



L'intelligence en biologie

JEAN-DIDIER VINCENT

Prétendre, comme je le fais, que l'intelligence est inséparable de l'affect, de la passion, c'est aussi se donner un guide pratique pour l'exercice de la biologie : pour interpréter, comprendre, penser le vivant, vivons et conservons l'idée que le vivant, comme nous, a une histoire.

J'ai la conviction qu'une intelligence purement formelle explorerait mal le vivant, parce que le sens du vivant échappe à une syntaxe intemporelle ; il n'émerge que de l'histoire individuelle des organismes ou de l'histoire évolutive des espèces. Pour révéler les mécanismes du vivant, le biologiste doit sans cesse passer les données au crible de cette double histoire. La nécessité d'interpréter l'histoire individuelle des organismes suffit à justifier la passion que je réclame : les êtres vivants ne se constituent-ils pas par les passions, au sens de la jouissance, du plaisir ou de la souffrance ? Leur histoire n'est-elle pas ainsi toute passion ? Même des phénomènes qui semblent aussi mécaniques que le conditionnement mettent les passions en œuvre : le chien qui salive à l'écoute d'une cloche « sait » qu'il recevra de la nourriture, objet de plaisir. De ce fait, le biologiste qui analyse le vivant gagne à se fonder sur sa propre humanité, à se ramener donc à ses propres passions pour comprendre et interpréter les observations et les expériences qu'il fait.

En ce sens, l'intelligence du biologiste est aussi celle de l'intelligence de sa propre vie, contrairement à celle du mathématicien, du physicien ou du chimiste, qui étudient des objets inafectés. Le biologiste, lui, a une réflexion incarnée, même quand il étudie des bactéries, car derrière la bactérie, il y a toute la vie de la bactérie : son développement, sa croissance, ses mouvements, les fermentations, les maladies qu'elle subit ou qu'elle fait subir, la mort. Certes une particule subatomique a une stabilité limitée, mais elle n'a pas d'histoire : un électron a des caractéristiques immuables tant qu'il est stable.

La vie est une fable. Le vivant est une histoire, qui s'incarne, et l'intelligence du biologiste est à son mieux

quand le biologiste a une relation avec la souffrance ou avec la vie de l'individu. Un médecin qui devient biologiste a des atouts. D'ailleurs, le mot « biologie », né au début du XIX^e siècle, est venu remplacer celui de « physiologie », laquelle traite du rapport de l'être vivant avec la nature. La physiologie et la médecine sont synonymes.

En pratique, comment le biologiste peut-il se colleter efficacement avec la complexité du réel ? Poser cette question montre bien que la biologie est une science à part : en chimie ou en physique, on peut isoler les systèmes, les simplifier, les réduire. En biologie, on n'a pas souvent ce recours : on ne connaît pas de modèle simplifié de micro-organisme, par exemple. Les résultats d'expériences sont notoirement difficiles à interpréter.

En neurobiologie, par exemple, celui qui étudie la mémoire d'animaux dont il lèse le cerveau ne perturbe pas le système qu'il étudie comme le fait le physicien qui change un seul paramètre. Aussi, lors de l'interprétation des résultats, le biologiste doit-il faire un bilan entre ce qui a été supprimé et ce qui a été gagné lors de la suppression. Il ne peut jamais se contenter de simples soustractions ou additions d'effets ; le système étudié est comme une toile d'araignée qui s'agit de toute part quand on la touche en un point.

Pour s'en tirer, on ne peut, j'y reviens, faire abstraction du sens des phénomènes. Je dis bien sens, et non finalité. Sans la passion qui éclaire le sens, la biologie moléculaire risque de devenir une chimie physique qui ne comprend pas les observations qu'elle fait. Pour interpréter des phénomènes biologiques, le biologiste doit reconnaître que l'organisme est le produit d'une interaction avec son milieu ; il doit savoir que le milieu exerce des contraintes sur l'homme comme sur l'animal, sur la plante ou sur le micro-organisme. Si le milieu exerce, par exemple, des contraintes périodiques, l'organisme se sera adapté à cette périodicité ; un biologiste qui étudierait ainsi une libération d'hormones, telle que la prolactine, ne pourra conduire ses expériences et tirer des conclusions perti-

nentes que s'il tient compte du phénomène de la périodicité de la contrainte exercée par le milieu.

De même, un médecin qui veut déclencher une ovulation chez une femme stérile en lui administrant l'hormone *GnRH* (la gonastimuline, libérée par l'hypothalamus, qui stimule l'hypophyse) doit avoir l'intelligence du vivant pour être efficace : d'une part, le terrain doit être préparé (l'ovulation ne peut se faire à n'importe quel moment), et, d'autre part, l'injection doit être accordée sur le rythme de l'organisme, qui est, d'ailleurs, aussi celui du milieu, en raison de la longue adaptation des organismes à leur milieu. L'injection d'une dose massive n'a aucun effet. Le temps fait l'action, et l'on doit avoir l'idée que le cerveau est comme une horloge. Tout le vivant est le produit de l'évolution ; il n'existe pas d'organisme qui ne soit le produit d'une histoire. Au total, le biologiste aura l'intelligence de son objet s'il rapporte les phénomènes à l'aune de la sélection naturelle, s'il donne aux modèles un cadre spatial et temporel.

