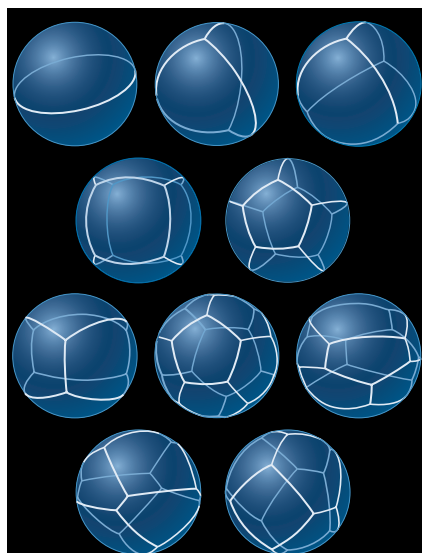




2. Les règles de Plateau pour les angles formés par les arêtes de bulles adjacentes limitent à dix le nombre d'arrangements possibles. Les sommets sont entourés d'une sphère sur laquelle les faces se coupent à 120 degrés. Parmi les dix formes qui répondent à ce critère, seulement les trois premières sont physiquement possibles, car elles correspondent à des aires minimales.

Michael Goodman

Richard Courant et Herbert Robbins, pour leur livre *What Is Mathematics ?*, ont effectué certaines des expériences originelles de Plateau en plongeant des polyèdres réguliers en fils dans de l'eau savonneuse. Le cas le plus simple, totalement expliqué, est celui du tétraèdre régulier (quatre faces triangulaires et six arêtes égales), où la surface minimale est la réunion de six triangles qui se rencontrent au centre du tétraèdre (voir la figure 1). Le long des lignes joignant les sommets au centre, les films se rencontrent par trois, formant des angles de 120 degrés entre les faces ; au centre, quatre arêtes font deux à deux des angles de 109 degrés 28 minutes. Ces deux valeurs cruciales interviennent chaque fois que plusieurs films de savon sont en contact et qu'il n'y a pas d'air emprisonné ou que les pressions de part et d'autre de chaque film sont égales et, donc, se neutralisent.

Le solide le plus simple après le tétraèdre est le cube. Il conduit à un arrangement, plus complexe, de 13 surfaces presque planes dont l'analyse est inachevée (voir la figure 1).

Dans une mousse, les films sont faiblement courbés, et sont donc assimilés à des faces planes. Cette approximation n'est plus valable pour les films proches de la surface externe de la mousse. Cette limite explique les étranges valeurs citées au début de cet article.

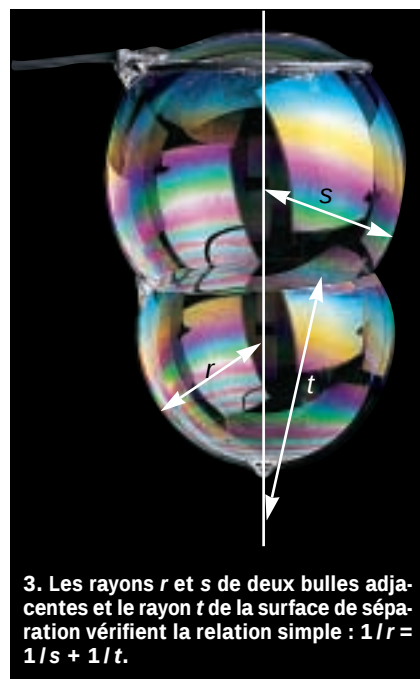
On estime les nombres moyens de sommets, d'arêtes et de faces de toute mousse en admettant que la mousse est constituée d'un grand nombre de polyèdres identiques dont les faces sont des polygones réguliers.

La découverte de l'angle de 120 degrés est souvent attribuée au géomètre Jacob Steiner, en 1837. Cependant, Steiner avait été devancé de deux siècles par Evangelista Torricelli et Francesco Cavalieri. Vers 1640, ces mathématiciens cherchaient le point de l'intérieur d'un triangle donné dont la somme de ses distances aux trois sommets est la plus petite possible. Ils avaient démontré que, lorsque aucun angle n'est supérieur à 120 degrés, c'est le point qui voit les trois côtés sous un angle de 120 degrés. Si l'un des angles du triangle est supérieur à 120 degrés, le point est son sommet. Le problème des films de savon est similaire à celui des triangles.

