

souris dépourvues de ce gène ont des membres très courts, qui ne se développent correctement ni selon l'axe antéro-postérieur ni selon l'axe proximo-distal.

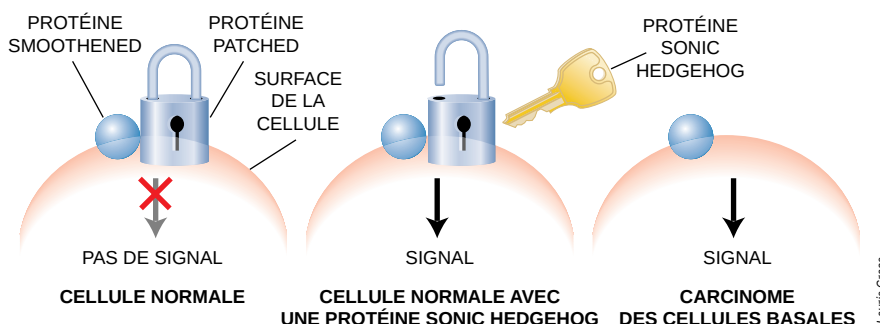
Les souris qui ne produisent pas la protéine Sonic hedgehog présentent d'autres déficits : dans le cerveau et dans la moelle épinière, la protéine indique aux cellules nerveuses primitives de devenir soit des neurones moteurs, soit des neurones sensoriels. Ainsi, les souris dépourvues du gène *Sonic hedgehog*, en plus de leurs pattes trop courtes, n'ont qu'un seul œil et une grave malformation du cerveau, une holoprosencéphalie : le cerveau antérieur n'est pas divisé en deux lobes. Ainsi, le développement normal de neurones moteurs et sensoriels, la formation des deux yeux et celle d'un cerveau bilobé dépendent de l'activité de la protéine Sonic hedgehog dans le tube neural – le précurseur du système nerveux central de l'adulte – et dans les cellules sous-jacentes.

Chez l'homme, l'holoprosencéphalie est l'anomalie congénitale du cerveau la plus fréquente. Elle survient généralement de façon sporadique, mais, parfois aussi, c'est une maladie héréditaire. Le degré d'holoprosencéphalie varie notablement selon les personnes : certaines ont des déficiences cognitives légères, d'autres un handicap grave, et des déformations du squelette du crâne et de la face.

Des mutations inactivant le gène *Sonic hedgehog* sont responsables de certaines formes sporadiques et héréditaires d'holoprosencéphalie. En l'absence d'une protéine Sonic hedgehog fonctionnelle, qui détermine l'axe dorso-ventral du cerveau en développement, les tissus cérébraux et oculaires ne forment pas de structures bilatérales.

Protéines hedgehog et cancer

Qu'un gène, tel *Sonic hedgehog*, intervenant dans la régulation du développement soit responsable de malformations n'a rien d'étonnant. En revanche, les biologistes ont découvert avec surprise des relations entre ce gène et le cancer. La protéine Sonic hedgehog est une protéine de signalisation : elle se lie à une protéine de surface des cellules basales de l'épithélium qui est impliquée dans le déclenchement de carcinomes, des cancers de la peau.



4. LA PROTÉINE SONIC HEDGEHOG active une protéine nommée Patched, qui, à son tour, module l'activité d'une autre protéine, nommée Smoothed ; cette dernière envoie des signaux de croissance à des cellules cutanées. Dans les carcinomes des cellules basales, la protéine Patched est absente ou non fonctionnelle, ce qui permet aux cellules de la peau de se multiplier jusqu'à former des tumeurs.

La plupart des molécules interagissent avec leurs cellules cibles en se fixant à des protéines de surface, nommées récepteurs. La fixation de ces molécules sur leurs récepteurs spécifiques déclenche, dans les cellules, une série de réactions qui conduit à l'activation ou à l'inhibition de certains gènes.