Comment s'exercer à la biologie ? Comment devenir ce fouineur à l'intelligence globale ? Comment apprendre à intégrer, tel Sherlock Holmes, les indices de l'enquête ? Comment devenir capable d'intégrer ? Les observations précédentes montrent que le biologiste doit apprendre à réunir les fils : le fil chimique tout comme le fil psychologique. Toutefois il doit également vivre, et vivre passionnément, puisque l'analyse des passions sera la clef du monde vivant.

Jeunes biologistes, vivez fort, expérimentez, discutez de vos résultats, faites vivre les expériences, soyez rigoureux lors de leur conduite, mais, ensuite, revivez-les dans le schéma, l'interprétation, le projet... Méfiez-vous de l'enfermement dans le quotidien expérimental. La virtuosité technique est un risque : le biologiste, s'il s'intéresse à l'instrumentation pour elle-même, perd la possibilité de se passionner pour l'objet qui doit être celui de son étude : le vivant.

Jean-Didier VINCENT est professeur à l'Institut universitaire de France et directeur de l'Institut Alfred Fessard (CNRS).



Dusan Petric

Champernowne, et quelques autres

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les décimales infinies des irrationnels recèlent des mystères qui résistent à toutes les attaques.

Les nombres réels qui ne sont pas des fractions de nombres entiers (et que l'on appelle les irrationnels, par exemple $\sqrt{2}$) s'écrivent sans répétition périodique de leurs décimales, et c'est leur caractérisation la plus simple. Par exemple, $2/13$ est rationnel, et donc périodique, $2/13 = 0,153846153846...$ En revanche, $\sqrt{2}$, irrationnel, n'est donc pas périodique, ce que l'on constate en observant ses décimales 1,41421356..., aussi loin que l'on aille. Les Grecs ont démontré que $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé sous forme de fraction.

Cela ne signifie pas que les décimales d'un nombre irrationnel sont toujours irrégulières, car il existe bien des régularités autres que la périodicité. Le nombre de Champernowne, inventé par le mathématicien anglais D. Champernowne en 1933, engendré par une règle simple (la suite des entiers en base 10), est très régulier et prévisible, mais la suite de ses décimales n'est pas périodique : 0,1234567891011121314151617181920...

Le nombre de Champernowne est irrationnel (ce n'est pas le rapport exact de deux nombres entiers). Ce nombre est même transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers, comme l'est $\sqrt{2}$, qui, par définition, vérifie : $x^2 - 2 = 0$.

Cette transcendance du nombre de Champernowne a été démontrée sur un lit d'hôpital, en 1937, par le mathématicien allemand Kurt Mahler : à la suite d'une opération, il avait reçu des injections de morphine et voulait se prouver que son cerveau était intact.

Les nombres qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers sont dénommés nombres algébriques : certains s'écrivent avec des radicaux, comme $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{7}}$: on les appelle nombres algébriques exprimables par radicaux. En revanche, certains nombres algébriques ne sont pas exprimables par radicaux : on sait, par exemple, que les solutions de l'équation $2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$

ne le sont pas. Toutes les solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à 4 sont exprimables par radicaux, alors que, dès qu'une équation polynomiale a un degré supérieur à 4, ses solutions ne sont, le plus souvent, pas exprimables par radicaux.

La classification habituelle des nombres réels, étudiée soigneusement au XIX^e siècle, en allant des plus simples aux plus compliqués, se présente comme suit : nombres entiers/nombres rationnels/nombres algébriques exprimables par radicaux/nombres algébriques non exprimables par radicaux/nombres transcendants.

Cette classification ne prend en compte que la nature «équationnelle» des nombres : sont-ils solutions d'équations simples ? Dans le cas des entiers et des rationnels, connaître la nature équationnelle fournit une indication sur la nature des décimales : les entiers n'ont pas de décimales après la virgule, les rationnels ont des décimales qui se répè-

tent périodiquement. Cette correspondance entre propriétés équationnelles et propriétés des décimales se prolonge-t-elle plus loin, et, si c'est le cas, de quelle façon ? Ces questions sont étonnamment difficiles.

Le bizarre nombre de Champernowne est le premier indice de cette difficulté : il est le plus compliqué possible dans la classification équationnelle des nombres (puisque'il est transcendant), tout en ayant un développement décimal simple et facile à écrire jusqu'à l'infini. Il suggère que, s'il y a une classification naturelle des nombres en fonction de la régularité de leur développement (décimal ou autre), alors ses liens avec la classification équationnelle ne se réduiront pas à une mise en parallèle directe.

