

en empêche exprès la normalité, on obtiendra toujours un nombre normal en base B (et donc équiréparti en base B, et univers en base B).»

En particulier, tout nombre irrationnel algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) doit être normal en toute base. Toute constante comme π , e , $\log(3)$ doit être normale en toute base. Tout nombre possédant une expression algébrique simple composée avec ces nombres (par exemple, $e + \pi$, $99 \pi / \log(3)$, $\log(\pi)$, etc., doit être normal en toute base.

Le «doit» de la phrase précédente est très étrange, et cette formulation ne peut que déplaire au mathématicien traditionnel. Ceux que je dépeins par «mathématiciens traditionnels» ne tiennent compte que des vérités démontrées. Or l'écart entre ce que donne l'heuristique de Borel et ce que donne la connaissance mathématique (c'est-à-dire ce qui est démontré) est le plus grand possible : personne ne sait RIEN prouver de ce qu'indique l'heuristique de Borel (pourtant vérifiée numériquement à chaque fois qu'on le tente et pourtant démontrée globalement par Borel il y a presque 100 ans).

La figure 6 indique les développements du nombre de Champernowne en diverses bases ; d'autres expérimentations, faites ces dernières années sur des millions de décimales, confirment aussi l'heuristique de Borel. Une étude de S. Pincus et R. Kalman en 1997 fait exception et prétend détecter des différences subtiles entre les décimales des divers nombres irrationnels qui pourraient peut-être agir sur la normalité. Cette étude doit être éclaircie.

Ces mathématiques qui suggèrent des théorèmes généraux que jamais personne n'arrive à prouver dans aucun cas particulier ne sont-elles pas étranges ? Comment corriger cette anomalie des nombres partout présents, mais introuvables ? Comment arranger les mathématiques pour éviter qu'elles n'autorisent des démonstrations globales ne se traduisant jamais en cas précis ?

QUELS REMÈDES ?

Lorsque l'écart est si grand entre, d'une part, ce qu'on voit expérimentalement ou par le raisonnement global et, d'autre part, ce qu'on réussit à prouver en particulier, il est temps d'être inquiet (comme un physicien le serait si on lui présentait une théorie qui prouverait l'existence de particules partout présentes, mais dont il ne verrait jamais aucune preuve manifeste). L'heuristique de Borel ne crée pas de contradiction explicite, mais la situation est rationnellement insatisfaisante et pourrait signaler un défaut majeur de nos conceptions. Si nous réussissons un jour à trouver des nombres dont nous

8. PROPRIÉTÉS "VRAIES ET FAUSSES"

Si une propriété est vérifiée pour tout nombre, sauf ceux appartenant à un ensemble négligeable, elle est presque certaine (ou presque certainement vraie). Si les nombres qui vérifient la propriété constituent un ensemble négligeable, la propriété est presque certainement fausse.

Propriétés "vraies" :

- être équiréparti en base B,
- être univers en base B,
- être normal en base B,
- être équiréparti en toute base,
- être univers en toute base,
- être normal en toute base,

Propriétés "fausses" :

- être rationnel,
- être algébrique,
- ne pas utiliser de "0" dans son développement décimal.
- appartenir à l'ensemble de Cantor,
- avoir une suite de chiffres programmable par algorithme.
- être définissable dans le système mathématique de la théorie des ensembles.

prouvions qu'ils sont normaux en toute base, ce sera parfait. Nous aurons comblé le trou entre propriétés générales et propriétés particulières. Le quasi-paradoxe sera résolu sans que nous ayons rien à changer dans notre conception, et notre inconfort actuel n'aura été que temporaire et sans signification.

L'attente a déjà été longue, et il est devenu légitime de s'interroger sur la nature de ce quasi-paradoxe : n'appelle-t-il pas une réforme dans notre vision des mathématiques ? Le continu du mathématicien n'est pas celui du physicien, car ce dernier n'accorde aucun sens à l'affirmation qu'il y a une infinité non dénombrable d'instants dans une seconde. La méfiance implicite du physicien n'est-elle pas justifiée ?