Les récepteurs de la protéine Sonic hedgehog sont constitués de deux sous-unités : l'une, Smoothed, transmet les signaux vers l'intérieur des cellules, et l'autre, Patched, empêche Smoothed d'agir. Lorsque la protéine Sonic hedgehog se fixe sur Patched, la sous-unité de signalisation Smoothed est activée. Néanmoins, dans des cellules dont le génome muté les empêche de fabriquer des protéines Patched fonctionnelles, la protéine Smoothed est activée en permanence, comme si la protéine Sonic hedgehog inondait sans fin les cellules. Toutefois, on ignore encore comment Sonic hedgehog intervient dans le développement normal de la peau et comment la signalisation ininterrompue de Smoothed rend les cellules basales tumorales.

Le carcinome des cellules basales est un cancer de l'épiderme ou des cellules qui tapissent les follicules pileux ; il résulte souvent de mutations provoquées par une surexposition aux rayonnements solaires ultraviolets. Un cancer se déclenche quand les deux exemplaires du gène *Patched* sont mutés dans les cellules de follicules pileux. Ces mutations peuvent apparaître après la naissance, mais certaines personnes naissent avec une mutation dans l'un des deux exemplaires, ce qui augmente les risques de carcinome des cellules basales, puisqu'une seule mutation dans l'autre exemplaire suffit alors à déclencher la maladie. Le carcinome des cellules basales se traite bien, mais les récives sont fréquentes.

Si l'on parvenait à bloquer l'activité de la protéine Smoothed, on réussirait à prévenir ces cancers.

A posteriori, le rôle de la protéine Sonic hedgehog dans les cancers n'est pas surprenant : les biologistes moléculaires ont montré que les mécanismes du développement et ceux du cancer se ressemblent souvent. Ainsi, les facteurs de la régulation de la croissance cellulaire et du développement chez l'embryon interviennent aussi chez l'adulte. Lorsque, chez l'embryon, les gènes codant ces facteurs sont mutés, des malformations de naissance surviennent ; lorsque ces mutations apparaissent chez l'adulte, des tumeurs risquent de se développer.

La surprise vient plutôt de la variété des effets de la protéine Sonic hedgehog. Le gène *Sonic hedgehog* est apparu il y a longtemps : tant la drosophile que les vertébrés utilisent de plusieurs façons les protéines codées par ce gène et par d'autres gènes du développement. Une fois qu'une voie de signalisation moléculaire est tracée, la nature trouve souvent différentes façons de l'utiliser. L'un des thèmes récurrents de la symphonie de la vie pourrait être la participation de la protéine Sonic hedgehog...

Robert RIDDLE est professeur à la Faculté de médecine de Pennsylvanie ; il a travaillé dans le laboratoire que dirige Clifford TABIN à la Faculté de médecine de Harvard.

Scott F. GILBERT, *Developmental Biology*, 5^e édition, Sinauer Associates, 1997.

Neil SHUBIN, Cliff TABIN et Sean CARROLL, *Fossils, Genes and the Evolution of Animal Limbs*, in *Nature*, vol. 388, pp. 639-648, 14 août 1997.

John GERHARD et Marc KIRSCHNER, *Cells, Embryos and Evolution*, Blackwell Science, 1998.

Mesures et information

JACQUES OKSMAN

*Comment connaître des grandeurs qui ne sont pas directement observables ?
En les déduisant d'observations auxquelles elles sont reliées par des modèles.*

Un conducteur qui aborde une agglomération ralentit. Il adapte la vitesse de son véhicule en se fondant sur les indications de son compteur de vitesse. Ce dernier est une interface entre le monde physique, le véhicule en mouvement, et le monde de la décision, le conducteur. Cette interface réalise une mesure.

Dans notre vie quotidienne, la mesure évite que nous nous trompions trop souvent. En science, elle permet de corroborer ou d'infirmer des hypothèses ou des modèles de la réalité. Ainsi, à la fin du XIX^e siècle, la théorie de la relativité restreinte est née quand on a mesuré que la vitesse de la lumière était constante dans des repères en mouvement les uns par rapport aux autres.

La mesure est une recherche de la connaissance quantitative de la réalité, fondée sur l'observation de celle-ci. Toutefois, cette observation n'est pas toujours aussi directe que pour la vitesse d'un véhicule, et la « mesure » n'est pas restreinte à l'« observation » : dans cet article, nous nommons « mesure » toute opération visant à l'obtention d'une certaine quantité d'information.