Nous découvrirons une classification fondée sur les développements des nombres et nous verrons qu'elle conduit à une multitude de questions naturelles qui défient toujours les mathématiciens.

NOMBRES ÉQUIRÉPARTIS

Les nombres équirépartis sont, par définition, ceux dont les chiffres vérifient l'égalisation des proportions. La fréquence des «0» dans leurs n premiers chiffres tend vers 0,1 lorsque n tend vers l'infini, ainsi que la fréquence des «1», des «2», etc.

Connaît-on explicitement des nombres équirépartis ? Oui, en voilà deux :

$R_1 = 0,12345678901234567890...$
(la suite 1234567890 répétée sans cesse).
 $R_2 = 0,112233445566778899001122...$
(la suite 11223344556677889900 répétée sans cesse).

Ces deux nombres, puisqu'ils ont des décimales périodiques, sont rationnels. Ce sont les fractions :

$R_1 = 137174210 / 1111111111...$ et $R_2 = 113367116734120100/101010101010101010$. Il est à la fois presque évident et démontrable que, si l'on tire des chiffres au hasard avec un dé équitale à dix faces (chaque face a une chance sur dix d'être tirée à



1. Paul Erdős, en 1996, explique au mathématicien Albert Nijenhuis, qui se prépare à payer, pourquoi il a perdu son pari mathématique.

chaque lancer) et que l'on construit avec les résultats un nombre réel, alors celui-ci est équiréparti. Le désordre total entraîne l'équirépartition.

Or les nombres R_1 et R_2 , ainsi qu'une multitude d'autres construits sur le même principe, prouvent qu'un nombre équiréparti n'est pas toujours désordonné. Les nombres équirépartis peuvent donc être réguliers (comme R_1 ou R_2) ou irréguliers, comme ceux résultant d'un tirage équitabie infini de leurs chiffres. De même, les nombres équirépartis peuvent être rationnels (R_1 et R_2) ou irrationnels (comme le nombre de Champernowne qui est transcendant, donc irrationnel). La propriété d'équirépartition des décimales d'un nombre n'indique rien sur sa place dans la classification équationnelle.

Lorsqu'on examine les décimales du nombre de Champernowne, il semble choquant qu'elles soient équiréparties, car dans le début du développement la proportion des «1» est très supérieure à celle des «0» : il y a par exemple huit «1» parmi les 20 premiers chiffres de Champernowne. Pourtant, à l'aide du raisonnement, les mathématiciens ont démontré que cet avantage apparent des «1» s'estompe ensuite. Les fréquences des chiffres de Champernowne s'égalisent à l'infini.