Puisque le continu du mathématicien se fonde sur la théorie des ensembles (car le continu se construit à partir des opérations de la théorie des ensembles prise comme allant de soi), peut-être faut-il renoncer à la théorie des ensembles ou la réformer ? C'est ce point qu'étudient certains logiciens, comme T. E. Forster, de l'Université de Cambridge, qui formule des théories des ensembles avec l'ensemble de tous les ensembles (dans la théorie usuelle de Cantor, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles), ou comme E. Nelson, qui propose une théorie dite non standard (à la base d'une conception des infiniment petits), ou comme J. Barwise, qui défend une théorie des hyper-ensembles (permettant l'étude des paradoxes liés aux autoréférences). D'autres encore proposent de

nouveaux axiomes (par exemple portant sur les grands ensembles) : ces nouveaux axiomes, en augmentant le pouvoir de preuve des mathématiques, permettront peut-être de démontrer ces propriétés de normalité.

À l'opposé de ces voies tentant de rendre plus puissante la théorie des ensembles, d'autres recherches remettent en cause la logique usuelle. Les mathématiciens intuitionnistes et constructivistes espèrent, par des raisonnements plus exigeants, conjurer les quasi-paradoxes de l'existence (comme celui résultant de l'heuristique de Borel) et pour cela refusent par principe qu'une démonstration puisse aboutir à un énoncé d'existence («il existe un objet vérifiant telle propriété») sans qu'elle soit accompagnée d'une méthode de construction de l'objet en question. Leurs méthodes sont malheureusement restrictives et compliquent le développement de l'analyse.

On le voit, les nombres normaux, les nombres-univers, les ensembles négligeables et l'heuristique de Borel conduisent à des interrogations sur la nature profonde des mathématiques. Même si beaucoup de mathématiciens refusent de considérer les solutions alternatives avec sérieux et préfèrent attendre sans changer le monde ensembliste adopté au début du xx^e siècle, rien n'assure qu'ils ont raison et que les difficultés du monde ensembliste classique ne resurgiront pas plus gravement encore à l'occasion d'un autre problème.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lil.fr

E. BOREL, Presque tous les nombres réels sont normaux, Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, pp. 247-271, 1909.

J. BARWISE et L. MOSS, Vicious Circles, CSLI Publications, Stanford, Californie, 1996.

J. BORWEIN et P. BORWEIN, Making Sense of Experimental Mathematics, CECM, Simon Fraser University, Canada, 1996.

D. CHAMPERNOWNE, The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten, in J. London Math. Soc. 8. pp. 254-260, 1933.

J.-P. DELAHAYE, Le fascinant nombre π , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

T. FORSTER, Set Theory with Universal Set, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1995.

V. KLEE et S. WAGON, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1993.

W. SCHMIDT, On Normal Numbers, in Pacific Journal of Mathematics, 10, p. 3, 1960.

Photogram-Stone Images



Bulles de savants

IAN STEWART

À propos de films où les mousses coincent la bulle.

Première devinette : quel solide possède 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces, chacune ayant 5 côtés ? Le dodécaèdre. Seconde devinette : quel solide a 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces, chacune de 5,103 côtés ? Vous pensez peut-être à un fractal tarabiscoté ? Ce n'est pas la bonne piste : le solide est familier. Recherchez-le en buvant un verre de bière, en prenant une douche ou en faisant la vaisselle.

Même avec ces indications, vous aurez du mal à deviner, car la question était biaisée : le solide en question n'a les propriétés annoncées qu'en moyenne et, de surcroît, ce n'est pas un vrai solide. C'est la mousse, qui est composée de myriades de bulles, lesquelles sont de minuscules polyèdres irréguliers. En moyenne, les bulles d'une mousse ont 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces. Une bulle moyenne ressemblerait à un «tridéca-et-des-poussières-èdre».

Les mathématiques des bulles et de la mousse sont nées dans les années 1830, bien après l'invention du savon, lorsque le physicien belge Joseph Plateau plongea des cadres en fils de fer dans de l'eau savonneuse. Malgré 170 années de recherches, on ne comprend pas plusieurs des phénomènes observés par Plateau.

Par exemple, personne n'a démontré la conjecture de la double bulle, qui

stipule que la forme adoptée par deux bulles adjacentes est composée de trois surfaces sphériques (voir la figure 3). En 1995, Joel Hass, de l'Université de Californie, et Roger Schlafly, de la Société *Real Software*, ont démontré cette conjecture pour deux bulles de même volume.

