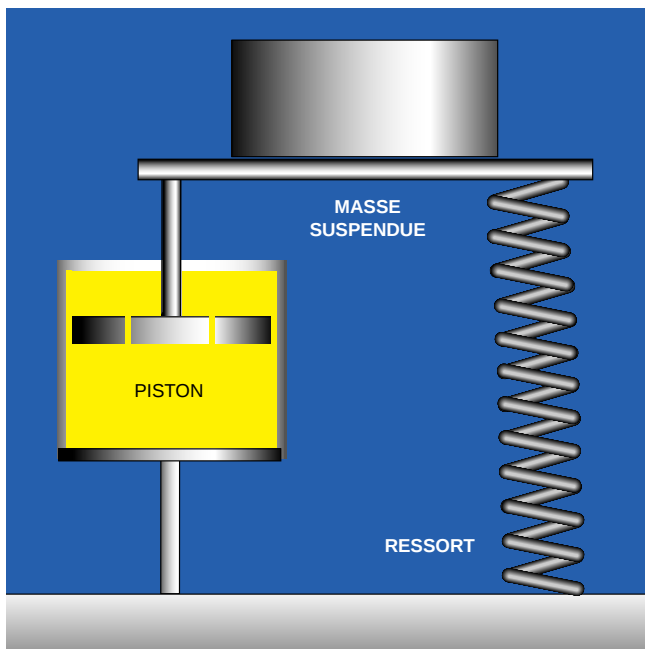
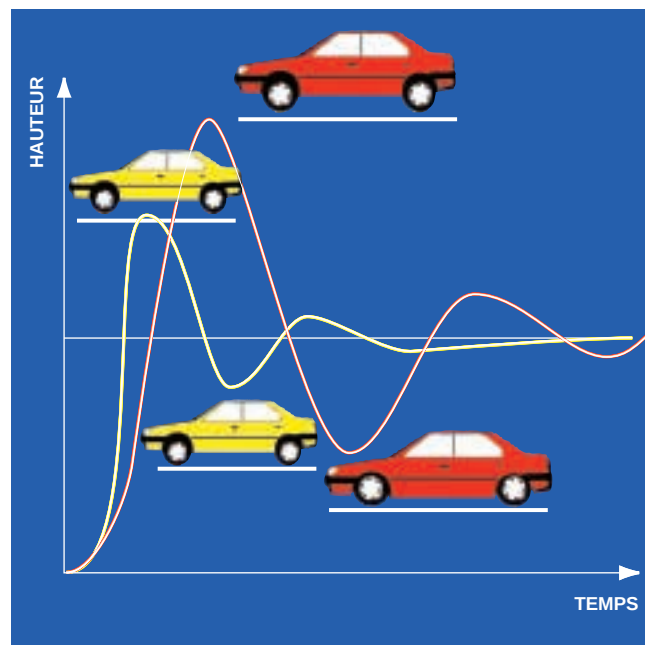




2. L'AMORTISSEMENT est le paramètre qui mesure le nombre d'oscillations d'un système mécanique, après qu'il a été placé dans un état hors d'équilibre et relâché. Le dispositif d'amortissement le plus simple est représenté à gauche : il est composé d'un



ressort et d'un système à frottement visqueux. Les oscillations d'un tel système dépendent de la masse suspendue (à droite, on a représenté les oscillations de deux véhicules identiques : le rouge est plus chargé que le jaune).

digue poreuse est indépendant de la masse d'eau en mouvement : nous avons mathématiquement confirmé que les digues très accidentées amortissent mieux les mouvements de l'eau, surtout quand des poches d'air pouvaient être comprimées par l'avancée des eaux.

Depuis des siècles, les ingénieurs analysent le comportement des digues en enregistrant l'évolution du niveau

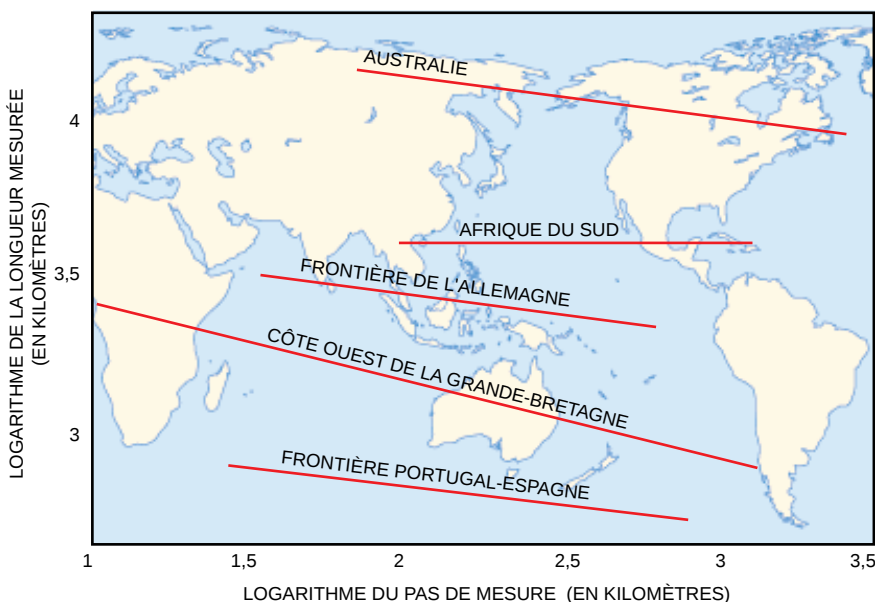
de l'eau sur leur paroi. Dans le cas des digues très amortissantes (ou absorbantes) en raison de leur structure poreuse, on observe que la fréquence de la relaxation est différente selon que la digue est fluviale ou côtière (dans ce dernier cas, la masse d'eau transportée est bien supérieure) ; l'amortissement de la relaxation, lui, semble indépendant de la digue, qu'elle soit fluviale ou côtière.

