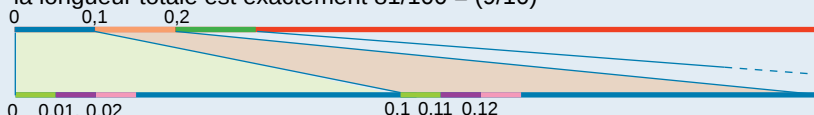


5. UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE BOREL

Les nombres qui ne sont pas univers forment une partie négligeable. Montrons d'abord que les nombres réels entre 0 et 1 qui n'ont pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas "0" constituent exactement l'intervalle $[1/10, 1]$, de longueur totale $9/10$. De la même façon, en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en 100 intervalles de longueur $1/100$ correspondant aux nombres commençant par 0,00 0,01 0,02 ... 0,99, on voit que les nombres qui n'ont de 0 ni en première position ni en seconde position constituent un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est exactement $81/100 = (9/10)^2$



De la même façon, en découpant en petits intervalles, on voit que les nombres n'ayant de "0" dans aucune des positions 1, 2 ... m , après la virgule, constituent des intervalles dont la longueur totale est $(9/10)^m$. Cela montre que les nombres entre 0 et 1 n'ayant pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Il en va de même pour les nombres n'ayant pas de "1", etc., ou n'ayant pas la séquence "123" ou "1998", etc. (utiliser le même raisonnement avec la base 100, 1 000 etc., avec x , $10x$, $100x$, etc.). Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'est aussi, on voit que les nombres qui ne sont pas univers constituent un ensemble négligeable.

rationnel aussi proche qu'on le désire) serait négligeable ! Dur à avaler !

L'explication de cette apparente difficulté n'est-elle pas que la notion mathématique d'ensemble négligeable est mal formulée et qu'on peut démontrer de n'importe ensemble qu'il est négligeable ?

Non. Il existe des ensembles qui ne sont pas négligeables, par exemple l'intervalle $[-1, +1]$ (ou n'importe quel intervalle $[a, b]$ avec a inférieur à b). Si vous recouvrez les points de $[-1, +1]$ par une suite d'intervalles, comme nous l'avons fait pour l'ensemble des A_n , alors vous

découvrirez toujours que la longueur cumulée des intervalles utilisés dépasse 2 : l'intervalle $[-1, +1]$ n'est pas négligeable.

Plus on l'étudie, plus on l'aime ! La définition mathématique d'ensemble négligeable formalise notre notion intuitive d'ensemble de peu d'importance. La situation est caractéristique d'un progrès scientifique : notre intuition est confirmée sur les ensembles finis (ces ensembles sont négligeables) et sur l'ensemble constitué par l'intervalle $[-1, +1]$ (cet ensemble n'est pas négligeable). Appliquée à d'autres ensembles (comme celui

des rationnels), la conclusion étonne dans un premier temps, mais n'amène aucune véritable difficulté.

L'adoption de la définition formelle d'ensembles négligeables est maintenant universelle et ne choque plus. Les fonctions continues, mais n'ayant de dérivée en aucun point (qui résultent aussi des progrès de notre compréhension du continu), contredisaient aussi nos intuitions initiales, et pourtant elles ont perdu tout pouvoir scandaleux aujourd'hui.

L'étude des ensembles négligeables conduit à quelques propriétés attendues et inattendues. Un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion de deux ensembles négligeables l'est encore. Le complémentaire d'un ensemble négligeable ne l'est jamais et est partout dense ; ce dernier résultat correspond à l'idée naturelle que, si l'on enlève un ensemble négligeable à l'ensemble des réels, on obtient quelque chose qui est presque tout. Plus étonnante est la propriété que la réunion d'une infinité numérotée $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable : nous verrons plus loin qu'elle a des conséquences remarquables.

La notion d'ensemble négligeable ne coïncide pas exactement avec la notion d'ensemble « fini ou infini dénombrable » élaborée à la même époque par Cantor. Le monde des nombres est plus subtil : certains ensembles infinis non dénombrables (donc déjà assez gros) sont négligeables. Le plus célèbre ensemble non dénombrable négligeable est l'ensemble triadique de Cantor, qui est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 peut se faire sans utiliser le 1 (voir la figure 4). Avec le résultat de Borel, nous allons rencontrer bien d'autres ensembles infinis non dénombrables négligeables.