DES CONSTANTES REMARQUABLES

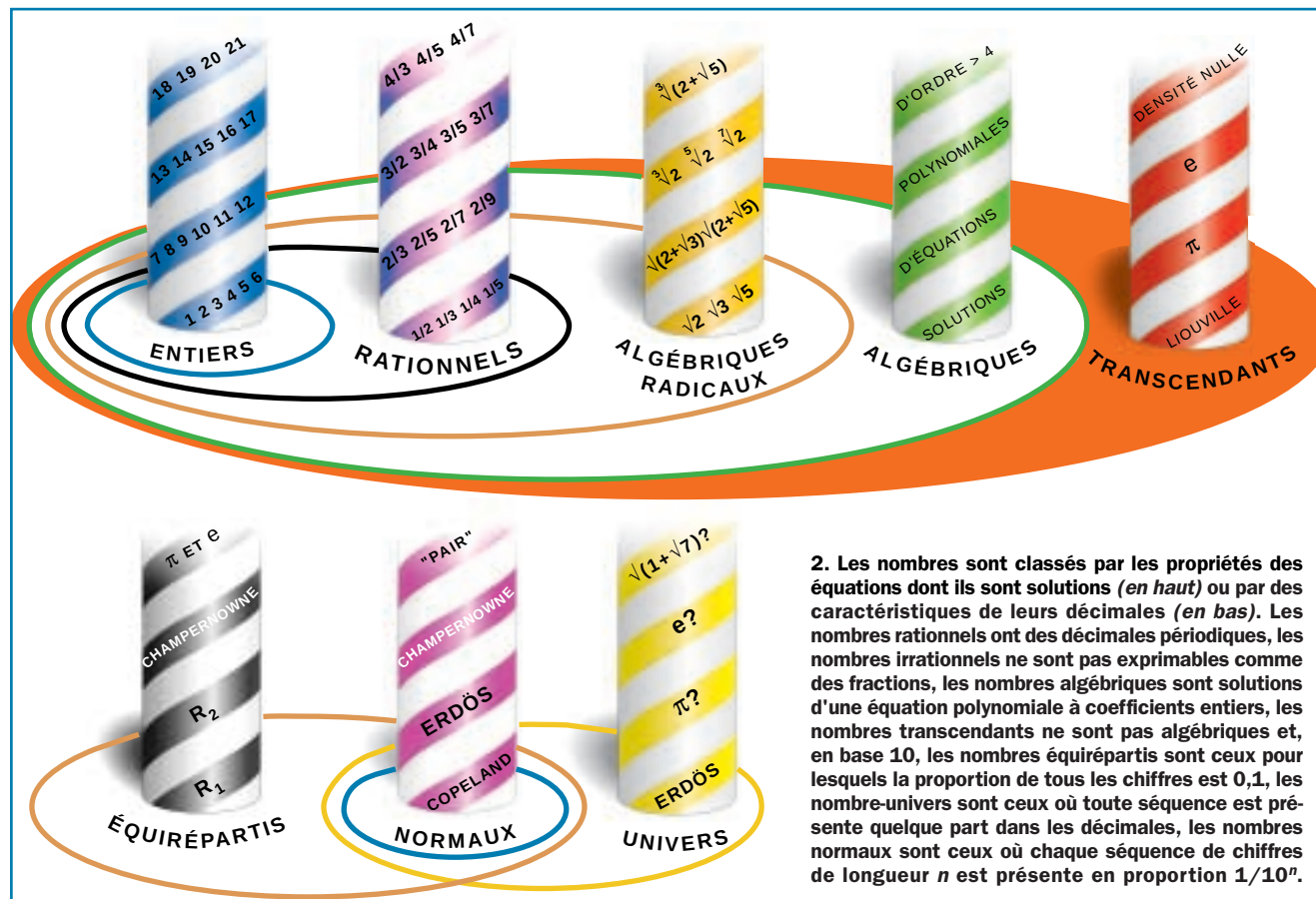
Il existe quelques variantes du nombre de Champernowne qui méritent qu'on y réfléchisse. Par exemple, le nombre Pair = 0,2468101214161820222426... constitué par la suite des nombres pairs.

Contrairement aux apparences, ce nombre est aussi équiréparti. L'égalisation des proportions est plus choquante encore que dans le cas de Champernowne, car un nombre pair se termine nécessairement par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6 ou 8, et en conséquence les chiffres pairs sont favorisés. Cependant, quand on va loin dans la suite, et que les nombres pairs ajoutés les uns après les autres deviennent très longs, cet avantage s'amoit (le dernier chiffre de chaque nombre pair finissant par être noyé parmi les autres), pour disparaître à l'infini.

Voici un nombre nettement plus complexe, car fondé sur la suite très irrégulière et très mystérieuse des nombres premiers : Erdős = 0,235711131719... constitué par la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17... Ce nombre doit son nom au mathématicien Paul Erdős, qui a montré, dans un article écrit avec le mathématicien Arthur Copeland, que ce nombre était équiréparti. Le frère de ce nombre est le nombre de Copeland :

0,46891012141516182021222425..., constitué des nombres composés – non premiers – les uns à la suite des autres. Là encore, grâce au travail d'Erdős et de Copeland, on sait que ce nombre est équiréparti.

Paul Erdős est un des mathématiciens les plus célèbres et étonnants de notre siècle. Il est né en Hongrie en 1913 et mort en 1996. Il a fait preuve d'une productivité extraordinaire, s'intéressant à une multitude de sujets qu'il a enrichis de quelques merveilles. Il a publié avec des mathématiciens de toutes nationalités, qu'il rencontrait lors du périple mondial permanent qu'a été sa vie. Il ne possédait pas d'adresse (c'était au sens propre un SDF!) et trouvait pénible de rester plus de 15 jours dans la même ville. On disait de Paul Erdős que, pour le rencontrer, il suffisait de rester là où l'on était et d'attendre qu'il passe. Il a cosigné, avec 458 chercheurs, 1 500 publications ce qui, dans le domaine des mathématiques pures, est un record absolu. Son premier résultat, qu'il établit à l'âge de 16 ans, fut la preuve, par une méthode directe, qu'entre les nombres n et $2n$ il y a toujours au moins un nombre premier. Infatigable jusqu'à ses derniers jours, il nous a légué des résultats astucieux et profonds qui fascineront longtemps encore la communauté des mathématiciens.



2. Les nombres sont classés par les propriétés des équations dont ils sont solutions (en haut) ou par les caractéristiques de leurs décimales (en bas). Les nombres rationnels ont des décimales périodiques, les nombres irrationnels ne sont pas exprimables comme des fractions, les nombres algébriques sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers, les nombres transcendants ne sont pas algébriques et, en base 10, les nombres équirépartis sont ceux pour lesquels la proportion de tous les chiffres est 0,1, les nombre-univers sont ceux où toute séquence est présente quelque part dans les décimales, les nombres normaux sont ceux où chaque séquence de chiffres de longueur n est présente en proportion $1/10^n$.

