



6. CE MÂLE BÉLOSTOME *ABEDUS HERBERTI* d'Arizona transporte les œufs qu'il a fécondés et qui ont été collés sur son dos par la femelle. Il maintient les œufs humides et aérés.

souffrent pas d'être confinés à la plante. Robert Smith, de l'Université d'Arizona, explique de même les rassemblements de bélostomes dans les mares : les mâles n'ont pas besoin d'errer, puisque les femelles viennent à eux.

Le dernier recours

Malgré ces exemples, de nombreux insectes évitent de s'occuper de leurs jeunes, qu'ils protègent de façons variées. Certains cachent les œufs à l'aide d'ovipositeurs perforants (des appendices en forme d'épée, utilisés pour la ponte), d'autres recouvrent les œufs d'un revêtement impénétrable. Certaines espèces ne «mettent pas tous leurs œufs dans le même panier» : elles les dispersent ainsi dans le temps et dans l'espace. Cette dernière stratégie est efficace : quand un prédateur découvre l'une des pontes, il n'accède qu'à une petite fraction du nombre total d'œufs déposés par la mère. Lorsqu'on empêche une femelle *Gargaphia* de protéger sa ponte (souvent supérieure à 100 œufs), 56 pour cent des œufs sont détruits par les prédateurs avant d'éclore. En revanche, la punaise

Corythucha ciliata, en déposant 33 petites pontes sur différentes feuilles, ne perd que 16 pour cent de ses œufs.

Pourquoi certains insectes continuent-ils de prodiguer des soins à leur progéniture ? L'importance du coût des soins parentaux dépend de la perte de fécondité correspondante. Quand l'arrivée de l'hiver ou la limitation des ressources diminuent la future production d'œufs, les soins parentaux deviennent parfois un comportement valable.

Par exemple, les femelles de la punaise fouisseuse *Parastrachia japonensis* n'élèvent leurs jeunes que sur les fruits tombés des arbres *Schoepfia*. Elles doivent limiter leur reproduction à la courte période d'abondance de ces fruits. La quantité de nourriture ne permet à la femelle que d'avoir une seule grosse ponte, qu'elle surveille et alimente pendant des semaines. Elle n'a pas d'autres occasions de se reproduire.

La plupart des espèces qui s'occupent de leurs jeunes n'ont qu'une ponte (cette limitation est due aux changements saisonniers, à la rareté des ressources ou à d'autres phénomènes écologiques). Les entomologistes comprennent mieux la disparité des soins

parentaux dans le monde des insectes lorsqu'ils les considèrent en termes de modes reproducteurs (une seule ponte ou plusieurs plus petites). Alors que les soins parentaux sont coûteux et inutiles pour les insectes qui ont la possibilité d'étaler la reproduction dans le temps et dans l'espace, ils peuvent constituer le seul moyen d'assurer la survie de la progéniture de ceux qui vivent dans des conditions plus rudes.

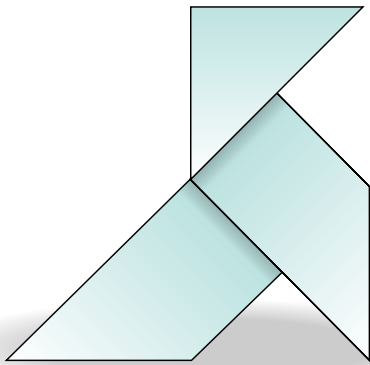
Douglas TALLAMY est professeur d'entomologie à l'Université du Delaware.

Douglas W. TALLAMY, *Insect Parental Care*, in *BioScience*, vol. 34, n° 1, pp. 20-24, janvier 1984.

D.W. TALLAMY et L.A. HORTON, *Costs and Benefits of the Egg-Dumping Alternative in Gargaphia Lace Bugs* (Hemiptera : Tingidae), in *Animal Behavior*, vol. 39, pp. 352-360, février 1990.

T.H. CLUTTON-BROCK, *The Evolution of Parental Care*, Princeton University Press, 1991.

The Evolution of Social Behavior in Insects and Arachnids, sous la direction de Jae C. Choe et Bernard J. Crespi, Cambridge University Press, 1997.



Pliages et origami

IAN STEWART

Les mathématiques jettent un pont entre un art ancien et une technique moderne.

L'origami, c'est-à-dire l'art du pliage de papier, a de nombreuses relations avec les mathématiques. Ce mois-ci, nous examinerons ses contributions à la théorie des pavages et au génie mécanique.