UN NOMBRE EST PRESQUE CERTAINEMENT ÉTONNANT !

Un nombre réel est un nombre normal en base 10 si, dans son développement en base 10 : les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00, 01, 02, 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de 1 pour cent) ; les 1 000 triplets de chiffres (000, 001, 999) apparaissent en proportion équilibrée (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Un résultat, démontré par Émile Borel en 1909, nous conduit au bord du paradoxe : l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas normaux en base 10 est négligeable (quoique aussi non dénombrable).

6. LE NOMBRE DE CHAMPERNOWNE EN DIVERSES BASES

SUR 1 000 CHIFFRES

BASE 2 : CH = 0,00011111100110101110110011011...

NOMBRE DE 0 : 499

NOMBRE DE 1 : 499

BASE 3 : CH = 0,0100222222222222121022021000022...

NOMBRE DE 0 : 339

NOMBRE DE 1 : 326

NOMBRE DE 2 : 335

BASE 4 : CH = 0,0133212231310313222020333220013001222120332...

NOMBRE DE 0 : 246

NOMBRE DE 1 : 247

NOMBRE DE 2 : 261

NOMBRE DE 3 : 246

BASE 5 : CH = 0,0302040012323112114114102121314414423002412...

NOMBRE DE 0 : 217

NOMBRE DE 1 : 204

NOMBRE DE 2 : 183

NOMBRE DE 3 : 192

NOMBRE DE 4 : 204

BASE 10 : CH = 0,123456789101112131415...

0 : 66

1 : 177

2 : 177

3 : 148

4 : 77

5 : 77

6 : 77

7 : 67

8 : 67

9 : 67

Le nombre de Champernowne, constitué par la suite des entiers, est "par construction" normal en base 10 et, selon Borel, il est presque certainement normal dans toutes les bases. On le vérifie sur les fréquences en base 1, 2, 3, 4, 5 et 10 où, bien que prouvée, l'égalisation est moins apparente.

Assez naturellement, on dit d'une propriété qui est vérifiée pour tout nombre réel, sauf pour ceux appartenant à un ensemble négligeable, qu'elle est *presque certaine*, et donc que le résultat de Borel peut s'exprimer en huit mots : être normal en base 10 est presque certain.

Une interprétation probabiliste du résultat de Borel est possible : en tirant au hasard les décimales d'un nombre réel avec un système équitable (qui ne favorise aucun chiffre), on obtient un nombre normal en base 10, avec une probabilité de 100 pour cent. Les versions probabilistes ou topologiques du résultat de Borel sont profondément surprenantes : être normal est une propriété tellement forte (pour être normal, il faut se soumettre simultanément à une infinité de contraintes) qu'on reste interloqué du résultat de Borel : tous les nombres réels, sauf une partie négligeable d'entre eux, satisfont cette infinité de contraintes que le hasard produit avec certitude ! La version topologique possède l'avantage de ne pas faire appel à l'idée irréaliste d'une série infinie de tirages au sort.

Il résulte du théorème de Borel que la propriété être équiréparti en base 10 (avoir autant de 0 que de 1, que de 9 dans son développement décimal) est presque certaine. De même encore, être un nombre-univers en base 10 (posséder un développement décimal qui contient toutes les séquences finies possibles de chiffres) est une propriété presque certaine.

Quand on change de base de numération, les résultats précédents restent vrais, et donc «être normal en base 2», «être normal en base 3», etc., sont toutes des propriétés presque certaines. Le fait évoqué plus haut qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore un ensemble négligeable se traduit en la propriété que la conjonction d'une infinité dénombrable de propriétés presque certaines l'est aussi. Les propriétés «être normal dans toutes les bases de numération simultanément», «être univers dans toutes les bases simultanément» ou «être équiréparti dans toutes les bases simultanément» sont donc presque certaines.

Mis sous cette forme ultime, le résultat de Borel dépasse les bornes du raisonnable. En effet, alors qu'on connaît des nombres normaux en base 10 comme le nombre de Champernowne 0,123456789101112... (voir *Champernowne et quelques autres*, par Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science*, décembre 1998), on ne connaît de manière explicite aucun nombre normal en toute base.