Industriellement, la mesure est évidemment importante. Par exemple, les industriels qui déposent du zinc sur des tôles d'acier pour les protéger de la corrosion souhaitent obtenir une couche la plus uniforme possible, d'une part parce qu'une minceur excessive est source de défauts, et, d'autre part, parce qu'une épaisseur excessive est source de gaspillage et de coût. Afin de régler le dépôt, on doit en permanence mesurer l'épaisseur de la couche. Un procédé classique consiste à observer les valeurs de l'impédance d'une bobine électrique placée en regard de la tôle (voir la

figure 1). Alimentée par un courant alternatif, la bobine crée dans le zinc et dans l'acier des courants électriques dits « courants de Foucault », du nom du physicien français Léon Foucault (1819-1868) ; ces courants agissent en retour sur la bobine : pour une fréquence donnée du courant d'alimentation, l'impédance de la bobine (qui caractérise son comportement électrique) dépend de la répartition des courants de Foucault et, donc, de l'épaisseur du zinc.

Toutefois, dans les conditions industrielles, ni la température du zinc (dont dépend sa résistivité) ni la distance entre la tôle et la bobine ne sont connues avec précision. Or, les variations de ces deux dernières grandeurs ont, sur les impédances, des conséquences supérieures à celles qui sont créées par les variations de l'épaisseur du zinc. On doit alors considérer comme inconnues l'épaisseur du zinc, bien sûr, mais aussi sa résistivité et la distance entre la bobine et la tôle.

Comment mesurer l'épaisseur du zinc ? On doit d'abord modéliser le système physique, c'est-à-dire écrire les relations entre les inconnues et les valeurs de l'impédance de la bobine à différentes fréquences : c'est le problème direct. Puis on cherche quelles valeurs des inconnues sont associées aux valeurs de l'impédance qui ont été mesurées : c'est le problème inverse.

En recherche comme dans l'industrie, on doit souvent chercher ainsi des valeurs de grandeurs inconnues à partir de l'observation d'autres grandeurs et de la connaissance de la relation qui existe entre ces inconnues et les observations. Par exemple, en prospection pétrolière, on souhaite souvent connaître la quantité de pétrole présente dans

un gisement, alors que l'on ne peut observer des grandeurs (des résistances électriques, par exemple) que dans un puits (voir la figure 2). Le contrôle non destructif de canalisations s'effectue souvent par sondage aux ultrasons ou analyse par courants de Foucault : on cherche les caractéristiques géométriques d'éventuelles fissures en analysant des signaux mécaniques ou électriques. Enfin, les instituts de sondage, pour connaître les opinions d'une population, n'en interrogent qu'une partie, puis déduisent de ces observations les pourcentages cherchés. Afin de résoudre de tels problèmes, de nombreuses équipes mettent au point des méthodes générales d'exploration des problèmes inverses. Nous avons notamment trouvé des méthodes qui résolvent les problèmes « mal posés » par un choix pertinent du modèle utilisé.