Je me suis intéressé à l'origami grâce à un ingénieur hongrois, Tibor Tarnai, qui a récemment publié un remarquable article sur ce sujet (*Folding of Uniform Plane Tessellations*, in *Origami Science & Art*, sous la direction de Koryo Miura, Otsu, Shiga, Japon). T. Tarnai mentionne que l'un des phénomènes que les ingénieurs s'efforcent de comprendre est celui du flambement des structures : toute structure qui est soumise à des forces excessives se déforme (flambement) ou se rompt. Le flambement de feuilles minces de métal est particulièrement intéressant, car ces structures ont une résistance considérable malgré leur faible masse. La mieux connue est la canette en aluminium pour les boissons, un chef-d'œuvre de production industrielle.

Quand un cylindre de métal est comprimé selon son axe, il reste cylindrique jusqu'à ce que les forces atteignent une valeur critique, la charge de flambement. Puis le cylindre s'écroule soudain. Au cours d'expériences de laboratoire,



Mat Collins

1. La structure de Yoshimura correspond au mode principal de flambement d'un cylindre.

toutefois, on peut limiter la déformation, par exemple en ajustant un cylindre un peu plus petit que celui que l'on teste à l'intérieur de celui-ci. On analyse ainsi les premières étapes de la déformation.

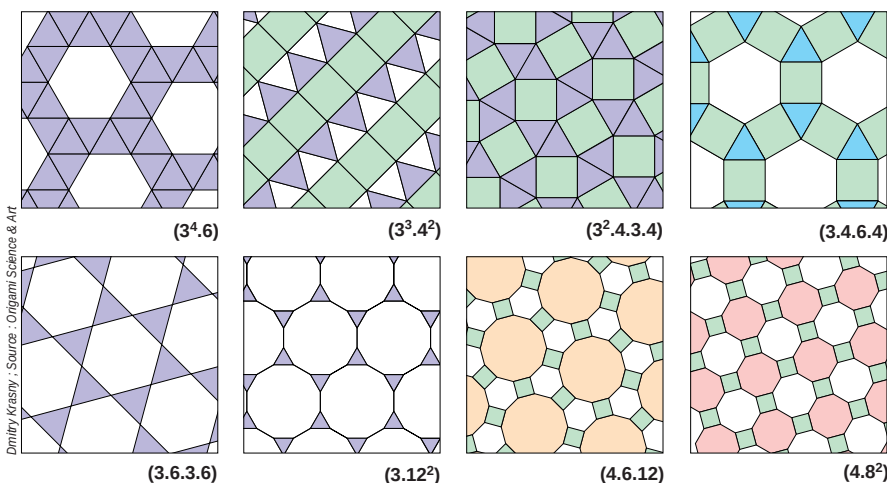
Pour un cylindre métallique, le flambement engendre une superbe struc-

ture symétrique, composée de losanges. Cette structure ressemble beaucoup à celles que l'on obtient en pliant une feuille de papier en triangles et en l'enroulant en cylindre. Le papier se déforme alors comme la feuille de métal.

Le premier type de déformation est nommé structure de Yoshimura (voir la figure 1). On obtient la structure de Yoshimura en pavant le plan à l'aide de triangles isocèles.

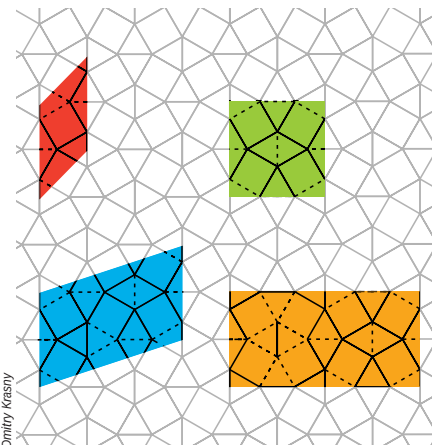
T. Tarnai s'est demandé si d'autres pavages du plan pouvaient être pliés de la même façon. On sait depuis longtemps qu'il existe exactement trois types de pavages réguliers et uniformes. Par «régulier», on entend que les pavés sont tous identiques et qu'ils sont des polygones réguliers. Par «uniforme», on entend que les arrangements des pavés sont identiques à chaque sommet. Les pavages réguliers et uniformes sont ceux qui sont composés de triangles équilatéraux, de carrés ou d'hexagones.

Le mathématicien suisse Ludwig Schläfli a démontré en 1850 qu'il existe, en outre, huit pavages uniformes et «semi-réguliers», où tous les pavés sont des polygones réguliers, mais pas nécessairement tous identiques. On



Dmitry Krasny, Source : Origami Science & Art

2. Les huit types de pavages semi-réguliers.



Dmitry Krasny

3. Diagrammes de pliage du pavage (3^2.4.3.4).



Matt Collins

4. Ces cylindres déformés correspondent respectivement aux pliages représentés en rouge, en vert et en orange sur la figure 3.

désigne ces pavages par leur symbole de Schläfli, qui note la nature des pavés autour de chaque sommet.