LES 1 000 PREMIÈRES DÉCIMALES DE QUELQUES NOMBRES

À chaque fois, on a compté le nombre de "0", de "1", . . . de "9" dans les 1 000 premières décimales. Les écarts avec ce qu'on attend d'un nombre équiréparti ne sont pas significatifs. En menant les calculs plus loin, l'égalisation entre l'utilisation de chaque chiffre devient encore plus nette. Toutes ces constantes numériques sont donc vraisemblablement des nombres équirépartis. Toutefois, on ne sait le prouver pour aucune.

π

1	2	3	4	5	6	7	8	9
116	103	103	93	97	94	95	101	105

e

1	2	3	4	5	6	7	8	9
96	98	109	99	85	99	99	103	112

 $\sqrt{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
99	108	82	100	104	90	104	113	92

 $\sqrt{3}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	100	97	84	93	103	98	125	108

 $\sqrt[3]{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
95	106	78	94	100	104	101	93	111

Les 78 "3" de $\sqrt[3]{2}$ semblent un peu faibles, mais, en calculant 2 000 décimales de racine cubique de 2, on trouve :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
197	204	179	188	224	210	194	190	187

Dans le deuxième millier de décimales, il y a eu 101 fois le "3". Rien d'anormal donc!

Le nombre suivant qui retiendra notre attention est plus ancien que les précédents : c'est le nombre de *Liouville*, égal à :

(des «1» en position $n!$, c'est-à-dire en position 1, 2, 6, 24, 120, ...)

Ce nombre est intéressant, car c'est un nombre régulier, simple, non équiréparti : à l'infini, la proportion des «0» devient 100 pour cent. Pourtant, le nombre de *Liouville* est transcendant, c'est même le premier nombre dont un mathématicien (Joseph Liouville, en 1844) ait réussi à prouver la transcendance, avant qu'on établisse celle de $e = 2,718281...$ et celle de $\pi = 3,1415926...$

Le nombre de *Liouville* montre qu'on peut être transcendant sans être équiréparti, ce qui n'était pas évident *a priori* : ainsi on ignore si π et e sont équirépartis ou pas (on pense qu'ils le sont sans avoir su faire autre chose que de le constater sur les quelques milliards de décimales qui ont été calculées). Le jour où on le démontrera, on aura prouvé que Dieu, qui a créé π , joue aux dés...

Au total, un nombre transcendant peut être équiréparti ou non ; un nombre équiréparti peut être transcendant ou non ; un nombre rationnel peut être équiréparti

ou non, et un nombre équiréparti peut être rationnel ou non. Remarquons que, si l'on sait que *Champernowne*, *Liouville*, *Pair* sont transcendants, pour *Erdős* et *Copeland*, on le soupçonne sans avoir su le démontrer. De plus, les quatre nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* ont une autre propriété fascinante : ce sont des nombres-univers.

LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont, par définition, les nombres qui contiennent toutes les suites possibles de chiffres : quelque part vous trouverez 421, quelque part vous trouverez 1998, mais aussi 314159 ou 1111111111. Ces nombres sont omniscients et universels : ainsi, pour frapper l'imagination, la photo de la pyramide de Louxor enregistrée sous format numérique (comme le fait un appareil de photo numérique) est une suite finie de chiffres et donc, par définition, elle est dans tout nombre-univers, de même bien sûr que le roman (mis sous format numérique) que vous rêvez d'écrire quand vous serez à la retraite. Tout l'univers réel ou imaginaire se trouve dans un nombre-univers, qui est bien entendu irrationnel, car le développement d'un nombre péri-

dique ne contient pas toutes les suites possibles de chiffres.

Que le nombre de *Champernowne* soit un nombre-univers est assez facile à voir, puisqu'il est composé de la suite de tous les nombres entiers : 421 apparaît inévitablement dans ses décimales (quand on écrit l'entier 421), de même que pour 1998 (quand on écrit 1998) ou 02 469 (quand on écrit 102 468), etc. Pour *Pair*, *Erdős*, *Copeland*, des raisonnements du même type montrent qu'il s'agit aussi de nombres-univers. Les nombres π et e ne peuvent être ajoutés avec certitude à cette liste, car aujourd'hui, même si l'on soupçonne qu'ils sont bien des nombres-univers, personne n'a su l'établir rigoureusement.

Les quatre nombres cités ici dont on a prouvé qu'ils étaient univers (*Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland*) le sont de manière robuste dans le sens suivant : si vous en prenez un et que vous changez un nombre fini (aussi grand soit-il) de ses décimales, vous obtenez un nouveau nombre-univers. En effet, si la séquence 421 est concernée par le changement fini, cela ne peut pas être le cas de toutes les séquences 4 210, 42 100, 421 000, etc., qui sont présentes ailleurs, et donc 421 (ou toute autre séquence) reste dans le nombre modifié.