LES BULLES ET LES SPHÈRES

En 1976, Frederick Almgren, de l'Université de Princeton, et Jean Taylor, de l'Institut de technologie du Massachusetts, ont démontré la seconde valeur (109 degrés 28 minutes) observée par Plateau. Ils ont d'abord considéré les sommets où six faces se croisent le long de quatre arêtes communes – par exemple, les six triangles formés dans un tétraèdre (voir la figure 1). Ils ont montré que les légères courbures observées sur les films de savon sont négligeables. Puis, afin de transformer un problème tridimensionnel à un problème plus simple, ils ont imaginé une petite sphère englobant un ou plusieurs sommets de ce type – par exemple le centre du tétraèdre – et ils ont déterminé les intersections de cette sphère avec les «quasi-plans» des faces. Les films de savon matérialisant une surface minimale, les arcs obtenus sont des «courbes minimales» : leurs longueurs totales sont aussi petites que possible. Par l'analogie sphérique du théorème de Torricelli-Cavalieri, ces arcs doivent toujours se couper suivant des angles de 120 degrés.

F. Almgren et J. Taylor ont prouvé qu'il y a exactement dix configurations distinctes d'arcs (voir la figure 2) satisfaisant ce critère. Ils ont ensuite essayé de diminuer l'aire totale des films à l'intérieur de la boule, en introduisant éventuellement de nouveaux morceaux de film. Quand ils parvenaient à réduire la surface, ils éliminaient le cas considéré, car il ne correspondait pas à une véritable surface minimale. Seules les conformations observées par Plateau ont



3. Les rayons r et s de deux bulles adjacentes et le rayon t de la surface de séparation vérifient la relation simple : $1/r = 1/s + 1/t$.

survécu à ce traitement (les trois premières de la figure 2) : un unique film sur le plan équatorial de la sphère, trois intersections le long de l'axe de la sphère et formant entre eux des angles de 120 degrés, ou six intersections à 109 degrés 28 minutes identiques à celles rencontrées dans le tétraèdre.

La règle des 120 degrés mène à une jolie propriété pour deux bulles adjacentes. Si la conjecture de la double bulle est exacte (voir la figure 3), les trois rayons vérifient une relation simple que l'on confirme expérimentalement. Si r et s sont les rayons des deux bulles, r étant celui de la plus petite et si t est le rayon de la surface séparatrice, alors : $1/r = 1/s + 1/t$.

En 1995, J. Hass et R. Schlafly ont montré que, dans l'hypothèse où les deux bulles sont de même volume, les surfaces sont des parties de sphère. Ils ont utilisé un ordinateur qui a calculé en 20 minutes, 200 260 opérations associées à des possibilités concurrentes.

Dans le cas des volumes inégaux, quelle que soit la configuration minimale de la double bulle, elle doit être une surface de révolution. Le problème se ramène donc à l'étude d'une famille de courbes dans un même plan. Cependant, la réponse reste encore aussi insaisissable que lorsque Plateau, presque aveugle, plongeait ses premières structures en fils dans un récipient d'eau savonneuse.

Stefan HILDEBRANDT et Anthony TROMBA, Mathématiques et formes optimales, Éditions Pour la Science / Belin, 1998.



L'anagyre

JANICK SIMERAY

Des pierres rebelles dont le sens de rotation change sans raison apparente. Une théorie complète du mouvement reste à faire.

Dans les années 1970, en faisant tourner négligemment des pierres de haches sur une table, des archéologues remarquent que celles-ci s'arrêtent de tourner, puis repartent en sens inverse. Depuis cette redécouverte des propriétés de ce qu'on nomme anagyre, objet déjà connu au siècle dernier, les scientifiques se sont évertués à expliquer ce mouvement qui semblait défier les lois de la mécanique. L'analyse qualitative du comportement des anagyres a été établie dès 1896, mais l'analyse quantitative est plus délicate : elle nécessite de prendre en compte le glissement et la dissipation par les frottements.

L'anagyre que nous examinerons est un ellipsoïde aplati, une sorte de ballon de rugby écrasé. Posons-le sur une table, et faisons-le tourner. Lancé dans un sens, l'anagyre fait quelques tours, s'arrête rapidement en oscillant d'avant en arrière selon la plus grande longueur, puis repart en sens inverse. Lancé dans l'autre sens, il tourne longtemps avant d'osciller longitudinalement (oscillation de roulis), alors qu'il est proche de l'arrêt. Parfois, il repart également en sens inverse avant de s'arrêter complètement. Certains anagyres font même plusieurs inversions avant de s'immobiliser (voir la figure 1). Ainsi, les anagyres ont un sens de rotation privilégié.