Par exemple, le nid d'abeilles est noté (6^3) : chaque sommet est à l'intersection de trois hexagones. Les deux autres pavages réguliers et uniformes sont notés (3^6) et (4^4) .

Les pavages uniformes semi-réguliers sont : $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6.3.6)$, (3.12^2) , $(4.6.12)$ et (4.8^2) . Par exemple, le pavage $(3.4.6.4)$ a, à chaque sommet, un triangle équilatéral, un carré, un hexagone et un autre carré (voir la figure 2). Dans la structure de Yoshimura, le pavé n'est pas un polygone régulier, de sorte qu'il n'est pas dans la liste. Il correspondrait à la formule (3^6) .

Quelles structures peuvent-elles être pliées selon les arêtes de polygones, de sorte que les faces polygonales restent parfaitement planes ? On peut certainement plier la structure (4^4) en pliant le papier selon des lignes horizontales seulement, ou selon des lignes verticales. Cependant on ne peut plier selon une ligne horizontale et selon une ligne verticale, parce que les pavés doivent se courber en dehors du plan où les plis se croisent.

En 1989, Koryo Miura a démontré qu'aucun pavage où trois arêtes se croisent à un sommet ne peut être plié, ce qui élimine les possibilités (6^3) , (3.12^2) , $(4.6.12)$ et (4.8^2) . Il est aisé de comprendre que les pavages $(3^4.6)$ et $(3.4.6.4)$ ne peuvent pas non plus être pliés.

Des droites traversent les pavages $(3.6.3.6)$ et (4^4) , qui peuvent être pliés selon ces lignes, mais, cette fois encore, les résultats sont peu intéressants. Il ne reste alors que les pavages (3^6) , $(3^3.4^2)$ et $(3^2.4.3.4)$, qui, non seulement peuvent être pliés, mais peuvent être enroulés en cylindre, comme la structure de Yoshi-

mura. Ce sont des pavages qui doivent retenir l'attention des ingénieurs.

En fait, ces trois pavages peuvent être pliés de plusieurs façons. La figure 3 montre quatre façons de plier le pavage $(3^2.4.3.4)$; les segments noirs indiquent les plis en relief, et les pointillés les plis en creux. La figure 4 représente les cylindres plissés correspondants.

La structure des lignes de pliage se répète, dans chaque cas, sur la totalité du plan. Les parallélogrammes coloriés de la figure 3 indiquent la cellule unité. La plus petite cellule unité possible (*en rouge*) a une superficie égale à deux carrés et trois triangles. L'un de ces carrés est coupé en deux parties qui se recolleraient en un carré si les bords opposés de la cellule unité étaient recollés. T. Tarnai suppose que c'est le seul motif de pliage possible dont la cellule unité contient deux carrés.

La deuxième cellule unité (*en vert*) contient quatre carrés, et l'on suppose aussi qu'elle est le seul pliage ayant cette particularité. La troisième cellule unité (*en bleu*) contient six carrés ; il existe plusieurs pliages de ce type, et je vous laisse en trouver d'autres. La dernière cellule unité (*en orange*) contient huit carrés, et il existe à nouveau plusieurs pliages de ce type. Je vous laisse également chercher les pliages correspondant à (3^6) et $(3^3.4^2)$.

Comme pour la structure de Yoshimura, certains pliages ressemblent à la surface obtenue par écrasement d'un cylindre réel. En outre, l'écrasement peut être modélisé par ordinateur ; il suffit de faire comme si les pavés plans du pavage sont liés par une sorte de matériau élastique. Les résultats sont utiles en architecture et en génie mécanique. C'est toujours un ravissement de voir comment ces mathématiques réconcilient un art ancien et une technique moderne.

- 1- plus de puissance de calcul
- 2- plus de puissance analytique
- 3- des documents plus élaborés
- 4- des graphiques plus étonnants
- 5- ajout de fonctions personnalisées
- 6- une interface visuelle intuitive
- 7- intégration Web
- 8- compatible Windows 95,98,NT

Mathcad 8

Offre de lancement:
Mathcad 8 + Treasury 8

3 750 Fht
au lieu de 4 540 Fht

French version !!!
by
SIGMA PLUS

Distributeur officiel
MATHSOFT

. licence d'entreprise
. support technique
. formation-conseil-études



29 rue Lauriston
75016 PARIS
Tél: 01 44 34 80 00
Fax: 01 44 34 80 01
mathcad@sigmaplus.fr
www.sigmaplus.fr

Tél : 01 44 34 80 00



Les découpages artistiques

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les amateurs perspicaces et avisés découvrent encore aujourd'hui de nouvelles constructions géométriques.