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'équirépartition et celle d'universalité? Non, certains nombres équirépartis sont des nombres-univers (*Champernowne*), d'autres non (R_1 ou R_2), et certains nombres-univers sont équirépartis (*Champernowne*) et d'autres non (le nombre *Densité-nulle* défini plus loin).

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'être transcendant et la propriété d'être un nombre-univers? La réponse à cette question est incomplète. On sait que certains nombres transcendants sont univers (*Champernowne*), d'autres non (*Liouville*). En revanche, on ignore s'il existe des nombres-univers non transcendants (nous reviendrons plus loin sur ce trou dans nos connaissances).

LA ROBUSTESSE

Les nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős* et *Copeland* possèdent une «robustesse» plus grande encore que celle mentionnée plus haut. Non seulement, ils restent univers quand on change un nombre fini de leurs chiffres, mais ils résistent aussi «aux changements infinis se raréfiant» : si vous modifiez les décimales de l'un d'eux en toutes les positions qui sont des nombres carrés 1, 4, 9, ..., n^2 , etc., il reste un nombre-univers. À la place des positions carrées, vous pouvez changer leurs décimales en toutes les positions correspondant à un ensemble infini A se

«raréfiant à l'infini», c'est-à-dire tel que le nombre d'éléments de A inférieur à n divisé par n , tend vers 0 à l'infini (l'ensemble des nombres premiers ou celui des puissances de 2 sont des exemples de tels ensembles se raréfiant à l'infini).

Le nombre suivant, *Densité-nulle*, égal à 0,1020030000004..., est un mélange entre *Champernowne* et *Liouville* : il nous permettra de répondre à quelques questions simples. Il est constitué des entiers en écriture décimale les uns derrière les autres, séparés de 1! fois «0», puis 2! fois «0», etc.

Ce nombre est un nombre-univers transcendant, mais n'est pas équiréparti, car la densité des «0» tend vers l'unité, alors que la densité des autres chiffres tend vers 0. Par ailleurs, ce nombre-univers n'est pas robuste «aux changements infinis se raréfiant», car, en transformant les chiffres autres que «0» en «0», vous n'effectuez des modifications qu'en des positions se raréfiant à l'infini et obtenez cependant un nombre constitué uniquement de «0», qui n'est plus un nombre-univers. Cela prouve que tous les nombres-univers ne sont pas aussi robustes que les quatre cités ci-dessus. Remarquons aussi que *Densité-nulle* montre qu'on peut tout contenir et malgré cela n'être composé pratiquement que de «0» : même dans un nombre submergé de «0», il y a encore la place pour tout l'univers !

La grande robustesse aux changements des quatre nombres-univers *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* provient d'une propriété en apparence extraordinaire, la normalité, qui est une sorte de synthèse de l'équirépartition et de l'universalité.

LES NOMBRES NORMAUX

Un nombre est normal en base 10 si son développement décimal possède la propriété suivante :

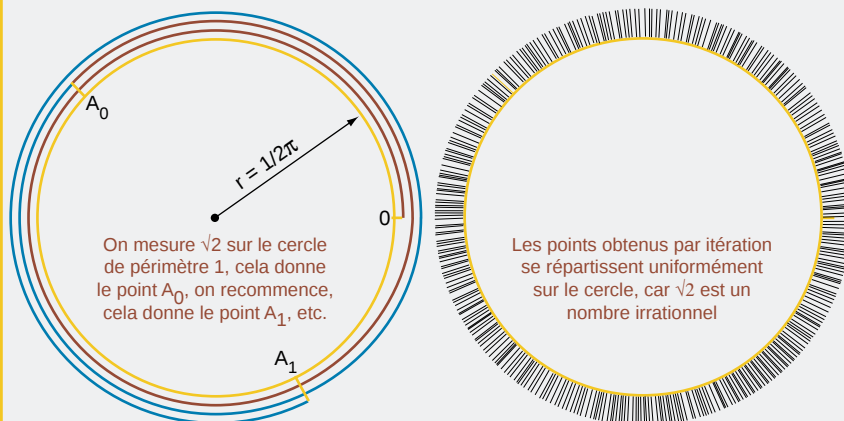
- les 10 chiffres apparaissent en proportions équilibrées (10 pour cent de chaque) ;
- les 100 paires possibles de chiffres consécutifs (00, 01, 02, ..., 99) apparaissent aussi en proportions équilibrées (chacune apparaît avec une fréquence de 1 pour cent) ;
- les 1 000 triplets de chiffres consécutifs (000, 001, ..., 999) apparaissent en proportions équilibrées (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Non seulement dans un nombre normal vous trouvez tout (donc un nombre normal est un nombre-univers), mais tout y sera parfaitement équilibré (un nombre normal est donc un nombre équiréparti). La séquence 37 apparaîtra en moyenne autant de fois que la séquence 72, c'est-à-dire une fois sur 100 ; la séquence

TOUT NOMBRE IRRATIONNEL EST PRESQUE UN NOMBRE-UNIVERS

Le mathématicien Hermann Weyl a fourni en 1916 une caractérisation remarquable des nombres irrationnels qui n'est pas sans rapport avec la notion de nombre-univers.