Un tel résultat est paradoxal en mécanique classique, où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée. Il est pourtant assez général, puisqu'il se manifeste également dans le cas de l'amortissement du vent par le feuillage d'un arbre ou dans le cas de l'amortissement des mouvements de l'air dans les poumons.

Sachant que la nature est une source inépuisable de solutions techniques, nous avons recherché l'essence mathématique d'un tel phénomène, afin d'en tirer des idées directrices pour la conception d'une nouvelle stratégie de commande et d'isolation vibratoire. Nous avons ainsi identifié que la propriété des systèmes fractals nommée récursivité conduit à un amortissement particulièrement efficace, que l'on décrit aujourd'hui par la notion de dérivation non entière.

Côtes, fractales et amortissement

Ces analyses ont conduit, après l'analyse mathématique du phénomène, à la découverte d'une méthode générale de conception de systèmes et, notamment, à un nouveau type de suspension automobile que nous nommons suspension *Crone* (pour «commande robuste d'ordre non entier»).

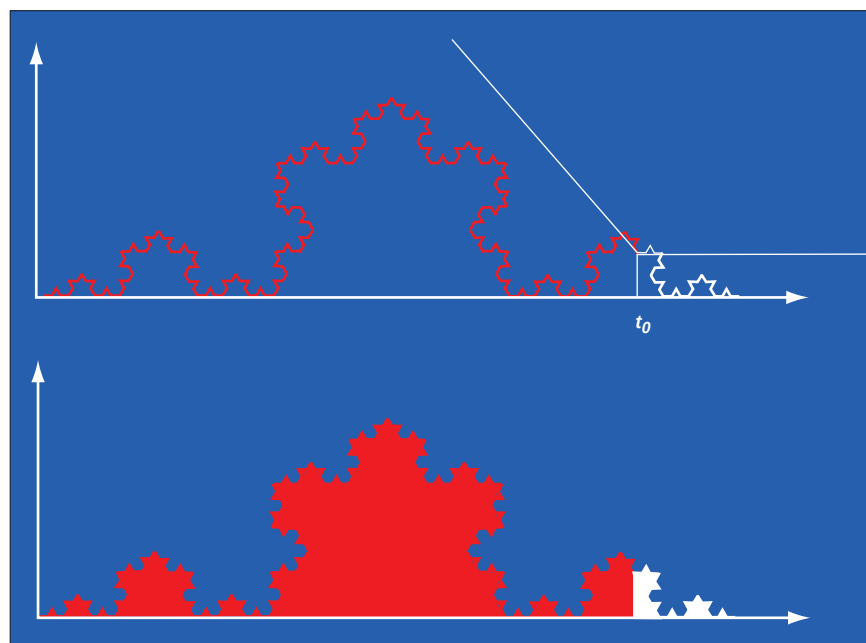
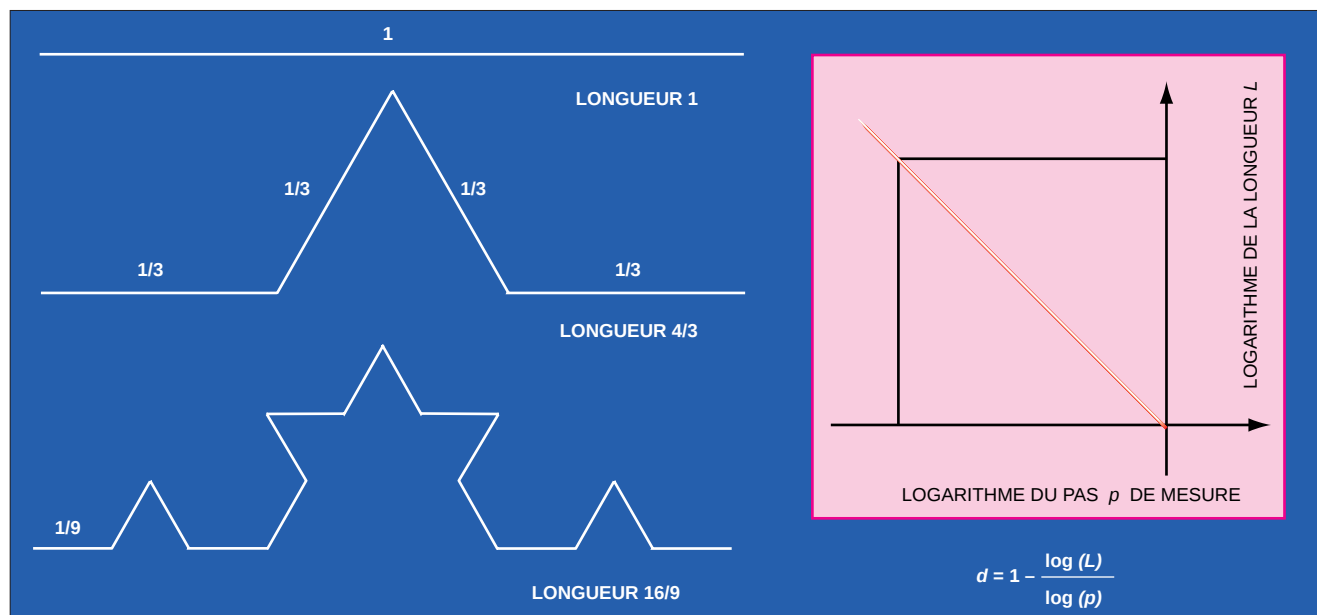