PRESQUE PARTOUT, MAIS INTROUVABLE !

Si ce n'est pas un paradoxe, cela y ressemble : bien qu'un nombre soit presque certainement normal en toute base simultanément, on ne sait définir de manière explicite aucun nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en toute base : les nombres normaux en toute base sont tout (à un ensemble négligeable près), mais on n'en a aucun !

Le seul début d'exception est fourni par la théorie algorithmique de l'information, qui permet de définir un nombre nor-

mal en toute base (le nombre Oméga de Chaitin), mais dont il est impossible de connaître les décimales. Ce nombre n'est pas donné par une méthode qui en permette le calcul et ne peut donc pas satisfaire notre désir de connaître vraiment un nombre normal en toute base (on peut d'ailleurs s'interroger sur la réalité de nombres, comme le nombre Oméga, mathématiquement bien définis, mais dont les décimales sont par principe incalculables).

Le mathématicien, en étudiant sur un plan abstrait l'existence des nombres normaux, prouve de façon parfaitement rigoureuse que les nombres normaux dans toute base sont infiniment majoritaires ; pourtant, le mathématicien ne réussit pas même à en expliciter un seul !

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

On pourrait en conséquence avoir des doutes concernant le sens de ce que démontrent les mathématiciens. D'où l'idée de tester expérimentalement, pour des nombres particuliers, ce que le résultat de Borel énonce sur un plan général. Si nous prenons un nombre au hasard sans tricher, c'est-à-dire sans en fixer nous-mêmes les chiffres (directement ou indirectement) par une règle artificielle, comme nous le faisons quand nous définissons le nombre de Champernowne, nous devrions tomber sur un nombre normal en base 10, et en n'importe quelle base. C'est effectivement ce que nous constatons, par exemple avec $\sqrt{2}$, avec π , avec e , etc. Tous ces nombres sont expérimentalement des nombres normaux en toute base.

Le théorème de Borel suggère aussi qu'en prenant un nombre artificiel en base 10, comme le nombre de Champernowne et en l'écrivant en base 2, ou 3, etc., on trouvera un nombre normal en base 2 ou 3, etc. De même, en prenant un nombre artificiel non normal en base 10 (comme le nombre de Liouville $L = 0,1100010$, des 1 en position $1!$, $2!$, $3!$, etc.), il sera normal une fois écrit en base 2, 3, etc. Sauf exception conçue exprès, quelle que soit la base B choisie et quel que soit le nombre x choisi, on s'attend à ce que x soit normal en base B .

Il faut être attentif aux exceptions, car certaines relations parfaitement connues font qu'un nombre défini pour n'être pas normal en une certaine base ne le sera pas dans une autre. Wolfgang Schmidt a par exemple montré que tout nombre non normal en base n ne le sera pas en base m s'il existe i et j vérifiant que $n^i = m^j$. À condition de tenir compte de ces exceptions faciles à contrôler, nous devons nous attendre à ne rencontrer que des nombres normaux en toute base. Cela nous conduit à formuler le principe abstrait suivant, que je propose de dénommer l'heuristique de Borel :

«Quand on considère un nombre et qu'on l'écrit en une base B , à moins qu'il n'ait été défini par une règle qui en fixe les chiffres en cette base-là, et qui

en empêche exprès la normalité, on obtiendra toujours un nombre normal en base B (et donc équiréparti en base B, et univers en base B).»

En particulier, tout nombre irrationnel algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) doit être normal en toute base. Toute constante comme π , e , $\log(3)$ doit être normale en toute base. Tout nombre possédant une expression algébrique simple composée avec ces nombres (par exemple, $e + \pi$, $99 \pi / \log(3)$, $\log(\pi)$, etc., doit être normal en toute base.

Le «doit» de la phrase précédente est très étrange, et cette formulation ne peut que déplaire au mathématicien traditionnel. Ceux que je dépeins par «mathématiciens traditionnels» ne tiennent compte que des vérités démontrées. Or l'écart entre ce que donne l'heuristique de Borel et ce que donne la connaissance mathématique (c'est-à-dire ce qui est démontré) est le plus grand possible : personne ne sait RIEN prouver de ce qu'indique l'heuristique de Borel (pourtant vérifiée numériquement à chaque fois qu'on le tente et pourtant démontrée globalement par Borel il y a presque 100 ans).