Comment la table peut-elle transmettre à cet objet, symétrique en apparence, un mouvement de rotation inverse, alors qu'il n'y a entre eux qu'un seul point de contact ? Le comportement paradoxal de l'anagyre laisse croire qu'il viole les lois de la mécanique. C'est une illusion.

Première constatation expérimentale : les inversions dépendent des frottements. Avec un anagyre donné, selon la surface utilisée pour l'expérience, on observe plus ou moins bien les différentes inversions. Si l'inversion principale, consécutive à l'oscillation d'avant en arrière est toujours observée, l'inversion secondaire, consécutive à l'oscillation de roulis, l'est plus rarement.

Le secret de l'anagyre réside dans la distribution de sa masse interne. Dans l'anagyre, la répartition des masses diffère pour les deux axes de symétrie horizontaux de l'ellipsoïde. Pour notre anagyre, cette répartition s'obtient en évitant de manière dissymétrique des parties internes de l'objet (voir la figure 2). On trouve également des anagyres aux formes asymétriques : la répartition asymétrique de la masse est alors immédiatement visible.

Nommons a et b les deux axes horizontaux de l'ellipsoïde. La fonction caractéristique de cette répartition est appelée le moment d'inertie. Lorsque l'anagyre oscille verticalement autour de l'axe b , par exemple, comme c'est le cas juste avant l'inversion principale, le moment d'inertie mis en jeu est relativement important, car les masses

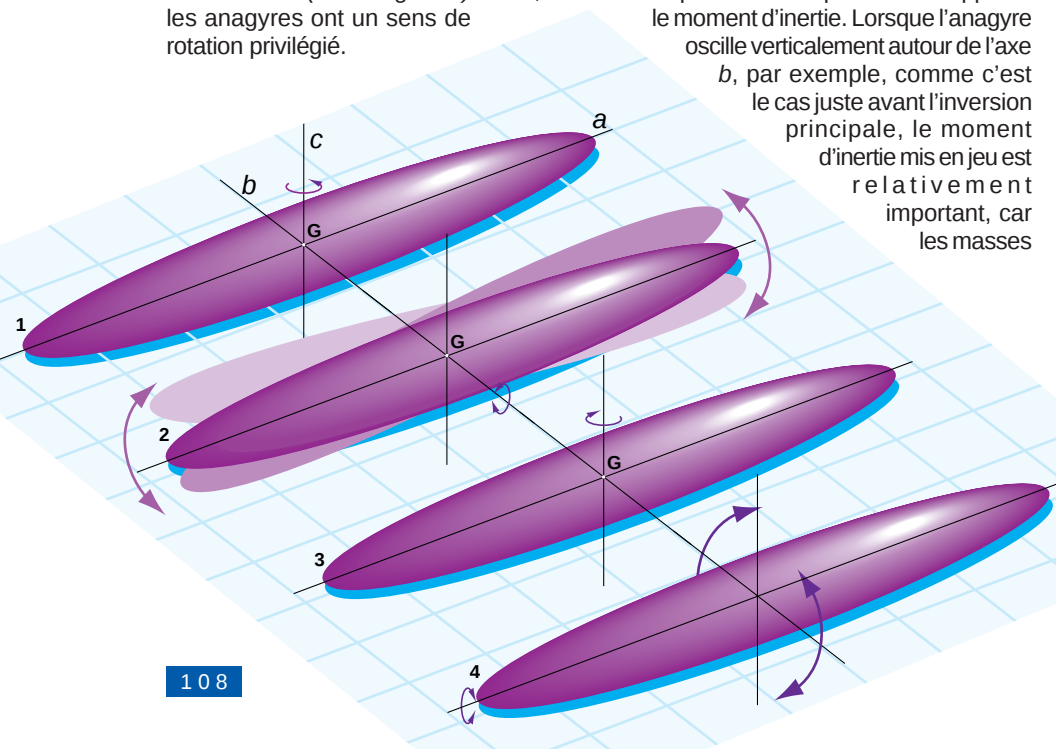
se trouvent assez loin de l'axe. En revanche, lorsque l'anagyre oscille autour de l'axe a , comme il le fait lors d'une inversion secondaire, le moment d'inertie qui intervient est inférieur, car la majeure partie de la masse se trouve proche de l'axe. Cette différence entre les deux moments d'inertie par rapport aux axes principaux détermine le fonctionnement de l'anagyre.