3. LA LONGUEUR DES CÔTES et des frontières dépend de la précision avec laquelle on la mesure : plus le pas de mesure est petit, plus on prend en compte de détails. Pour définir la dimension fractale des objets, on utilise la pente de la droite qui décrit la relation entre la longueur mesurée et le pas de mesure, dans un graphique bilogarithmique.

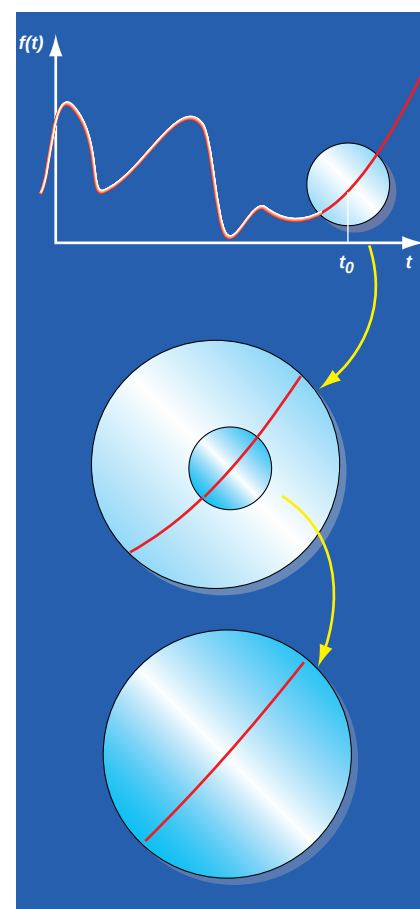
La notion de fractalité est l'aboutissement des diverses études menées depuis le début du siècle par des mathématiciens qui cherchaient une mesure du caractère désordonné (ou irrégulier) de systèmes naturels. Tout a commencé quand ils ont examiné la notion de mesure. Quelle est, par exemple, la longueur de la côte de la

Bretagne, a demandé le mathématicien français Benoît Mandelbrot? Si l'on mesure cette longueur à l'aide d'une règle de un kilomètre de longueur, on ne tient pas compte des reliefs inférieurs à cette longueur. Avec une règle de un mètre de longueur, on peut prendre en compte les rochers ; avec un pas de un millimètre, on tient

compte des grains de sable. Comme l'utilisation d'une règle de plus en plus petite conduit à prendre en compte des éléments toujours plus petits, les segments de droites sont remplacés par des lignes brisées, et la longueur mesurée augmente quand le pas de mesure diminue. À la limite, quand le pas de mesure devient infiniment



4. LES COURBES fractales sont des exemples de courbes irrégulières que l'on construit en appliquant récursivement une même transformation (en haut, les trois premières étapes de la construction de la courbe de von Koch). Ces courbes ont une dimension dite fractale, comprise entre un (pour les courbes régulières) et deux (pour les surfaces). Les courbes régulières sont dérivables (à droite) : quand on agrandit une partie plusieurs fois de suite, la partie agrandie se présente comme un segment de droite ; c'est une partie de la tangente à la courbe. Les courbes fractales ne sont pas dérivables, parce que chaque point est une singularité (la courbe de von Koch, par exemple, a deux tangentes en chaque point). Pour calculer des dérivées non entières de telles courbes, on ne cherche pas la tangente, puisqu'elle n'est pas définie, mais l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses (en rouge dans le schéma inférieur).



petit, la longueur mesurée devient infiniment grande. Ainsi toutes les côtes accidentées ont une longueur infinie, et la longueur classique n'est pas une mesure pertinente des objets naturels désordonnés.

Toutefois la longueur mesurée ne croît pas n'importe comment. En 1953, le mathématicien américain Lewis Fry Richardson a eu l'idée d'étudier expérimentalement la variation de la

longueur mesurée en fonction du pas de mesure. Il a examiné diverses côtes et frontières naturelles terrestres : la côte de l'Australie, de l'Afrique du Sud, la côte Ouest de la Grande-Bretagne, la frontière terrestre de l'Allemagne en 1900, la frontière entre le Portugal et l'Espagne.