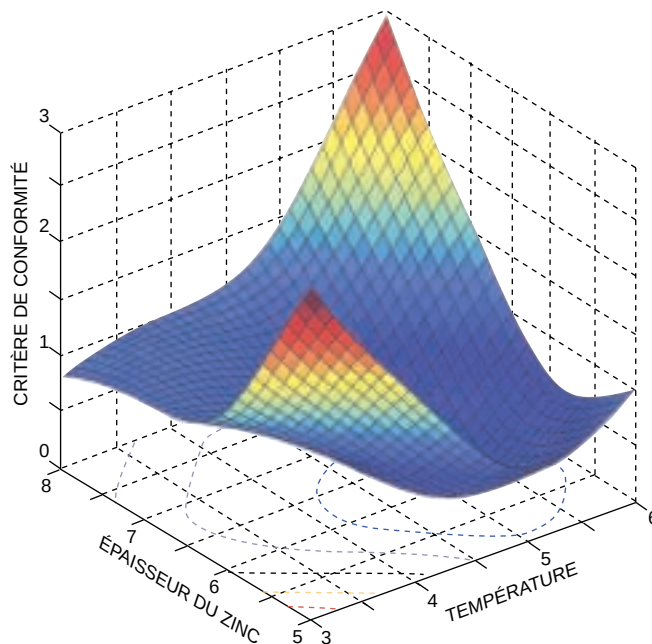
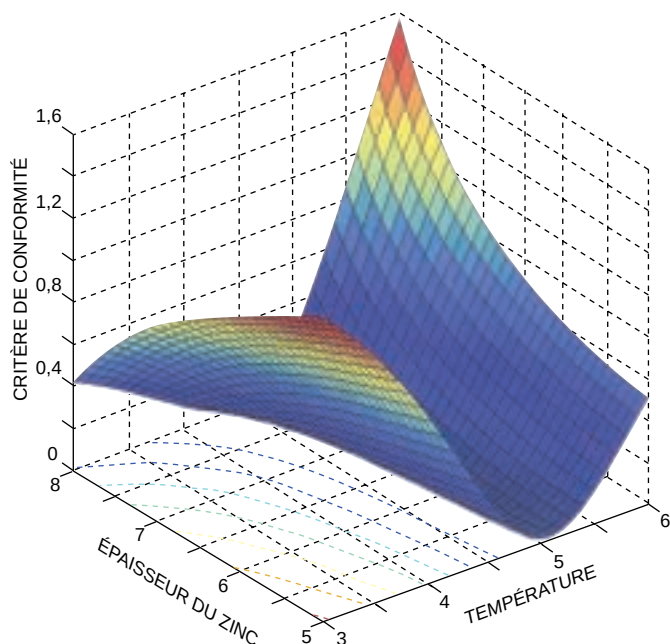
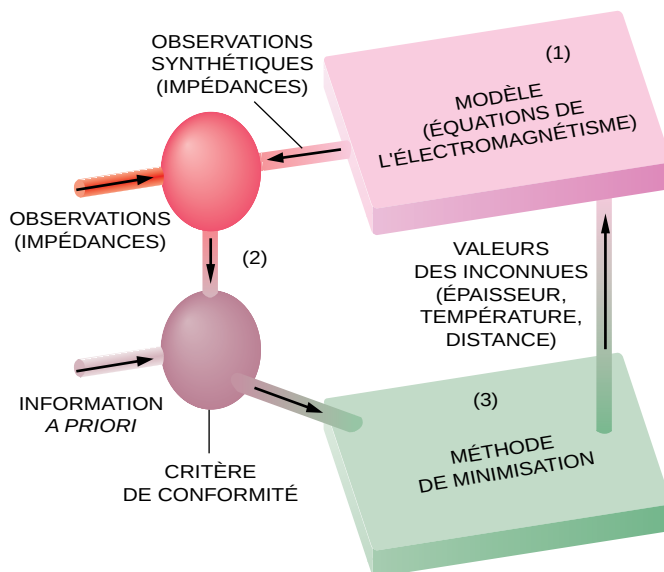
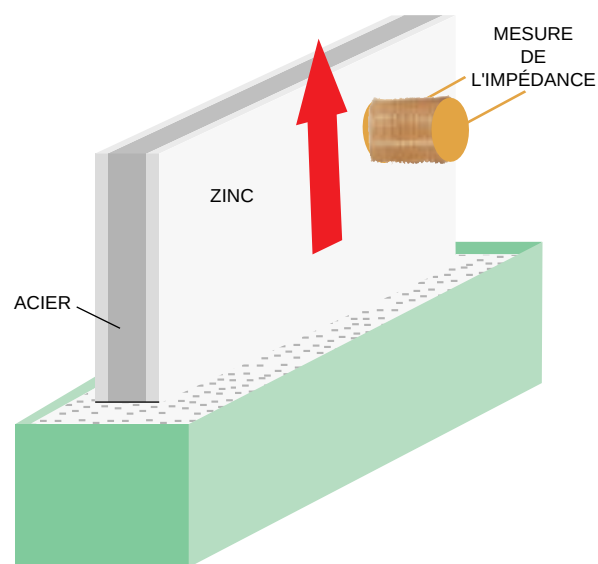
Des mesures généralisées

Dans tous les exemples précédents, les mesures sont indirectes, mais elles s'apparentent à la simple mesure d'une longueur à l'aide d'un double décimètre : l'objectif est toujours d'extraire de la réalité une ou plusieurs valeurs de grandeurs. La démarche générale de mesure consiste à chercher les valeurs des inconnues les plus proches de la réalité à l'aide d'un modèle direct de la réalité, c'est-à-dire d'une relation entre des inconnues et des grandeurs observables (dire, par exemple, que la différence de potentiel aux bornes d'une résistance électrique est proportionnelle au courant qui traverse la résistance exprime un modèle de la réalité). Cette démarche se nomme « inversion », puisqu'il s'agit d'inverser la relation directe.