CHANGEMENT DE CAP

De quelle façon ces caractéristiques déclenchent-elles une inversion du sens de rotation ? On rend l'anagyre instable pour des petites perturbations de la rotation autour de l'axe vertical. Si l'anagyre était sphérique ou si la répartition des masses était symétrique par rapport aux axes horizontaux de l'ellipsoïde, une petite perturbation n'aurait que peu d'effets sur la rotation et n'entraînerait pas d'oscillations notables. En revanche, avec une répartition convenable des masses, de petites oscillations, résultant du mouvement de rotation initial de l'objet ou d'irrégularités de la surface de la table, engendrent des oscillations dont l'amplitude croît rapidement. La nature des instabilités qui jouent sur l'anagyre dépend du sens de rotation et de la répartition des masses.

Lançons l'anagyre dans un sens. En raison de la répartition des masses, toute perturbation qui engendre une oscillation autour de l'axe b sera rapidement amplifiée. Les forces de frottement qui agissent sur l'anagyre durant l'oscillation arrêtent la rotation et en déclenchent une autre en sens contraire. Lorsque ce changement de sens est amorcé,

1. Le mouvement d'un anagyre comporte plusieurs phases. Lancé dans le sens antihoraire (1), il se met à osciller rapidement autour de l'axe b (2), après quoi la rotation s'inverse et il tourne dans le sens horaire (3). Après plusieurs tours, cette rotation engendre des oscillations de roulis, autour de l'axe a (4), puis le cycle recommence. En pratique, le nombre d'inversions que l'on peut observer dépend des caractéristiques de l'anagyre et des frottements.



les forces de frottement tendent à empêcher l'oscillation. Ainsi, une rotation dans un sens initial permet aux oscillations autour de l'axe b de s'amplifier rapidement. Ensuite, les forces de frottement qui accompagnent ces oscillations inversent le sens de rotation.

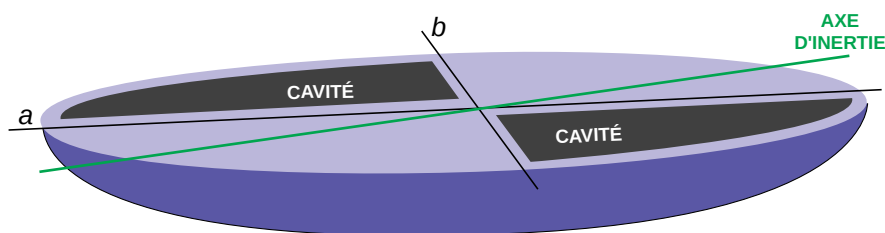
Si la pierre est lancée initialement dans le sens inverse (ou si l'on retourne l'anagyre et qu'on le lance dans le même sens, ce qui revient au même), c'est une autre instabilité qui est favorisée : celle qui accroît les oscillations autour de l'autre axe principal, l'axe a . Cette fois encore, en raison de la répartition des masses, l'amplitude de cette instabilité croît rapidement, et les forces de frottement qui agissent pendant ces oscillations arrêtent le mouvement giratoire et l'inversent. Si cette inversion est moins marquée que l'inversion précédente, c'est que le moment d'inertie associé à l'oscillation de roulis est inférieur.

Ainsi, l'énergie cinétique de rotation de départ diminue au profit de l'énergie potentielle d'oscillation, qui est ensuite convertie à nouveau en énergie cinétique de rotation. Théoriquement, si l'énergie n'était pas dissipée, on pourrait observer une infinité de rotations. En pratique, il existe des anagyres en forme de demi-œuf qui effectuent plus d'une dizaine d'inversions avant de s'arrêter.

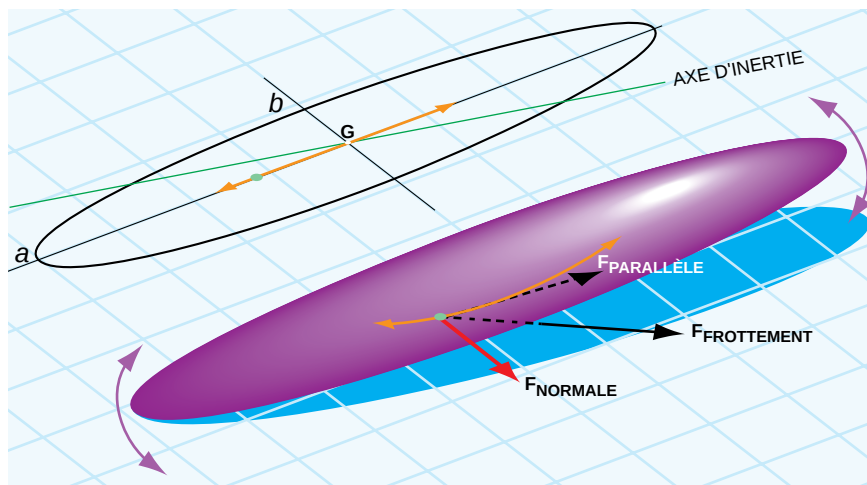
Une autre manière de comprendre l'inversion est de considérer les forces de frottement. Partons de l'oscillation principale d'avant en arrière qui fait suite à une rotation (voir la figure 3). Lorsque l'anagyre oscille de bas en haut, le point de contact entre l'anagyre et la table se déplace sur un segment. En chaque point du segment, la table exerce sur l'anagyre une force de frottement (une réaction) qui prévient le glissement. L'une des composantes de cette force tend à faire tourner l'anagyre autour de son axe vertical dans un sens donné : on dit que cette force engendre un moment par rapport au centre de gravité.