Les découpages géométriques passionnent professionnels et amateurs. La gageure consiste à transformer, avec le nombre minimal de coups de ciseaux et en réarrangeant les morceaux, une forme en une autre. Le grand classique du découpage est l'ouvrage de Harry Lindgren *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them*, paru en 1964, puis complété et republié en 1972. En dehors de sa passion pour la géométrie et son métier d'agent de brevets, Harry Lindgren fut jusqu'à sa mort, en 1992, l'ardent défenseur d'une réforme radicale de l'orthographe anglaise qu'il souhaitait fondée sur un système phonétique rigoureux. Que n'a-t-il fait école !

Depuis 1972, de nombreux ajouts ayant fait progresser l'art populaire des dissections, une nouvelle synthèse s'imposait. Le livre de Greg Frederickson paru récemment sous le titre *Dissection : Plane and Fancy* est le recueil attendu. Sa réalisation est d'une remarquable qualité, tant sur le plan des informations que l'auteur est allé rechercher patiemment dans toutes sortes de publications, pour la plupart inac-

cessibles, que pour les belles illustrations qui nous font découvrir à chaque page des constructions astucieuses et élégantes. Ce livre prouve que l'ingéniosité des amateurs de récréations mathématiques engendre des merveilles esthétiques et d'authentiques énigmes difficiles. Le découpage du croissant de lune en croix grecque et en carré (voir la figure 1) est un classique du genre perfectionné par les deux frères rivaux du découpage, Sam Lloyd (1841-1911) et Henry Dudeney (1857-1930).

Les thèmes du découpage des figures à bords arrondis et celui des polyèdres retiendront notre attention. Assez étrangement, les résultats généraux de M. Laczkovich, S. Banach et A. Tarski sur les découpages ensemblistes utilisant l'axiome du choix ne sont pas mentionnés dans le livre de G. Frederickson, qui n'a voulu retenir que les découpages effectifs. Nous les évoquerons.

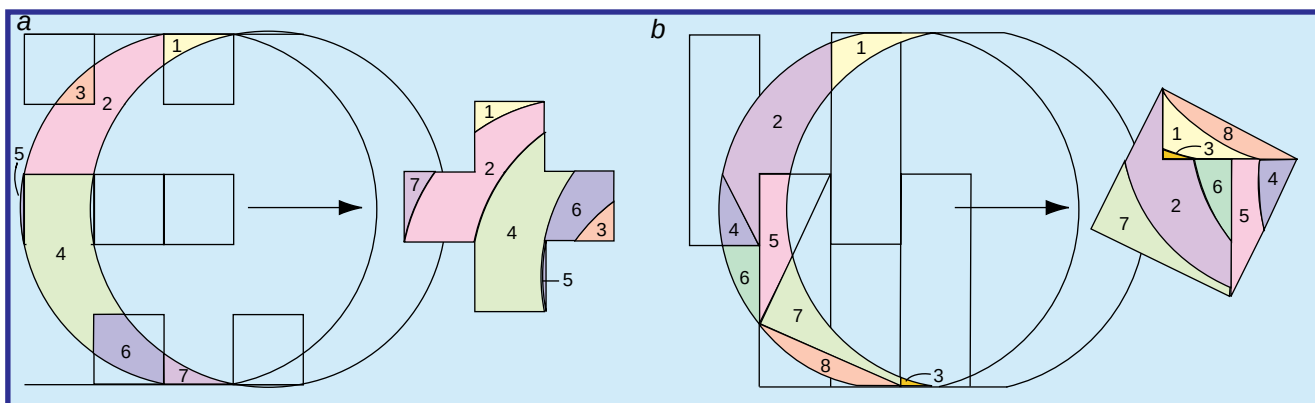
Il est évident que, si en découpant un polygone A en un nombre fini de morceaux polygonaux et en les recombinaut, on reconstitue un polygone B , alors les polygones A et B ont des aires égales. Moins évidente est la propriété réciproque :

si deux polygones A et B ont des aires égales, alors on peut toujours découper le premier en un nombre fini de polygones qui se recombieront pour former le second. C'est le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein (démontré indépendamment plusieurs fois au XIX^e siècle) : deux polygones sont décomposables par dissection polygonale, si et seulement si, ils ont la même aire (voir la figure 2).