Pour chacune, il a porté le logarithme décimal de la longueur mesurée en ordonnée, en fonction du

logarithme décimal du pas de mesure, en abscisse (le logarithme décimal associe la valeur 1 au nombre 10, la valeur 2 à 100, 3 à 1 000, etc.). Richardson a alors observé que, dans un tel graphique, le logarithme de la longueur mesurée croît linéairement vers l'infini quand le pas de mesure tend vers zéro. En outre, la pente des droites du graphique varie selon la nature de la côte ou de la frontière.

Cette pente pouvait-elle mesurer le degré de désordre (ou d'irrégularité)? La linéarité observée correspond à une loi qui indique que la longueur mesurée L est proportionnelle à la longueur du pas de mesure élevée à une puissance $1 - d$. Pour Richardson, le nombre d était un paramètre sans signification particulière, mais, en 1967, B. Mandelbrot proposa de l'interpréter comme une dimension d'espace (qu'il qualifia de fractale pour traduire son caractère fractionnaire).

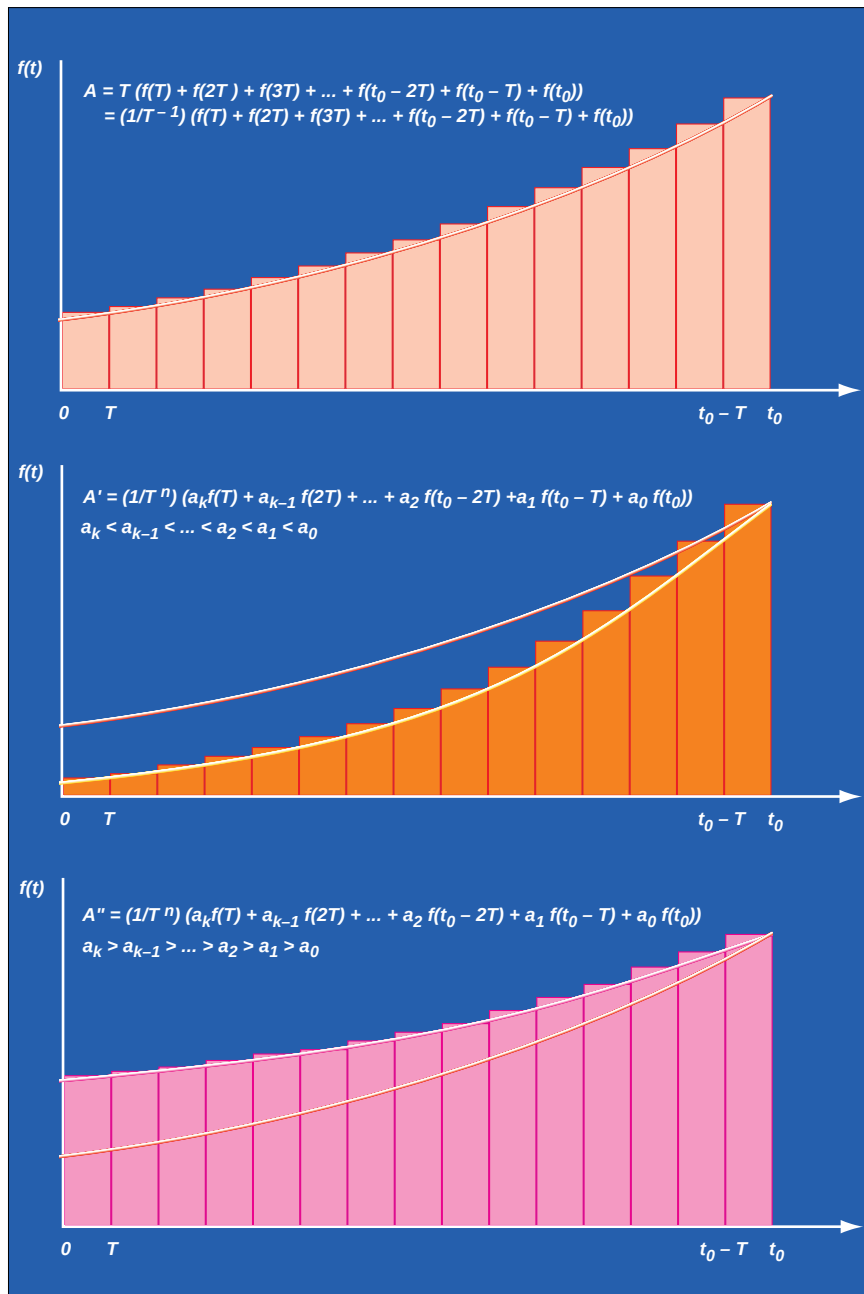
La dimension fractale

Cette idée lui vint quand il observa que la pente correspondant à la côte de l'Afrique du Sud était nulle ($1 - d = 0$) et que, de ce fait, le paramètre d était égal à 1, pour cette côte qui n'est pas accidentée. On retrouvait ainsi la dimension égale à 1 des courbes régulières : un nombre – la distance mesurée le long de la courbe entre un point et une extrémité, choisie comme origine – suffit pour décrire la position de ce point sur la courbe.