On trace un cercle de périmètre unité, et donc de rayon $1/2\pi$. On fixe une origine sur ce cercle. On se déplace à partir de l'origine sur le périmètre et, à chaque fois qu'on a parcouru une longueur de x , on marque un point sur le cercle. D'après le résultat de H. Weyl, si x est irrationnel, les marques que l'on fait sont en nombre infini et se répartissent uniformément sur le cercle (comme s'il s'agissait de points choisis au hasard). Si x est rationnel, les marques sont en nombre fini (on s'arrête toujours aux mêmes endroits).



Une conséquence de ce résultat est que si x est irrationnel et si s est une séquence donnée de chiffres (par exemple 43254), alors il existe un multiple de x qui possède cette séquence dans sa représentation décimale. En quelque sorte, pris globalement, les multiples d'un irrationnel ont la propriété qui définit un nombre-univers.

1998 apparaîtra avec une fréquence de 1/10000, comme la séquence 8 642, etc.

Les contraintes qu'on impose à ces nombres sont si nombreuses qu'on peut se demander si elles sont compatibles, c'est-à-dire s'il existe un nombre dont on puisse prouver qu'il est normal.

Les nombres e et π sont, comme d'habitude, de bons candidats d'après les chiffres qu'on en connaît, mais, comme d'habitude aussi, rien n'a été démontré sur leur normalité. Heureusement, *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* sont plus faciles à maîtriser, et l'on a prouvé qu'ils étaient normaux en base 10.

Cette propriété de régularité des décimales d'un nombre, comme les deux précédentes, ne semble pas interférer avec celle d'être transcendant. *Liouville* et *Densité-nulle* sont transcendants sans être normaux, alors que *Champernowne* et *Pair* sont transcendants et normaux.

LES IRRATIONNELS ALGÈBRIQUES

Si l'on fait le bilan des relations indiquées entre les propriétés équationnelles des nombres et les propriétés de leurs décimales, on remarque que (sauf pour les nombres entiers et rationnels, où tout

est très simple) tout semble possible : dès qu'un nombre est irrationnel, son niveau de complexité équationnelle ne paraît pas interagir sur le niveau de complexité de ses décimales, ni l'inverse.

Cette absence d'interaction ne doit pas être considérée comme définitive, car elle résulte d'un certain nombre d'ignorances. La gravité et la profondeur de ces ignorances apparaissent nettement quand on considère le cas des nombres irrationnels algébriques (comme $\sqrt{2}$) : que ce soit à propos de la propriété d'équirépartition, d'universalité ou de normalité, le savoir mathématique concernant les nombres algébriques irrationnels est, aujourd'hui encore, rigoureusement nul.

En effet, d'après ce que nous savons pour l'instant, il se peut que :

- tout nombre algébrique irrationnel soit normal,
- qu'aucun nombre algébrique irrationnel ne soit normal,
- que certains nombres algébriques irrationnels soient normaux et que d'autres ne le soient pas.

Pour l'équirépartition, la situation est la même, ainsi que pour l'universalité. Quant à des propriétés des décimales qui permettraient de distinguer les nombres algébriques exprimables par radicaux et

RÉGULARITÉ DES DÉCIMALES ET TRANSCENDANCE

Les mathématiciens J. Loxton et A. van der Poorten ont récemment établi le remarquable résultat suivant : un nombre automatique est, ou bien rationnel, ou bien transcendant.

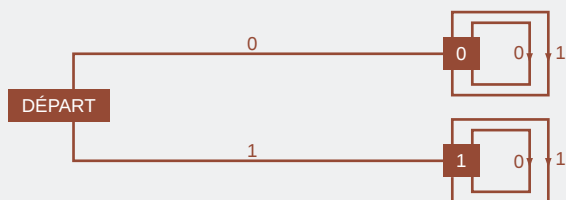
Un nombre x est dit automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer le chiffre numéro n du développement de x en fonction du développement de n (voir exemple plus bas). Les nombres automatiques sont les nombres dont le calcul du développement peut se faire par un moyen élémentaire.

Le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten signifie que, si un nombre possède un développement simple à calculer, alors il est, soit équationnellement simple (c'est un rationnel), soit équationnellement complexe (c'est un nombre transcendant). En conséquence, les nombres algébriques irrationnels (par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$) ont nécessairement des développements complexes. On est encore loin d'établir que les nombres algébriques irrationnels sont équirépartis, univers ou normaux (ce que certains conjecturent), mais le résultat va dans cette direction.