Ainsi, dans le cas du dépôt de zinc; en nous fondant sur la théorie de l'électromagnétisme, nous obtenons assez facilement des équations qui expriment l'impédance de la bobine à une fréquence donnée en fonction des trois inconnues, l'épaisseur, la température et la distance. On peut ainsi calculer les

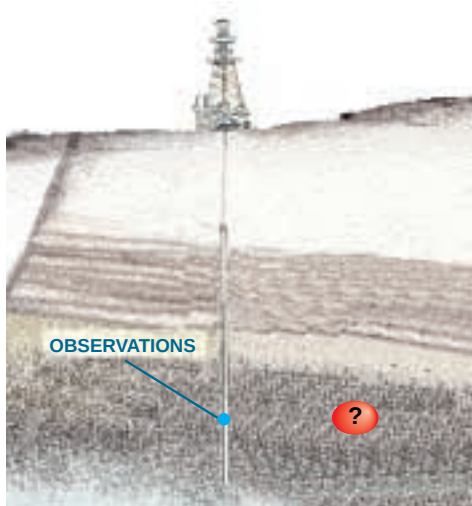
valeurs de l'impédance pour toutes les valeurs possibles des inconnues. Il suffirait alors, en principe, de chercher pour quelles valeurs des inconnues l'impédance calculée est la plus proche de l'observation. Malheureusement, en pratique, cette méthode donne une infinité de valeurs pour l'épaisseur.

Dans de nombreux autres cas, l'inversion est ainsi compliquée, en particulier par l'incertitude des observations et de la modélisation. La diversité des exemples que nous traitons nous a conduits à mettre au point une démarche générale de mesure, qui permet de réaliser l'inversion en tenant compte de l'in-

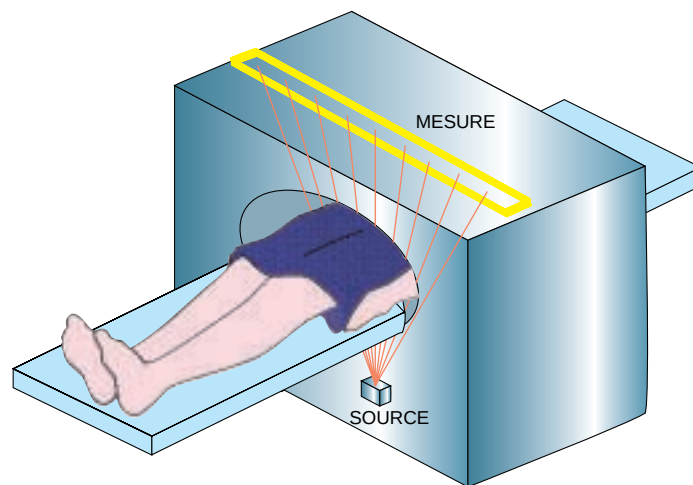


1. COMMENT MESURER L'ÉPAISSEUR de zinc déposé sur une tôle d'acier dans une cuve de galvanisation (en haut, à gauche)? Quand on enregistre l'impédance (le comportement électrique) d'une bobine d'induction qui est parcourue par un courant électrique, on obtient un signal qui dépend de l'épaisseur du zinc, mais aussi de la distance entre la bobine et la tôle, et de la température, mal connues. On doit donc chercher les valeurs de ces trois inconnues. On calcule d'abord l'impédance de la bobine pour toutes les valeurs possibles des trois inconnues. Les valeurs de ces inconnues correspondant à une observation donnée sont celles pour lesquelles une «distance» (nommée critère de conformité aux observations) entre l'impédance calculée et l'impédance observée est minimale. Toutefois, à cause de l'incertitude sur les observations, cette méthode fournit une infinité de valeurs (en bas, à gauche, on n'a représenté, par commodité, le critère de conformité qu'en