La démonstration générale donne des découpages comprenant un trop grand nombre de pièces, aussi en cherche-t-on d'autres plus économiques. C'est la source d'une multitude de casse-tête géométriques : les records sont régulièrement battus, parfois au grand dam des spécialistes qui pensaient impossible d'améliorer leur solution !

Tel est le cas de la transformation proposée par Lindgren du décagone en carré, qui était déjà miraculeusement réalisée avec huit pièces seulement et que l'amateur anglais Gavin Theobald améliora en un découpage de sept pièces (voir la figure 3).

Lorsque l'on considère non plus des polygones mais des figures à bords



1. Transformations du croissant de lune. Le dessin a donne une solution en sept pièces de la transformation du croissant en croix grecque. Le croissant de lune utilisé possède une hauteur égale à cinq fois la largeur. La construction résulte d'une correction apportée par G. Frede-

rickson à une solution inexacte proposée par Sam Lloyd. Le croissant de lune auquel s'intéressa H. Dudeney est légèrement différent : sa hauteur est égale à quatre fois sa largeur. Le dessin b montre un découpage en huit pièces du croissant de Lloyd conduisant au carré.

curvilignes, par exemple des arcs de cercles (voir la figure 4), le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein n'assure plus qu'un découpage existe, et il faut y croire pour réussir...

Pourtant l'idée des «découpages-recompositions» était une des méthodes utilisées par les Grecs pour «quarrer» des surfaces à bords curvilignes. «Quarrer» une aire signifie la calculer en ramenant la figure initiale à celle d'un carré. Ces figures aux bords curvilignes qu'on peut quarrer étaient appelées des lunules, et les Grecs savaient que certains découpages étaient difficiles, voire impossibles.

DEUX QUADRATURES DU CERCLE

Le fameux problème de la quadrature du cercle est attribué à Anaxagore. Alors qu'il était emprisonné pour avoir soutenu que la Lune ne faisait que refléter la lumière du Soleil, il se serait posé, il y a 25 siècles, la question de mettre en relation un cercle et un carré de même aire. On peut interpréter l'expression *quadrature du cercle* de deux façons différentes. La première, que nous appellerons le problème classique de la quadrature du cercle, se formule ainsi : est-il possible, en n'utilisant que la règle et le compas, de tracer un carré de la même aire qu'un cercle donné ?

Résoudre le problème équivaut à tracer à la règle et au compas un segment de longueur π à partir de la donnée d'un segment de longueur 1, ce qui ne serait possible que si π était exprimable par radicaux carrés (comme $\sqrt{2} + \sqrt{5}/1 + \sqrt{17}$). Cela impliquerait que π est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, ce qui n'est pas le cas, puisque π est un nombre transcendant, comme Ferdinand von Lindemann l'a prouvé en 1882.

La seconde interprétation, que nous dénommerons problème de la quadrature du cercle par découpages, est la suivante : est-il possible de découper un cercle (on devrait dire un disque) en un nombre fini de morceaux – auxquels on n'impose pas d'être traçables à la règle et au compas – de façon qu'en recombinaison les morceaux on obtienne un carré de même aire ? Recombiner signifie déplacer les morceaux sans les déformer, en leur appliquant uniquement des translations, des rotations ou des symétries.

Ce problème, posé par le grand logicien polonais Alfred Tarski en 1952, sera résolu plus vite que son ancêtre classique. Sa solution complète est à la fois étonnante et décevante. Elle comporte deux volets.

AVEC DES CISEAUX OU AVEC DES ENSEMBLES ?

Si l'on impose aux morceaux du découpage d'être des formes géométriques limitées par des arcs de courbes régulières (cas du découpage aux ciseaux), alors L. Dubins, M. Hirsch et J. Karush ont établi en 1963 que la réponse est négative : la quadrature du cercle par découpage aux ciseaux est impossible. Il découle de leur théorème que vous ne pourrez donc pas décomposer aux ciseaux un cercle en une autre figure convexe, de type carré, triangle, œuf, ovale ou polygone régulier.

En revanche – et c'est le second volet de la réponse au problème de quadrature par découpage de Tarski –, si l'on accepte que les morceaux puissent être des sous-ensembles quelconques du disque original, alors la réponse est positive. Cela découle d'un résultat de M. Laczkovich, qui propose d'ailleurs une recombinaison du carré en n'effectuant que des translations à partir des pièces du disque découpé : la quadrature du cercle par découpage ensembliste est possible et ne nécessite que des translations. Le résultat de M. Laczkovich énonce aussi que, si deux polygones

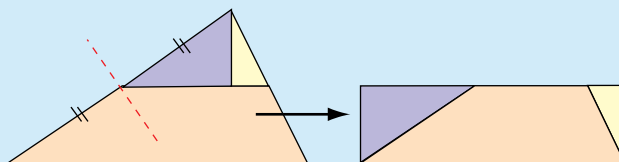
2. THÉORÈME DE WALLACE-BOLYAI-GERWEIN

Deux polygones de même aire peuvent être transformés l'un en l'autre par dissection polygonale.