LES SURFACES MINIMALES

En 1829, Plateau se brûla les yeux alors qu'il observait le Soleil à l'œil nu pendant 25 secondes. Il en resta aveugle, mais continua de contribuer toute sa vie à ce domaine des mathématiques éminemment visuel : la géométrie dans l'espace.

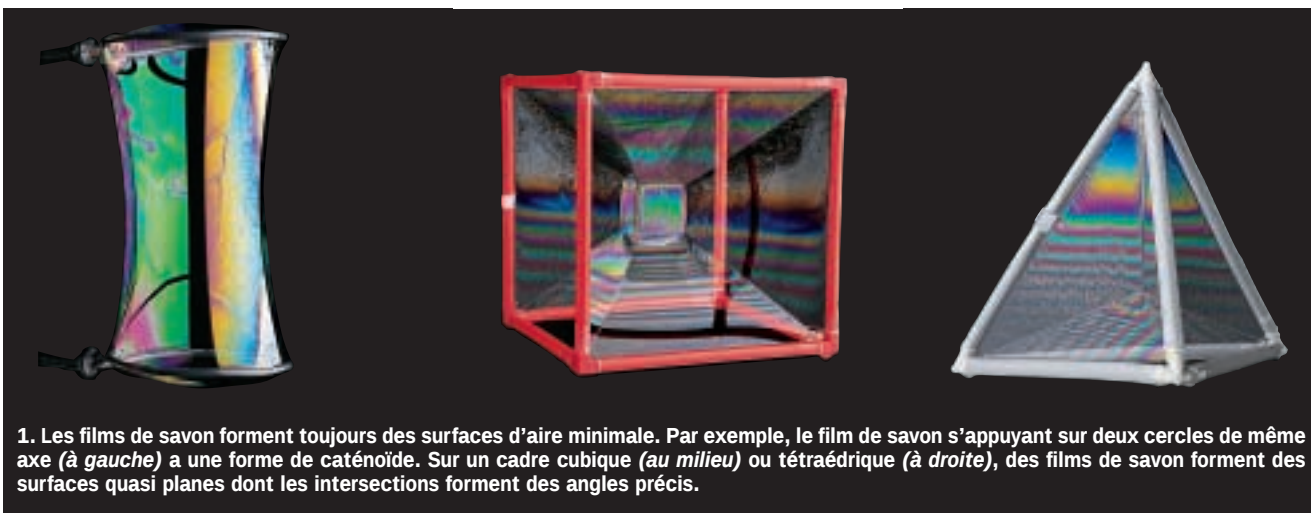
Les bulles et les films de savon appartiennent à la famille mathématique très étudiée des surfaces minimales : des surfaces répondant à certaines contraintes et dont l'aire est minimale. Cette minimisation de l'aire découle du principe universel de minimisation de l'énergie. Puisque l'énergie de tension d'un film de savon est proportionnelle à sa surface, l'énergie des bulles est minimale quand l'aire l'est.

Un film de savon à l'équilibre est comparable à une surface mathématique d'épaisseur nulle : son épaisseur, de l'ordre de un milliardième de mètre, est négligeable. Sans aucune contrainte, une bulle de savon évolue jusqu'à ce que son

aire soit nulle, mais on leur impose généralement de contenir un volume précis ou d'avoir leur frontière sur une certaine surface ou sur une certaine courbe. Par exemple, une bulle qui se pose sur une table est une demi-sphère : c'est la plus petite surface entourant un volume donné (l'air emprisonné dans la bulle) et ayant sa frontière sur un plan.

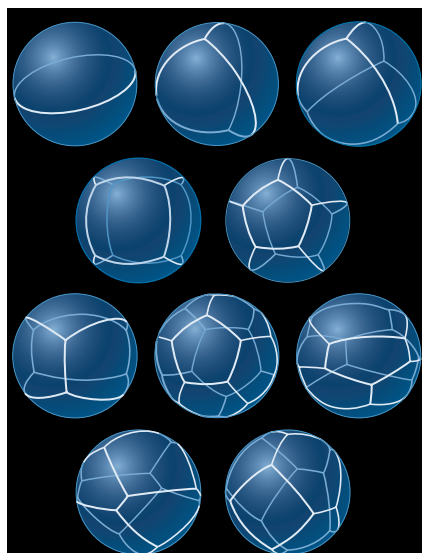
Plateau s'est intéressé aux surfaces dont la frontière est une courbe imposée. Il matérialisait les courbes par un fil ou par plusieurs fils soutenus par un cadre. Par exemple, quelle est la surface minimale dont la frontière est formée de deux cercles parallèles, de même rayon ? Le mathématicien suisse Leonhard Euler, le «prince des mathématiques», démontra que la véritable surface minimale ayant une telle frontière n'est pas un cylindre, mais un caténoïde, formé par rotation d'une courbe en U, nommée chaînette, autour de la droite passant par les deux centres des cercles.