Deux nombres automatiques

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un rationnel, l'autre transcendant.

Le nombre rationnel $2/3$ qui s'écrit $0,101010101\dots$ en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le chiffre en position n du développement binaire de $2/3$, il suffit d'utiliser l'automate suivant :

AUTOMATE POUR LA SUITE $2/3 = 0,101010101\dots$

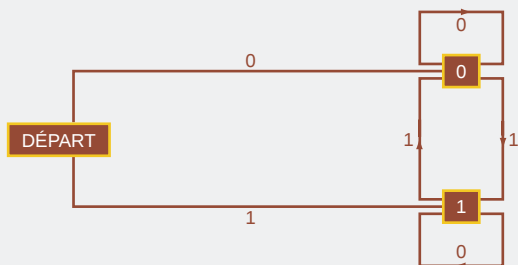
On se place sur le graphe de l'automate en position départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres de n écrit en base 2 en suivant la flèche correspondant au chiffre lu. On se déplace ainsi d'un nœud du graphe à l'autre jusqu'à avoir lu entièrement le développement de n . Le nom du nœud auquel on est arrivé indique alors le chiffre numéro n du développement de x .

Exemple : pour connaître le chiffre 6 de $2/3$, on écrit 6 en base 2, c'est 110, on se place au nœud [départ], on suit les flèches marquées 0, 1, 1, ce qui nous conduit au nœud [0] : le sixième chiffre de $2/3$ en base 2 est un 0.

Le nombre de Thue-Morse est un nombre automatique non périodique, donc il est transcendant (d'après le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten).

Thue-Morse = $0,1101001100101101001011001101001\dots$

Ce nombre est constitué des éléments de la suite de Thue-Morse placés les uns derrière les autres. Le n -ième chiffre est un "1" si l'écriture de n en base 2 comporte un nombre impair de "1" ; sinon c'est un zéro. Le nombre 5, par exemple, s'écrit 101 en base deux, donc le chiffre placé en position 5 après la virgule dans Thue-Morse sera un 0 (101 comporte un nombre pair de 1). La suite des chiffres de Thue-Morse peut aussi être définie en partant de 0, puis en accolant le complément, 1, ce qui donne 01, puis en recommençant à accoler le complément indéfiniment (0110, 01101001, 0110100110010110, etc.) Voici l'automate du nombre de Thue-Morse :

AUTOMATE POUR LA SUITE DE THUE-MORSE = $0,110100110010110\dots$

ceux qui ne le sont pas, personne aujourd'hui n'en a, non plus, la moindre idée.

Quelques résultats un peu compliqués et épars fournissent l'indice que certaines relations pourraient avoir cours : il se pourrait d'ailleurs que tout nombre algébrique irrationnel soit équiréparti, univers et normal. Les calculs numériques sur $\sqrt{2}$ en montrent la possibilité.

Le résultat récent de J. Loxton et A. van der Poorten est qu'un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant : il semble accréditer l'hypothèse que tout nombre dont les décimales sont régulières est, soit équationnellement très simple (c'est-à-dire rationnel), soit équationnellement très compliqué (c'est-à-dire transcendant). Le fait que *Champernowne* et *Liouville* soient transcendants ne serait alors que la conséquence de la régularité de leurs décimales conjointe avec leur non-périodicité.

La recherche des ponts entre les propriétés équationnelles (qui sont indépendantes de la base de numération) et les propriétés liées aux chiffres des nombres (liées à la base de numération) semble d'une grande difficulté. La situation est comparable à celle de la conjecture de Goldbach, qui indique que tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture toujours non démontrée) : la propriété d'être un nombre premier est une propriété multiplicative (liée à la multiplication), celle d'être une somme de deux nombres premiers est avant tout une propriété additive (liée à l'addition). Démontrer la conjecture de Goldbach nécessite donc d'établir un pont entre deux zones éloignées de l'univers mathématique, ce qui est difficile, comme l'est la construction d'un pont entre les propriétés équationnelles et les propriétés des développements des nombres. Les mathématiciens regardent les objets du monde abstrait sous divers angles, ils essaient de les mettre en relation et parfois, malgré leur désir acharné d'y parvenir, ils s'avouent temporairement impuissants.

D.G. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in *J. London Math. Soc.*, 8, pp. 254-260, 1933.

A. COPELAND et P. ERDÖS, *Note on Normal Numbers*, in *Bulletin American Mathematical Society*, 52, pp. 857-860, 1946.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Association of America, Dolciani Math. Expositions, n° 11, 1993.

J.H. LOXTON et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic Properties of Automata...* *J. reine angew. Math.* 392, pp. 57-69, 1988.