La figure 6 indique les développements du nombre de Champernowne en diverses bases ; d'autres expérimentations, faites ces dernières années sur des millions de décimales, confirment aussi l'heuristique de Borel. Une étude de S. Pincus et R. Kalman en 1997 fait exception et prétend détecter des différences subtiles entre les décimales des divers nombres irrationnels qui pourraient peut-être agir sur la normalité. Cette étude doit être éclaircie.

Ces mathématiques qui suggèrent des théorèmes généraux que jamais personne n'arrive à prouver dans aucun cas particulier ne sont-elles pas étranges ? Comment corriger cette anomalie des nombres partout présents, mais introuvables ? Comment arranger les mathématiques pour éviter qu'elles n'autorisent des démonstrations globales ne se traduisant jamais en cas précis ?

QUELS REMÈDES ?

Lorsque l'écart est si grand entre, d'une part, ce qu'on voit expérimentalement ou par le raisonnement global et, d'autre part, ce qu'on réussit à prouver en particulier, il est temps d'être inquiet (comme un physicien le serait si on lui présentait une théorie qui prouverait l'existence de particules partout présentes, mais dont il ne verrait jamais aucune preuve manifeste). L'heuristique de Borel ne crée pas de contradiction explicite, mais la situation est rationnellement insatisfaisante et pourrait signaler un défaut majeur de nos conceptions. Si nous réussissons un jour à trouver des nombres dont nous

8. PROPRIÉTÉS "VRAIES ET FAUSSES"

Si une propriété est vérifiée pour tout nombre, sauf ceux appartenant à un ensemble négligeable, elle est presque certaine (ou presque certainement vraie). Si les nombres qui vérifient la propriété constituent un ensemble négligeable, la propriété est presque certainement fausse.

Propriétés "vraies" :

- être équiréparti en base B,
- être univers en base B,
- être normal en base B,
- être équiréparti en toute base,
- être univers en toute base,
- être normal en toute base,

Propriétés "fausses" :

- être rationnel,
- être algébrique,
- ne pas utiliser de "0" dans son développement décimal.
- appartenir à l'ensemble de Cantor,
- avoir une suite de chiffres programmable par algorithme.
- être définissable dans le système mathématique de la théorie des ensembles.

prouvions qu'ils sont normaux en toute base, ce sera parfait. Nous aurons comblé le trou entre propriétés générales et propriétés particulières. Le quasi-paradoxe sera résolu sans que nous ayons rien à changer dans notre conception, et notre inconfort actuel n'aura été que temporaire et sans signification.

L'attente a déjà été longue, et il est devenu légitime de s'interroger sur la nature de ce quasi-paradoxe : n'appelle-t-il pas une réforme dans notre vision des mathématiques ? Le continu du mathématicien n'est pas celui du physicien, car ce dernier n'accorde aucun sens à l'affirmation qu'il y a une infinité non dénombrable d'instantanés dans une seconde. La méfiance implicite du physicien n'est-elle pas justifiée ?

Puisque le continu du mathématicien se fonde sur la théorie des ensembles (car le continu se construit à partir des opérations de la théorie des ensembles prise comme allant de soi), peut-être faut-il renoncer à la théorie des ensembles ou la réformer ? C'est ce point qu'étudient certains logiciens, comme T. E. Forster, de l'Université de Cambridge, qui formule des théories des ensembles avec l'ensemble de tous les ensembles (dans la théorie usuelle de Cantor, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles), ou comme E. Nelson, qui propose une théorie dite non standard (à la base d'une conception des infiniment petits), ou comme J. Barwise, qui défend une théorie des hyper-ensembles (permettant l'étude des paradoxes liés aux autoréférences). D'autres encore proposent de

nouveaux axiomes (par exemple portant sur les grands ensembles) : ces nouveaux axiomes, en augmentant le pouvoir de preuve des mathématiques, permettront peut-être de démontrer ces propriétés de normalité.