La chaînette est la courbe que prend naturellement une chaîne homogène pendue à deux crochets (ici à la même hauteur). Elle ressemble à une parabole avec un rien d'embonpoint près du sommet. Deux fils de fer circulaires plongés dans de l'eau savonneuse illustrent le théorème d'Euler en faisant apparaître le caténoïde dans toute sa splendeur (voir la figure 1).



1. Les films de savon forment toujours des surfaces d'aire minimale. Par exemple, le film de savon s'appuyant sur deux cercles de même axe (à gauche) a une forme de caténoïde. Sur un cadre cubique (au milieu) ou tétraédrique (à droite), des films de savon forment des surfaces quasi planes dont les intersections forment des angles précis.

Photographies de Michael Dalton, Fundamental Photographs



2. Les règles de Plateau pour les angles formés par les arêtes de bulles adjacentes limitent à dix le nombre d'arrangements possibles. Les sommets sont entourés d'une sphère sur laquelle les faces se coupent à 120 degrés. Parmi les dix formes qui répondent à ce critère, seulement les trois premières sont physiquement possibles, car elles correspondent à des aires minimales.

Michael Goodman

Richard Courant et Herbert Robbins, pour leur livre *What Is Mathematics ?*, ont effectué certaines des expériences originelles de Plateau en plongeant des polyèdres réguliers en fils dans de l'eau savonneuse. Le cas le plus simple, totalement expliqué, est celui du tétraèdre régulier (quatre faces triangulaires et six arêtes égales), où la surface minimale est la réunion de six triangles qui se rencontrent au centre du tétraèdre (voir la figure 1). Le long des lignes joignant les sommets au centre, les films se rencontrent par trois, formant des angles de 120 degrés entre les faces ; au centre, quatre arêtes font deux à deux des angles de 109 degrés 28 minutes. Ces deux valeurs cruciales interviennent chaque fois que plusieurs films de savon sont en contact et qu'il n'y a pas d'air emprisonné ou que les pressions de part et d'autre de chaque film sont égales et, donc, se neutralisent.

Le solide le plus simple après le tétraèdre est le cube. Il conduit à un arrangement, plus complexe, de 13 surfaces presque planes dont l'analyse est inachevée (voir la figure 1).

Dans une mousse, les films sont faiblement courbés, et sont donc assimilés à des faces planes. Cette approximation n'est plus valable pour les films proches de la surface externe de la mousse. Cette limite explique les étranges valeurs citées au début de cet article.

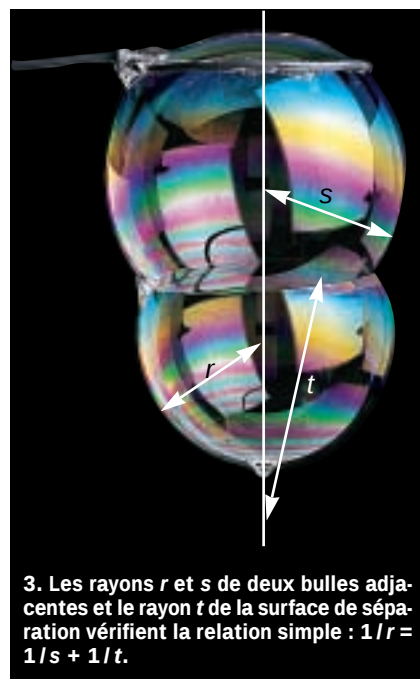
On estime les nombres moyens de sommets, d'arêtes et de faces de toute mousse en admettant que la mousse est constituée d'un grand nombre de polyèdres identiques dont les faces sont des polygones réguliers.