Pour compliquer le tout, le point de contact se déplace. La force change en permanence et le moment exercé par cette force change également. Le moment résultant qui s'exerce sur l'objet durant une oscillation est la moyenne des moments qui s'exercent au cours de l'oscillation. Lorsque l'on calcule cette moyenne, on obtient un moment résultant. Ainsi, par impulsions successives, l'anagyre se met à tourner dans le sens dicté par ce moment. Pour le vérifier, il suffit d'appuyer sur un bout de l'anagyre et de relâcher rapidement, sans lui donner de rotation.

Pour se procurer un anagyre ellipsoïdal, voir la page 33.



2. Des cavités percées de part et d'autre des axes de l'ellipsoïde engendrent une répartition asymétrique de la masse. Ainsi, l'axe d'inertie principal (l'axe autour duquel se répartit la masse) est décalé par rapport à l'axe de symétrie de l'ellipsoïde.



3. Lorsque l'on fait osciller l'anagyre de bas en haut (flèches violettes), le point de contact se déplace sur un segment (en orange). En raison de la répartition des masses, la table exerce sur l'anagyre, en chaque point du segment, une force de réaction qui s'oppose au glissement ($F_{\text{FROTTEMENT}}$). L'une des composantes de cette force (F_{NORMALE}) tend à faire tourner l'anagyre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'oscillation de roulis entraîne une rotation en sens inverse de celle engendrée par l'oscillation de bas en haut. Toutefois, le moment résultant est de moindre amplitude, ce qui explique pourquoi un sens de rotation est privilégié.

Le couplage entre la rotation et les modes d'oscillation varie avec le frottement. Un frottement trop important dissipe si vite la rotation de l'anagyre que celui-ci ne dispose pas d'assez d'énergie pour repartir en sens inverse. Un frottement trop faible limite la réaction, et le moment n'est pas suffisant pour inverser la rotation. Sur du verre, l'effet peut être moindre que sur du formica ou sur du marbre.

L'explication de cette énigme fait apparaître qu'il n'est pas nécessaire de disposer de deux points de contacts pour transmettre un mouvement de rotation à un mobile. Les sports de balles avec effet le montrent aussi (tennis, football). Pourtant, l'explication quantitative du comportement des anagyres, par exemple le calcul du nombre de tours avant l'inversion, nécessite la prise en compte de la dissipation par le frottement solide ainsi que le glissement, voire le frottement aérodynamique.

Si vous voulez construire vous-même votre anagyre, vous pouvez

utiliser du bois ou du plâtre, ou même une demi-coquille d'œuf. Deux ingrédients sont requis. Premièrement, la base tournante doit posséder deux rayons de courbure. Deuxièmement, la répartition des masses doit être décalée par rapport aux axes de symétrie ; pour cela, on peut soit éviter des parties, comme pour l'anagyre décrit dans l'article, soit ajouter des masses décalées par rapport à l'axe de symétrie principal. Pour la coquille d'œuf, il suffit de coller des morceaux de chewing-gum de manière asymétrique. Une théorie complète reste à faire et nous publierons les analyses des lecteurs qui étudieront ce problème délicat.

Janick SIMERAY est l'inventeur du modèle d'anagyre à la forme symétrique.

A. GARCIA et M. HUBBARD, *Spin reversal of the rattleback : theory and experiment*, in *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. A 418, pp 165-197, 1988.

J. WALKER, *Expérience d'amateur*, in *Pour la Science*, décembre 1979.

G.T. WALKER, *Q. Journal of pure and appl. Math.*, vol. 28, pp. 175-184, 1896.