À l'opposé de ces voies tentant de rendre plus puissante la théorie des ensembles, d'autres recherches remettent en cause la logique usuelle. Les mathématiciens intuitionnistes et constructivistes espèrent, par des raisonnements plus exigeants, conjurer les quasi-paradoxes de l'existence (comme celui résultant de l'heuristique de Borel) et pour cela refusent par principe qu'une démonstration puisse aboutir à un énoncé d'existence («il existe un objet vérifiant telle propriété») sans qu'elle soit accompagnée d'une méthode de construction de l'objet en question. Leurs méthodes sont malheureusement restrictives et compliquent le développement de l'analyse.

On le voit, les nombres normaux, les nombres-univers, les ensembles négligeables et l'heuristique de Borel conduisent à des interrogations sur la nature profonde des mathématiques. Même si beaucoup de mathématiciens refusent de considérer les solutions alternatives avec sérieux et préfèrent attendre sans changer le monde ensembliste adopté au début du xx^e siècle, rien n'assure qu'ils ont raison et que les difficultés du monde ensembliste classique ne resurgiront pas plus gravement encore à l'occasion d'un autre problème.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lil.fr

E. BOREL, Presque tous les nombres réels sont normaux, Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, pp. 247-271, 1909.

J. BARWISE et L. MOSS, Vicious Circles, CSLI Publications, Stanford, Californie, 1996.

J. BORWEIN et P. BORWEIN, Making Sense of Experimental Mathematics, CECM, Simon Fraser University, Canada, 1996.

D. CHAMPERNOWNE, The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten, in J. London Math. Soc. 8. pp. 254-260, 1933.

J.-P. DELAHAYE, Le fascinant nombre π , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

T. FORSTER, Set Theory with Universal Set, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1995.

V. KLEE et S. WAGON, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1993.

W. SCHMIDT, On Normal Numbers, in Pacific Journal of Mathematics, 10, p. 3, 1960.

Photogram-Stone Images



Bulles de savants

IAN STEWART

À propos de films où les mousses coincent la bulle.

Première devinette : quel solide possède 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces, chacune ayant 5 côtés ? Le dodécaèdre. Seconde devinette : quel solide a 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces, chacune de 5,103 côtés ? Vous pensez peut-être à un fractal tarabiscoté ? Ce n'est pas la bonne piste : le solide est familier. Recherchez-le en buvant un verre de bière, en prenant une douche ou en faisant la vaisselle.

Même avec ces indications, vous aurez du mal à deviner, car la question était biaisée : le solide en question n'a les propriétés annoncées qu'en moyenne et, de surcroît, ce n'est pas un vrai solide. C'est la mousse, qui est composée de myriades de bulles, lesquelles sont de minuscules polyèdres irréguliers. En moyenne, les bulles d'une mousse ont 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces. Une bulle moyenne ressemblerait à un «tridéca-et-des-poussières-èdre».

Les mathématiques des bulles et de la mousse sont nées dans les années 1830, bien après l'invention du savon, lorsque le physicien belge Joseph Plateau plongea des cadres en fils de fer dans de l'eau savonneuse. Malgré 170 années de recherches, on ne comprend pas plusieurs des phénomènes observés par Plateau.

Par exemple, personne n'a démontré la conjecture de la double bulle, qui

stipule que la forme adoptée par deux bulles adjacentes est composée de trois surfaces sphériques (voir la figure 3). En 1995, Joel Hass, de l'Université de Californie, et Roger Schlafly, de la Société *Real Software*, ont démontré cette conjecture pour deux bulles de même volume.

LES SURFACES MINIMALES

En 1829, Plateau se brûla les yeux alors qu'il observait le Soleil à l'œil nu pendant 25 secondes. Il en resta aveugle, mais continua de contribuer toute sa vie à ce domaine des mathématiques éminemment visuel : la géométrie dans l'espace.