Pour les autres côtes étudiées par Richardson, la pente des courbes est négative, et leur dimension fractale est supérieure à 1 ($1 - d < 0$, soit $d > 1$) : ces courbes dites fractales emplissent mieux le plan, de dimension égale à 2, que les courbes régulières, de dimension égale à un. Leur dimension fractale est comprise entre 1 et 2 ; on la calcule aujourd'hui par une formule selon laquelle la dimension fractale est égale à 1 moins le quotient du logarithme de la longueur mesurée par le logarithme de la longueur du pas de mesure.

En appliquant ce résultat à la courbe proposée par von Koch en 1904, nous découvrirons des caractéristiques de la fractalité qui nous serviront ensuite à élaborer des systèmes d'amortissement.

La courbe de von Koch résulte d'un procédé récursif, c'est-à-dire de



5. POUR DÉFINIR LA DÉRIVÉE NON ENTIÈRE d'une courbe (courbe rouge sur la figure supérieure), on commence par remarquer que l'intégrale de la courbe, égale à l'aire sous la courbe) est obtenue par l'opération inverse de la dérivée. Cette intégrale se calcule par exemple, comme la somme d'aires de rectangles (*en haut*). Quand on introduit une mémoire, qui tient différemment compte des valeurs passées de la courbe, on obtient une aire différente qui correspond à une dérivée non entière, d'ordre n supérieur à -1 quand on atténue le passé (*au milieu*), ou d'ordre n inférieur à -1 quand on accentue le passé (*en bas*).

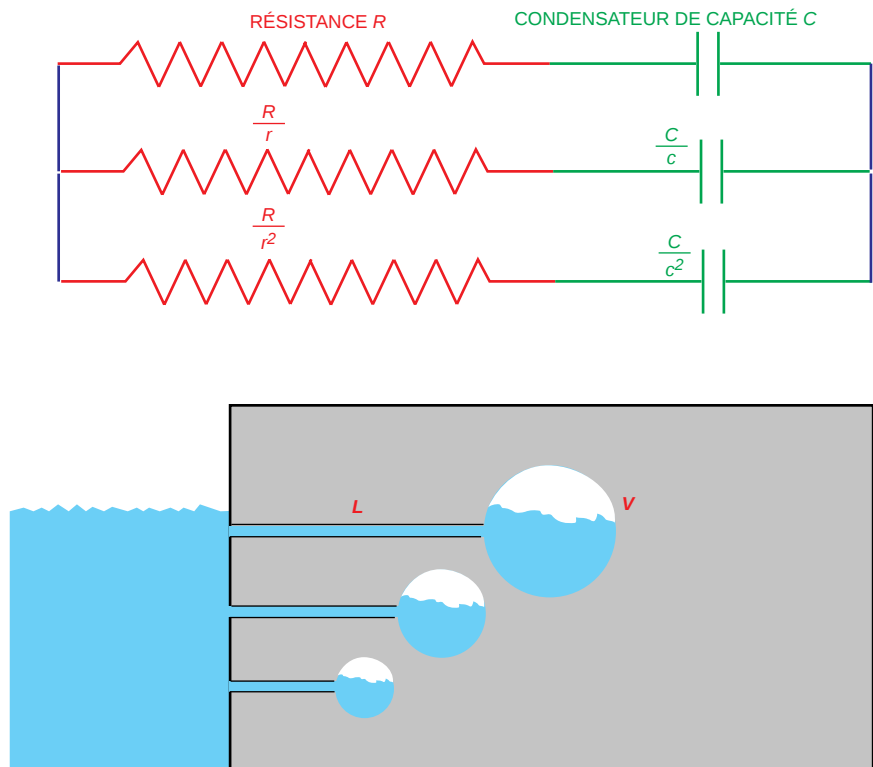
l'application répétée à l'infini d'une même procédure (voir la figure 4). À l'étape 0, on considère un segment de droite de longueur égale à 1. À l'étape 1, on divise ce segment en trois parties égales et l'on remplace la partie médiane par un triangle équilatéral dont on supprime la base. À l'étape 2, on répète la procédure de l'étape 1 à chaque segment de la ligne brisée ainsi obtenue, et ainsi de suite. À la limite, on obtient une figure qui représente plus qu'une ligne ($d > 1$), puisqu'elle est infiniment perturbée, mais moins qu'une surface ($d < 2$), puisqu'elle ne remplit pas complètement le plan. Sa dimension fractale, égale à 1,262, confirme cette perception géométrique.

La dérivation non entière

La dérivation non entière est une opération qui s'impose quand on considère de telles courbes fractales, parce que la dérivation classique n'est plus applicable. Considérons tout d'abord une fonction régulière en fonction du temps, dont la courbe représentative des variations est une courbe continue (voir la figure 4). Observons la courbe dans un petit intervalle de temps, autour d'un instant t_0 : la partie de courbe considérée est un arc. Quand on agrandit la zone d'étude, le segment d'arc devient moins concave. Après un deuxième grossissement, sa concavité diminue encore. Répétée indéfiniment, cette procédure de grossissement conduit progressivement à un segment de droite : une partie de la droite nommée tangente à la courbe au point d'abscisse t_0 . La pente qui mesure l'inclinaison de ce segment de droite est ce que l'on nomme la dérivée (d'ordre 1) de la fonction à l'instant t_0 .