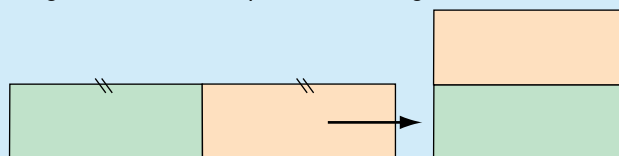
Démonstration

Pour transformer deux polygones de même aire l'un en l'autre par dissection polygonale, suivre les instructions suivantes.

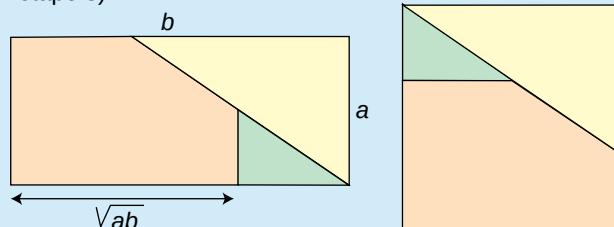
- (1) Découper le premier polygone en triangles.
- (2) Transformer chaque triangle en un rectangle (ce découpage s'applique à tout triangle, car dans tout triangle au moins l'une des hauteurs coupe le côté opposé) :



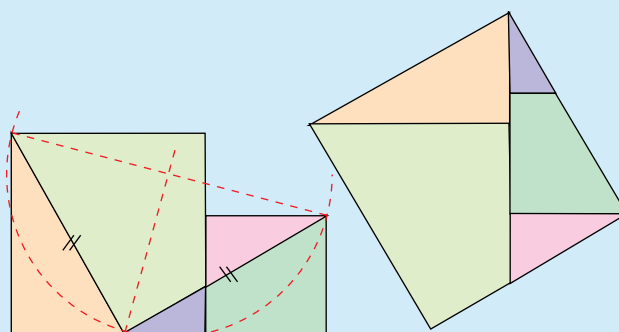
- (3) Transformer les rectangles ayant une longueur plus grande que quatre fois la largeur en rectangles ayant une longueur inférieure à quatre fois la largeur :



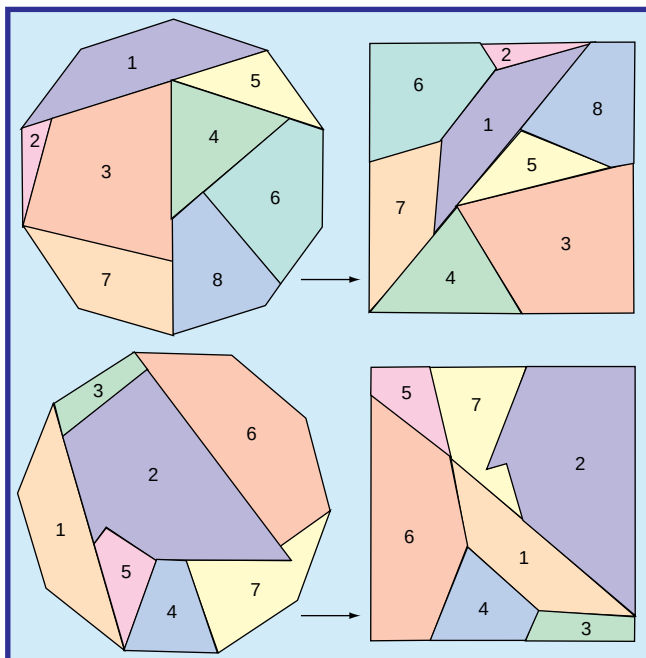
- (4) Transformer chaque rectangle en carré (cette construction ne fonctionne que si la longueur est inférieure à quatre fois la largeur, d'où la nécessité de l'étape 3) :