La découverte de l'angle de 120 degrés est souvent attribuée au géomètre Jacob Steiner, en 1837. Cependant, Steiner avait été devancé de deux siècles par Evangelista Torricelli et Francesco Cavalieri. Vers 1640, ces mathématiciens cherchaient le point de l'intérieur d'un triangle donné dont la somme de ses distances aux trois sommets est la plus petite possible. Ils avaient démontré que, lorsque aucun angle n'est supérieur à 120 degrés, c'est le point qui voit les trois côtés sous un angle de 120 degrés. Si l'un des angles du triangle est supérieur à 120 degrés, le point est son sommet. Le problème des films de savon est similaire à celui des triangles.

LES BULLES ET LES SPHÈRES

En 1976, Frederick Almgren, de l'Université de Princeton, et Jean Taylor, de l'Institut de technologie du Massachusetts, ont démontré la seconde valeur (109 degrés 28 minutes) observée par Plateau. Ils ont d'abord considéré les sommets où six faces se croisent le long de quatre arêtes communes – par exemple, les six triangles formés dans un tétraèdre (voir la figure 1). Ils ont montré que les légères courbures observées sur les films de savon sont négligeables. Puis, afin de transformer un problème tridimensionnel à un problème plus simple, ils ont imaginé une petite sphère englobant un ou plusieurs sommets de ce type – par exemple le centre du tétraèdre – et ils ont déterminé les intersections de cette sphère avec les «quasi-plans» des faces. Les films de savon matérialisant une surface minimale, les arcs obtenus sont des «courbes minimales» : leurs longueurs totales sont aussi petites que possible. Par l'analogie sphérique du théorème de Torricelli-Cavalieri, ces arcs doivent toujours se couper suivant des angles de 120 degrés.

F. Almgren et J. Taylor ont prouvé qu'il y a exactement dix configurations distinctes d'arcs (voir la figure 2) satisfaisant ce critère. Ils ont ensuite essayé de diminuer l'aire totale des films à l'intérieur de la boule, en introduisant éventuellement de nouveaux morceaux de film. Quand ils parvenaient à réduire la surface, ils éliminaient le cas considéré, car il ne correspondait pas à une véritable surface minimale. Seules les conformations observées par Plateau ont



3. Les rayons r et s de deux bulles adjacentes et le rayon t de la surface de séparation vérifient la relation simple : $1/r = 1/s + 1/t$.

survécu à ce traitement (les trois premières de la figure 2) : un unique film sur le plan équatorial de la sphère, trois intersections le long de l'axe de la sphère et formant entre eux des angles de 120 degrés, ou six intersections à 109 degrés 28 minutes identiques à celles rencontrées dans le tétraèdre.

La règle des 120 degrés mène à une jolie propriété pour deux bulles adjacentes. Si la conjecture de la double bulle est exacte (voir la figure 3), les trois rayons vérifient une relation simple que l'on confirme expérimentalement. Si r et s sont les rayons des deux bulles, r étant celui de la plus petite et si t est le rayon de la surface séparatrice, alors : $1/r = 1/s + 1/t$.

En 1995, J. Hass et R. Schlafly ont montré que, dans l'hypothèse où les deux bulles sont de même volume, les surfaces sont des parties de sphère. Ils ont utilisé un ordinateur qui a calculé en 20 minutes, 200 260 opérations associées à des possibilités concurrentes.

Dans le cas des volumes inégaux, quelle que soit la configuration minimale de la double bulle, elle doit être une surface de révolution. Le problème se ramène donc à l'étude d'une famille de courbes dans un même plan. Cependant, la réponse reste encore aussi insaisissable que lorsque Plateau, presque aveugle, plongeait ses premières structures en fils dans un récipient d'eau savonneuse.

Stefan HILDEBRANDT et Anthony TROMBA, Mathématiques et formes optimales, Éditions Pour la Science / Belin, 1998.



L'anagyre

JANICK SIMERAY

Des pierres rebelles dont le sens de rotation change sans raison apparente. Une théorie complète du mouvement reste à faire.

Dans les années 1970, en faisant tourner négligemment des pierres de haches sur une table, des archéologues remarquent que celles-ci s'arrêtent de tourner, puis repartent en sens inverse. Depuis cette redécouverte des propriétés de ce qu'on nomme anagyre, objet déjà connu au siècle dernier, les scientifiques se sont évertués à expliquer ce mouvement qui semblait défier les lois de la mécanique. L'analyse qualitative du comportement des anagyres a été établie dès 1896, mais l'analyse quantitative est plus délicate : elle nécessite de prendre en compte le glissement et la dissipation par les frottements.