Pour une fonction f dont la courbe représentative est infiniment brisée, comme la courbe de von Koch, la recherche de la tangente n'aboutit pas, parce que, à tout instant t , la procédure de grossissement indiquée précédemment conduit à deux segments de droite, d'inclinaisons différentes. Comme il n'y a aucune raison de privilégier une inclinaison plus qu'une autre, la dérivée à un instant t n'est pas définie. Une courbe fractale n'est pas dérivable.

Pour lever la difficulté, on considère alors l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Non



6. UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE composé de plusieurs branches identiques amortit bien les impulsions électriques quand les valeurs des capacités et des résistances sont respectivement en progression géométrique. De même, un modèle simplifié de digue garnie d'alvéoles où l'air sert d'amortisseur, reliées à la masse de l'eau par des canaux de différentes longueurs (où l'eau est freinée par des forces visqueuses) amortit bien les vagues.

seulement cette aire reste finie, mais, de surcroît, le caractère perturbé de la courbe a très peu d'effet sur l'aire sous la courbe. Quand on calcule l'aire, à toutes les étapes de la construction de la courbe, on observe qu'elle tend vers une limite. On se propose donc d'utiliser l'aire pour généraliser la notion de dérivation.

Notons que l'utilisation de l'aire fait passer d'une caractérisation locale (la tangente à la courbe à l'instant t_0 ne dépend que des variations de la courbe autour de t_0) à une caractérisation globale : l'aire sous la courbe, entre l'origine et l'instant t_0 , prend en compte tout le passé de la fonction.

Que représente l'aire sous la courbe? Considérons d'abord le cas simple d'une courbe continue telle que celle de la figure 5. Si T désigne une période d'échantillonnage suffisamment petite, on trouve une valeur approchée de l'aire A sous la courbe en calculant la somme de rectangles de largeur T et de hauteur égale à $f(t)$, pour toutes les valeurs de t comprise entre 0 et t_0 . Cette somme est égale au produit de la période T par la somme des valeurs de la fonction à des intervalles de temps espacés de T , entre

0 et t_0 . L'aire ainsi calculée est classiquement nommée l'intégrale de la fonction f , et l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée, car la dérivée de la fonction obtenue par intégration est la fonction elle-même. Si la dérivée classique est la dérivée d'ordre 1, l'intégrale peut donc être considérée comme la dérivée d'ordre -1 . Or l'aire peut être exprimée comme le produit de $1/T^{-1}$ par la somme des valeurs de la fonction à des temps espacés de T : la puissance de T , -1 , est l'ordre de dérivation qui correspond, nous l'avons vu, à l'intégration.

Comment passer aux dérivées non entières? Remarquons que l'aire classiquement calculée prend en compte de la même façon les valeurs de la fonction aux temps anciens et aux temps proches du temps t_0 considéré. Définir une dérivée non entière revient à introduire une «mémoire» en accordant moins de poids ou plus de poids aux échantillons les plus anciens (dans la vie courante, le souvenir d'un événement dépend de la nature de cet événement : pour les événements habituels, le souvenir d'événements plus anciens est moindre que celui d'événements plus

récents ; pour des événements inhabituels, le souvenir d'événements plus anciens peut se révéler plus importants que celui d'événements plus récents).

En tenant ainsi compte des valeurs passées d'une courbe par une pondération (on peut au choix atténuer ou renforcer le passé), on obtient des aires A' et A'' qui sont égales au produit de $1/T^n$ par une somme pondérée de valeurs de la fonction f . Cette expression généra-

lise la notion de dérivée à l'ordre n si les coefficients de pondération vérifient une relation qui dépend de n . L'expression obtenue tient compte des valeurs de la fonction à tous les instants du passé. Quand n est égal à -1 , il n'y a aucune pondération du passé ; pour n supérieur à -1 , le passé est atténué ; et pour n inférieur à -1 , le passé est accentué.

Un tel souci d'obtenir des ordres de dérivation non entiers remonte au

début du XIX^e siècle : le mathématicien allemand Bernhard Riemann, et les mathématiciens français Joseph Liouville ou Augustin Cauchy donnèrent une première formulation mathématique de la dérivation non entière.

Le souci d'assurer la continuité de la dimension d'espace est plus récent, puisque c'est seulement au XX^e siècle que l'on a identifié des dimensions non entières d'espace. Et c'est enfin dans la seconde moitié de ce siècle que l'on a identifié l'interdépendance de la fractalité et de la dérivation non entière en trouvant une relation entre l'ordre non entier de dérivation et la dimension fractale.