fonction de deux des trois inconnues ; les unités sont arbitraires) : le critère de conformité est minimal pour une infinité de valeurs de l'épaisseur, qui correspondent à la «vallée» centrale. En choisissant convenablement les fréquences auxquelles on mesure l'impédance de la bobine, on peut toutefois obtenir que le critère de conformité ne présente plus qu'un seul minimum (en bas, à droite). Cet exemple illustre la méthode générale de mesure exposée dans l'article (en haut, à droite) : (1) avec un modèle du système physique étudié, on calcule les observations correspondant à des valeurs arbitraires des inconnues (l'épaisseur, la distance et la température) ; (2) on calcule un critère de conformité entre ces observations synthétiques et les observations réelles, complété de l'information a priori dont on dispose sur les observations ; (3) on recherche les valeurs des inconnues qui minimisent ce critère de conformité, puis on répète l'opération.



2. COMMENT CONNAÎTRE la quantité de pétrole contenue en un point quelconque d'un gisement ? L'opération est de même nature que la tomographie aux rayons X. Dans les deux cas, les nombres d'in-



connues (la quantité de pétrole en divers points autour du puits, ou l'absorption des rayons X par les différentes zones de la section de corps étudiée) est supérieur au nombre de mesures.

certitude. Nous le verrons, cette démarche se fonde sur la recherche d'une modélisation du problème qui tient compte à la fois des incertitudes et des *a priori* sur les valeurs cherchées.

Le cadre général que nous proposons ne remplace pas le savoir-faire des ingénieurs, mais il les guide pour l'élaboration de méthodes de mesure adaptées à chaque situation. Il leur permet aussi d'évaluer quantitativement la qualité de ces méthodes.

Problèmes non linéaires

La première des difficultés que pose le problème de la mesure tient aux relations entre les inconnues et les observations. Lorsque nous mesurons la vitesse du moteur dans une voiture, nous «remontons» de l'observation de la position angulaire de l'aiguille du compte-tours jusqu'à cette vitesse. On n'a évidemment guère besoin, dans ce cas, de théories ni d'ordinateurs spécialisés. Toutefois, le concepteur du compte-tours a étudié la relation qui existe entre la vitesse (inconnue) et la position angulaire de l'aiguille (observation), puis il a inversé cette relation pour obtenir celle qui existe entre l'observation et la vitesse mesurée : c'est cette dernière relation qu'il a exprimée en traçant la graduation du cadran.

Dans ce cas simple, la relation directe est linéaire : il suffit de multiplier la vitesse par un coefficient constant pour connaître la déviation correspondante de l'aiguille. Pour la mesure de l'épaisseur du zinc, si la relation directe était linéaire, c'est-à-dire si l'impédance à une fréquence donnée était égale à la somme de a fois l'épaisseur, plus b fois

la température, plus c fois la distance, on pourrait écrire trois fois cette relation, pour trois fréquences différentes, et l'on représenterait le problème direct par une matrice carrée, tableau de trois lignes et de trois colonnes contenant les coefficients a , b et c pour chacune des trois fréquences. Afin de résoudre le problème inverse, on calculerait la matrice inverse, et l'on déterminerait les inconnues en multipliant cette matrice inverse par l'ensemble des observations.

Toutefois, en règle générale, on ne dispose pas du même nombre d'observations que d'inconnues. Par exemple, en tomographie aux rayons X, une source ponctuelle émet des rayons X, et l'on souhaite reconstruire l'image d'une coupe (à deux dimensions) d'un objet avec des capteurs disposés en ligne (donc sur une seule dimension). Les inconnues sont l'absorption, par chacun des points de la section corporelle étudiée, du rayonnement émis. Ces absorptions sont à l'évidence plus nombreuses que les observations, l'intensité reçue par les capteurs. *A contrario*, dans le cas des sondages par exemple, on réalise un grand nombre d'observations, alors que l'on ne recherche qu'une inconnue.