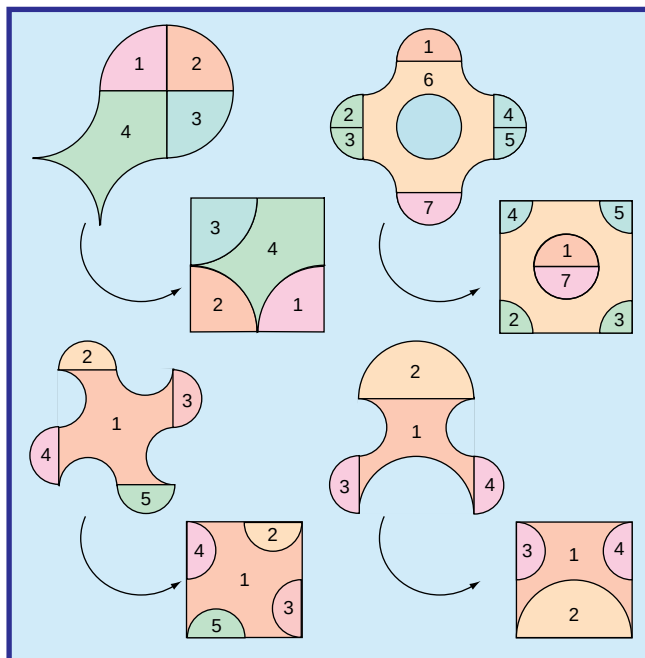
- (5) Fusionner les carrés, deux par deux, progressivement, jusqu'à avoir un unique grand carré :



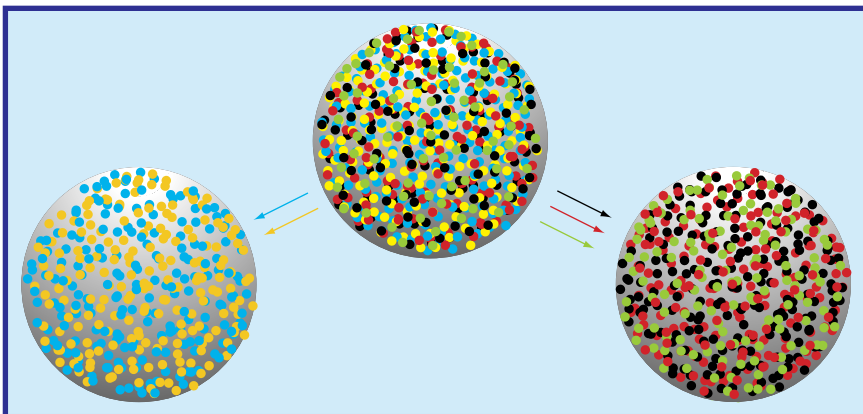
- (6) Opérer de la même façon pour le second polygone.
- (7) Superposer les découpages intervenus pour transformer le polygone 1 en carré à ceux obtenus pour transformer le polygone 2 en carré. Par construction, les pièces obtenues permettent de reconstituer le polygone 1 et le polygone 2.



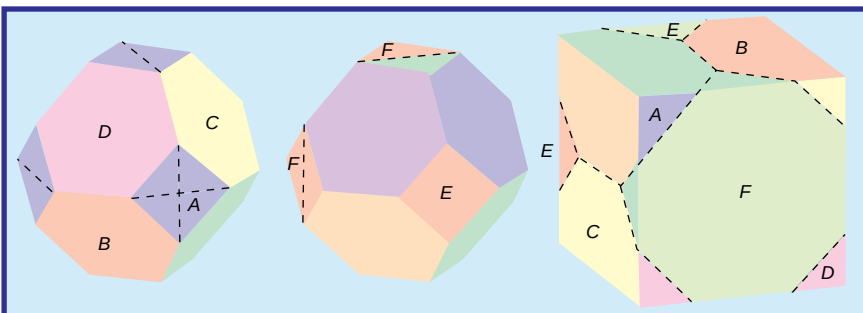
3. Record de découpage. Dans son livre de 1964, le champion mythique des découpages Harry Lindgren propose un découpage du dodéca-gone en carré n'utilisant que huit pièces. Son digne successeur, Gavin Theobald, a réussi le miracle de gagner une pièce. Il est très rare qu'on puisse établir qu'un découpage est optimal ; ici, il paraît invraisemblable qu'on puisse encore gagner une pièce, mais qui sait ?



4. Les Grecs utilisaient des découpages pour évaluer l'aire de mor-ceaux du plan, y compris ceux dont des bords sont curvilignes. Voici des formes appelées lunules dont le découpage permet de calculer l'aire en la ramenant à celle d'un carré. Hippocrate de Chio, vers 430 avant J.-C. voulait «quarrer le cercle». Pour cela, il s'intéressa à la qua-drature des lunules, qui, pensait-il, le conduirait à la solution.