De la dérivée au circuit électrique

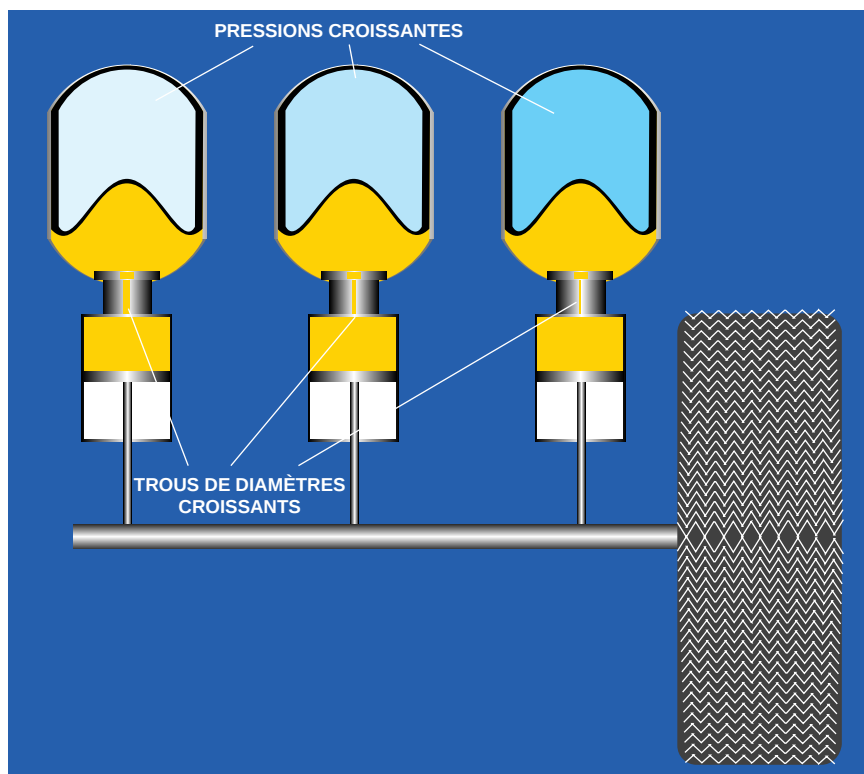
Si la fractalité relève de la géométrie, la dérivation non entière relève de la dynamique des systèmes. L'interdépendance de ces deux concepts n'apparaît donc que lorsqu'il y a corrélation de la géométrie et de la dynamique. Mieux encore, la construction de la courbe de von Koch montre qu'une caractéristique essentielle de la fractalité est la récursivité, c'est-à-dire la répétition du procédé de construction. Celle-ci serait-elle suffisante ? Oui : nous avons montré que la dérivation non entière résulte plus de la récursivité (qu'elle soit ou non d'origine fractale) que de la fractalité ; une géométrie récursive fractale n'est pas nécessaire à l'obtention d'une dérivation non entière, mais une géométrie récursive l'est.

Nous fondant sur ces idées, nous avons construit en 1975 une classe de systèmes que nous avons nommés «dérivateurs non entiers bornés en fréquence», à l'aide de résistances et de condensateurs (électriques, hydrauliques ou pneumatiques).

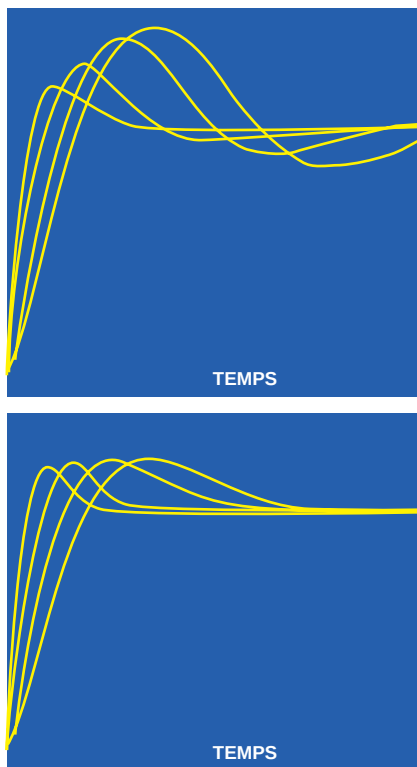
Examinons d'abord un système électrique : nous associons récursivement, en parallèle, des cellules composées d'une résistance et d'un condensateur en série. À l'étape 0, nous utilisons une cellule composée d'une seule résistance en série avec un seul condensateur ; c'est ce que l'on nomme une cellule RC série. À l'étape 1, on branche en parallèle sur cette cellule une autre cellule RC série, dont la résistance est divisée par r et dont la capacité est divisée par c . À l'étape 2, on branche en parallèle sur



A. Oustaloup



7. LA SUSPENSION CRONE est construite sur le principe du circuit électrique de la figure 6. Des sphères contenant un gaz à différentes pressions sont reliées à l'arbre de la roue par des systèmes hydrauliques où l'huile s'écoule plus ou moins difficilement (en bas).



8. L'AMORTISSEMENT assuré par une suspension Crone (en bas) ne dépend pas de la charge de la voiture, contrairement à l'amortissement classique (en haut). Sur ces diagrammes, on a indiqué la réaction à une sollicitation de la roue de type marche. La suspension Crone, de surcroît, limite l'amplitude des oscillations.

les deux premières cellules une autre cellule RC série dont la résistance est divisée par r^2 et la capacité par c^2 .