L'anagyre que nous examinerons est un ellipsoïde aplati, une sorte de ballon de rugby écrasé. Posons-le sur une table, et faisons-le tourner. Lancé dans un sens, l'anagyre fait quelques tours, s'arrête rapidement en oscillant d'avant en arrière selon la plus grande longueur, puis repart en sens inverse. Lancé dans l'autre sens, il tourne longtemps avant d'osciller longitudinalement (oscillation de roulis), alors qu'il est proche de l'arrêt. Parfois, il repart également en sens inverse avant de s'arrêter complètement. Certains anagyres font même plusieurs inversions avant de s'immobiliser (voir la figure 1). Ainsi, les anagyres ont un sens de rotation privilégié.

Comment la table peut-elle transmettre à cet objet, symétrique en apparence, un mouvement de rotation inverse, alors qu'il n'y a entre eux qu'un seul point de contact ? Le comportement paradoxal de l'anagyre laisse croire qu'il viole les lois de la mécanique. C'est une illusion.

Première constatation expérimentale : les inversions dépendent des frottements. Avec un anagyre donné, selon la surface utilisée pour l'expérience, on observe plus ou moins bien les différentes inversions. Si l'inversion principale, consécutive à l'oscillation d'avant en arrière est toujours observée, l'inversion secondaire, consécutive à l'oscillation de roulis, l'est plus rarement.

Le secret de l'anagyre réside dans la distribution de sa masse interne. Dans l'anagyre, la répartition des masses diffère pour les deux axes de symétrie horizontaux de l'ellipsoïde. Pour notre anagyre, cette répartition s'obtient en évitant de manière dissymétrique des parties internes de l'objet (voir la figure 2). On trouve également des anagyres aux formes asymétriques : la répartition asymétrique de la masse est alors immédiatement visible.

Nommons *a* et *b* les deux axes horizontaux de l'ellipsoïde. La fonction caractéristique de cette répartition est appelée le moment d'inertie. Lorsque l'anagyre oscille verticalement autour de l'axe *b*, par exemple, comme c'est le cas juste avant l'inversion principale, le moment d'inertie mis en jeu est relativement important, car les masses

se trouvent assez loin de l'axe. En revanche, lorsque l'anagyre oscille autour de l'axe *a*, comme il le fait lors d'une inversion secondaire, le moment d'inertie qui intervient est inférieur, car la majeure partie de la masse se trouve proche de l'axe. Cette différence entre les deux moments d'inertie par rapport aux axes principaux détermine le fonctionnement de l'anagyre.

CHANGEMENT DE CAP

De quelle façon ces caractéristiques déclenchent-elles une inversion du sens de rotation ? On rend l'anagyre instable pour des petites perturbations de la rotation autour de l'axe vertical. Si l'anagyre était sphérique ou si la répartition des masses était symétrique par rapport aux axes horizontaux de l'ellipsoïde, une petite perturbation n'aurait que peu d'effets sur la rotation et n'entraînerait pas d'oscillations notables. En revanche, avec une répartition convenable des masses, de petites oscillations, résultant du mouvement de rotation initial de l'objet ou d'irrégularités de la surface de la table, engendrent des oscillations dont l'amplitude croît rapidement. La nature des instabilités qui jouent sur l'anagyre dépend du sens de rotation et de la répartition des masses.

Lançons l'anagyre dans un sens. En raison de la répartition des masses, toute perturbation qui engendre une oscillation autour de l'axe *b* sera rapidement amplifiée. Les forces de frottement qui agissent sur l'anagyre durant l'oscillation arrêtent la rotation et en déclenchent une autre en sens contraire. Lorsque ce changement de sens est amorcé,

1. Le mouvement d'un anagyre comporte plusieurs phases. Lancé dans le sens antihoraire (1), il se met à osciller rapidement autour de l'axe *b* (2), après quoi la rotation s'inverse et il tourne dans le sens horaire (3). Après plusieurs tours, cette rotation engendre des oscillations de roulis, autour de l'axe *a* (4), puis le cycle recommence. En pratique, le nombre d'inversions que l'on peut observer dépend des caractéristiques de l'anagyre et des frottements.