5. La décomposition paradoxale de la sphère ou le paradoxe de Banach-Tarski. Une sphère pleine est composée de points jaunes, bleus, verts, rouges, noirs. Il est possible en déplaçant les points de cette sphère, stipule le théorème, de constituer une sphère pleine composée de points jaunes et bleus et une autre sphère pleine composée de points verts, rouges et noirs. Lors du déplacement, la distance mutuelle de deux points d'une même couleur ne change pas. Les mathématiciens ont démontré que le nombre de sous-ensembles est au minimum égal à 5, correspondant aux cinq couleurs représentées ici.



6. David Paterson et Anton Hanegraaf ont, indépendamment, remarqué qu'on pouvait dissé-quer un cube en six pièces pour obtenir deux octaèdres tronqués.

quelconques ont la même aire, on peut découper le premier, déplacer ses pièces en n'effectuant que des translations et recomposer le second.

GÉOMÉTRIE ENSEMBLISTE

De tels découpages théoriques n'ont aucune traduction physique, et aucune figure de cet article ne vous donnera une idée des pièces de M. Laczkovich qui réalisent la quadrature du cercle. Pourquoi ? Parce que la preuve de leur existence utilise l'axiome du choix et que les pièces des découpages sont d'une telle complexité – pire que les fractales ! – qu'on ne peut pas les représenter de façon réaliste. De surcroît, le «découpage» du disque de M. Laczkovich comporte plus de 10^{50} pièces !

On sait que l'axiome du choix fut l'objet d'âpres discussions lors de la mise au point de la théorie des ensembles et de son adoption par les mathématiciens du début du xx^e siècle. Rappelons que l'axiome du choix affirme que, si E est un ensemble non vide d'ensembles non vides alors on peut constituer un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chaque ensemble de E . Ainsi, à partir de l'ensemble $E = \{\{a,b\},\{e,f\},\{g,h\},\{i,j\}\}$, on obtient par choix $\{a,f,h,j\}$. L'axiome du choix ne crée de difficultés que lorsque E est infini, ce qui est le cas en géométrie.

Ce n'est pas la première fois que les problèmes de découpage mettent le

mathématicien utilisateur de l'axiome du choix dans une position inconfortable : le paradoxe de Banach-Tarski est un autre exemple de cette situation. Pour l'expliquer, examinons le cas des découpages dans l'espace.

DÉCOUPAGE DANS L'ESPACE

Le passage à la dimension trois change entièrement la situation. D'abord, en dimension trois, il n'existe aucun théorème général équivalent à celui de Wallace-Bolyai-Gerwein. On sait au contraire, depuis presque un siècle, que certains polyèdres ne sont pas décomposables par dissection polyédrale en d'autres.

La décomposition par dissection polyédrale du tétraèdre régulier était l'objet du troisième problème posé par Hilbert en 1900, parmi 23 dont le dixième sur les équations diophantiennes a été évoqué dans la rubrique du mois de février. Ce troisième problème a été résolu le premier : avant la fin de l'année 1900, Max Dehn avait associé un coefficient à chaque polyèdre et montré que ce coefficient ne changeait pas quand on procède à une dissection polyédrale. Cette propriété d'invariance du coefficient (appelé invariant de Dehn) implique que deux polyèdres qui n'ont pas le même coefficient ne sont pas décomposables par dissection polyédrale l'un en l'autre. Jean-Pierre Sydler, en 1965, a prouvé qu'avoir le même invariant de Dehn était non seulement nécessaire, mais aussi suffisant pour que deux polyèdres soient décomposables par dissection polyédrale l'un en l'autre. En calculant l'invariant de Dehn des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, octaèdre, cube, dodécaèdre, icosaèdre), on constate qu'ils sont tous différents, et donc aucun découpage en polyèdres plus petits ne permet de passer de l'un d'eux à un autre.

Le passage à la dimension trois change aussi la dissection ensembliste : alors qu'à deux dimensions la dissection conservait les aires, il n'est plus vrai qu'une dissection transforme un polyèdre en un autre polyèdre de même volume. Pire, et c'est le paradoxe de Banach-Tarski, une sphère peut être décomposée en un nombre fini de morceaux, qui, une fois déplacés (sans déformation), se recomposent en deux sphères identiques à la sphère de départ ! (voir la figure 5). Vous partez d'une sphère en or et, par cette transformation, vous

7. Le cube, l'octaèdre tronqué et le dodécaèdre rhombique sont équivalents par dissection polyédrale. Ces deux dissections en 13 pièces ont été découvertes récemment par Anton Hanegraaf. La première (a) fait passer du dodécaèdre rhombique au cube, la seconde (b) de l'octaèdre tronqué au cube.