Après avoir ainsi disposé une dizaine de cellules, on obtient un circuit qui présente un comportement de dérivation non entière sur une plage de fréquences extrêmement large : quand on applique une tension sinusoïdale à un tel circuit, le courant est déphasé d'une valeur qui dépend des paramètres r et c et qui reste constante sur dix millions de hertz (généralement, les circuits qui déphasent les signaux électriques ont un comportement qui dépend fortement de la fréquence).

Les rapports constants r et c , entre les résistances et les capacités des cellules consécutives, sont nommés facteurs récursifs ; ils déterminent l'ordre non entier n de dérivation entre la tension et le courant, qui s'exprime en l'occurrence par la relation $n = \log(r)/\log(rc)$. La disposition récursive des résistances et des capacités se traduit par une distribution récursive des constantes de temps et des modes de relaxation.

Plus généralement, la dispersion des dynamiques qu'entraîne la récursivité est à l'origine du caractère stabilisant du désordre dans la nature.

C'est donc la récursivité qui est le maître phénomène : c'est la particularité du désordre qu'il convient d'exploiter judicieusement dans la conception des systèmes dynamiques, notamment en retenant la notion de récursivité de nature non fractale.

Digues et suspension

Afin de transposer directement ces résultats à des systèmes d'amortissement mécanique, nous avons étudié le comportement de digues poreuses. Les cavités du milieu poreux que constitue la digue forment comme un ensemble de branches composées chacune d'un canal et d'une alvéole (voir la figure 7).

Le modèle hydraulique simplifié de l'interface eau-digue est analogue à l'arrangement en parallèle de cellules RC série : une distribution récursive des pertes d'énergie dans les canaux se traduit par une distribution récursive des résistances hydrauliques, et une distribution récursive des énergies potentielles d'élasticité dans les alvéoles se traduit par une distribution récursive des capacités hydrauliques.

Autrement dit, le modèle hydraulique est l'analogue exact du système parallèle récursif de cellules RC série envisagé précédemment : l'ordre non entier de dérivation, entre le débit de l'eau et la pression P à l'interface eau-digue, est déterminé par les rapports constants r et c entre les résistances hydrauliques et les capacités hydrauliques de deux cellules consécutives.

Pour passer de la digue poreuse à la suspension Crone, il suffit de tourner d'un quart de tour la représentation de la digue, de mettre l'eau en

mouvement par un piston lié à la roue, de remplacer l'eau par de l'huile. On obtient ainsi le schéma de principe de la version hydropneumatique de la suspension Crone.

Trois cellules au moins sont nécessaires pour définir des rapports constants entre les coefficients de frottement visqueux et les raideurs des amortisseurs et des ressorts de deux cellules consécutives. En pratique, trois cellules sont suffisantes pour couvrir la plage des fréquences qui comprend la fréquence propre de la caisse, qui est de l'ordre du hertz (une oscillation par seconde), et la fréquence propre de la roue, comprise entre 15 et 20 hertz. La récursivité des coefficients de frottement visqueux est assurée par des trous de laminage de diamètres différents. Quant à la récursivité des raideurs, elle est assurée par des sphères où du gaz est placé à des pressions différentes (de la sorte, on peut utiliser des sphères toutes de même taille).

Pour une masse suspendue variant d'un facteur six, entre 150 et 900 kilogrammes, la figure 8 illustre, comparativement à une suspension classique, les réactions de la caisse à une sollicitation de type marche de la roue. Ces réactions montrent que le premier dépassement et l'amortissement restent constants, traduisant une bien meilleure robustesse de la suspension Crone.

Nous avons cherché à valoriser l'approche conceptuelle ainsi mise au point en l'appliquant au secteur automobile. En collaboration avec le groupe PSA, nous avons implanté la suspension Crone sur une Citroën BX expérimentale. Notre réalisation a été récompensée par le trophée AFCT'95, qui distingue la meilleure innovation technique dans le cadre des relations université-industrie.

Alain OUSTALOUP est directeur adjoint du Laboratoire d'automatique et de productique de l'Université de Bordeaux I et de l'ENSERB. Il a reçu la médaille d'argent du CNRS en 1997.

Alain OUSTALOUP, *La commande Crone*, Éditions Hermès, Paris, 1991.

Alain OUSTALOUP, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Éditions Hermès, Paris, 1995.

A. OUSTALOUP, B. MATHIEU et P. LANUSSE, *The Crone Control of Resonant Plants : Application to a Flexible*

Transmission, in *European Journal of Control*, vol. 1, n° 2, pp. 113-121, Éditions Springer, 1995.

A. OUSTALOUP, X. MOREAU et M. NOUILLANT, *The Crone Suspension*, in *Control Engineering Practice*, vol. 4, n° 8, pp. 1101-1108, 1996.

A. OUSTALOUP, F. LEVRON, F. NANOT et B. MATHIEU, *Frequency Band Complex Non Integer Derivator : Characterization and Synthesis*, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, à paraître.