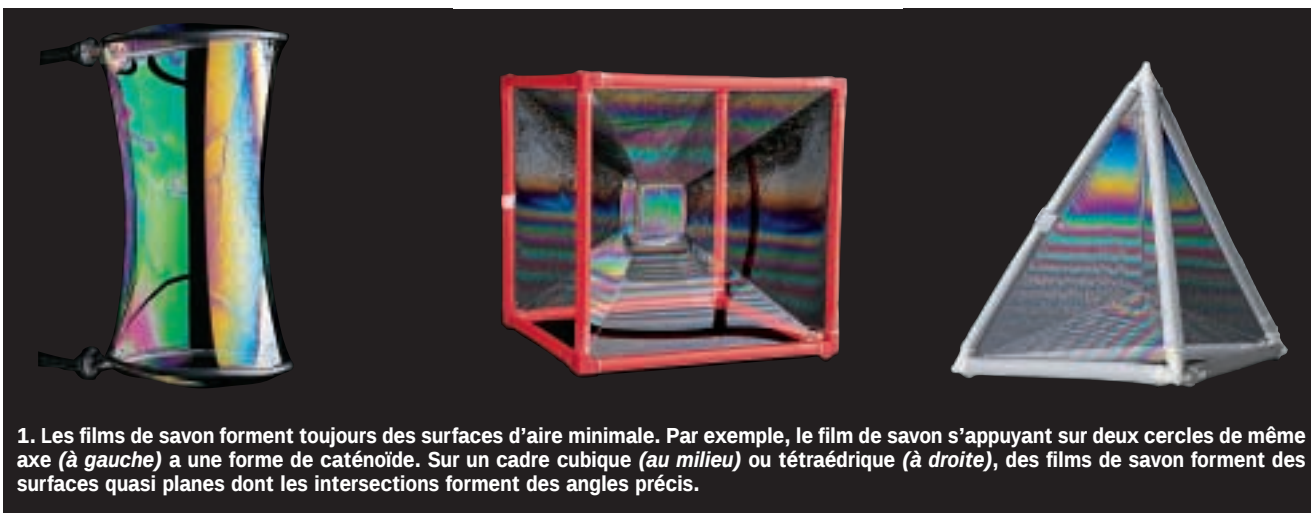
Les bulles et les films de savon appartiennent à la famille mathématique très étudiée des surfaces minimales : des surfaces répondant à certaines contraintes et dont l'aire est minimale. Cette minimisation de l'aire découle du principe universel de minimisation de l'énergie. Puisque l'énergie de tension d'un film de savon est proportionnelle à sa surface, l'énergie des bulles est minimale quand l'aire l'est.

Un film de savon à l'équilibre est comparable à une surface mathématique d'épaisseur nulle : son épaisseur, de l'ordre de un milliardième de mètre, est négligeable. Sans aucune contrainte, une bulle de savon évolue jusqu'à ce que son

aire soit nulle, mais on leur impose généralement de contenir un volume précis ou d'avoir leur frontière sur une certaine surface ou sur une certaine courbe. Par exemple, une bulle qui se pose sur une table est une demi-sphère : c'est la plus petite surface entourant un volume donné (l'air emprisonné dans la bulle) et ayant sa frontière sur un plan.

Plateau s'est intéressé aux surfaces dont la frontière est une courbe imposée. Il matérialisait les courbes par un fil ou par plusieurs fils soutenus par un cadre. Par exemple, quelle est la surface minimale dont la frontière est formée de deux cercles parallèles, de même rayon ? Le mathématicien suisse Leonhard Euler, le «prince des mathématiques», démontra que la véritable surface minimale ayant une telle frontière n'est pas un cylindre, mais un caténoïde, formé par rotation d'une courbe en U, nommée chaînette, autour de la droite passant par les deux centres des cercles.

La chaînette est la courbe que prend naturellement une chaîne homogène pendue à deux crochets (ici à la même hauteur). Elle ressemble à une parabole avec un rien d'embonpoint près du sommet. Deux fils de fer circulaires plongés dans de l'eau savonneuse illustrent le théorème d'Euler en faisant apparaître le caténoïde dans toute sa splendeur (voir la figure 1).



1. Les films de savon forment toujours des surfaces d'aire minimale. Par exemple, le film de savon s'appuyant sur deux cercles de même axe (à gauche) a une forme de caténoïde. Sur un cadre cubique (au milieu) ou tétraédrique (à droite), des films de savon forment des surfaces quasi planes dont les intersections forment des angles précis.

Photographies de Michael Dalton, Fundamental Photographs