Dans tous ces cas, l'inversion n'est pas aussi simple que lorsque le nombre d'observations est égal au nombre d'inconnues. Si la relation directe était linéaire, on la représenterait par une matrice rectangulaire, et on résoudrait le problème inverse en calculant une matrice «inverse», par une méthode mathématique qui généralise la notion d'inverse. Toutefois, les relations directes de la nature physique ne sont

en général pas linéaires, sauf localement (parmi les exemples précédents, les seuls cas linéaires sont ceux du compteur de vitesse et de la tomographie). On ne peut même que rarement exprimer la relation directe sous la forme d'une fonction mathématique explicite qui relie les inconnues aux observations. On est alors contraint de calculer numériquement les valeurs des observations en fonction des inconnues.

Construire un modèle

Dans l'exemple du dépôt de zinc, nous avons utilisé un modèle pour relier les inconnues aux observations. Plus généralement, il existe deux approches pour obtenir un modèle d'un système physique. La première utilise la connaissance des lois internes du système. Dans l'exemple du zinc, on applique les équations fondamentales de l'électromagnétisme à la géométrie de la tôle et de la bobine pour calculer l'impédance de cette dernière. C'est ce que l'on nomme un modèle de connaissance, ou modèle interne. Ces modèles sont utilisés en physique pour la prévision des résultats d'expériences : leur vocation est de représenter au mieux la réalité.

La seconde approche consiste à recenser d'abord les inconnues et les observations ; puis, par des procédés mathématiques appropriés, on choisit la fonction mathématique qui représente au mieux la relation entre les inconnues et les observations. On parle alors de modèles externes, ou de comportement.

Ces deux approches ne sont pas contradictoires ; elles peuvent même être complémentaires. Leurs caractéristiques

sont, en revanche, différentes. Les modèles internes nécessitent non seulement une connaissance fine des phénomènes, qui sera toujours limitée par des approximations, mais aussi la possibilité de déduire de cette connaissance les relations entre les inconnues et les observations. Lorsque l'on veut résoudre le problème direct, on doit intégrer ces lois locales. Sauf dans quelques cas très simples, donc peu réalistes, cette intégration n'est possible que par un calcul numérique. Ces calculs sont longs et complexes, et l'on ne peut donc songer à les utiliser systématiquement dans les mesures, sauf si l'on n'est pas tributaire du temps de calcul.

Les modèles externes ont des avantages et des inconvénients symétriques des modèles internes. Tout d'abord, ils n'ont pas le caractère universel des premiers : ils peuvent être satisfaisants pour un système donné, mais très mauvais pour un autre, à peine différent du premier. De plus, ils ne sont représentatifs que du domaine où l'on a observé les entrées et les sorties du système. Par exemple, un amplificateur peut être modélisé par une constante multiplicative si sa tension d'entrée est inférieure à dix volts, mais des saturations, non prises en compte dans ce modèle, peuvent apparaître au-delà. En revanche, ces modèles ont une très faible complexité calculatoire, ce qui est évidemment avantageux.

Comment alors choisir un modèle ? Un modèle interne est unique, à un degré de finesse donné, tandis qu'il peut exister plusieurs modèles externes, différant par leur structure, c'est-à-dire par la fonction mathématique qui relie les entrées aux sorties. Par exemple, par trois points, on peut choisir de faire passer soit une parabole, soit une cubique (une courbe associée à un polynôme de degré égal à 3), soit encore une fraction rationnelle (le quotient de deux polynômes). Puisque de tels choix existent, on doit tenir compte des objectifs de la mesure.

Imaginons ainsi que nous voulions prédire la population d'un État à partir d'observations passées de celle-ci : il suffit de choisir un modèle de cette évolution et d'extrapoler. Les programmes d'ajustement de courbes proposent souvent, par exemple, d'utiliser des fonctions nommées «polynômes de Lagrange», dont les coefficients sont tels que la courbe représentative passe par tous les points observés (voir la figure 3). Malheureusement, cette courbe chute

rapidement après le dernier point observé : elle ne donne évidemment pas une prévision correcte de la démographie (sauf guerre ou épidémie improbables). En revanche, les polynômes de Lagrange sont utiles pour les estimations, par interpolation, de la population entre deux années d'observation.

Autrement dit, on doit choisir les modèles en fonction de ce que l'on veut mesurer. Un modèle ne sert pas à représenter toute la réalité : il n'est utile que par référence à un objectif donné.

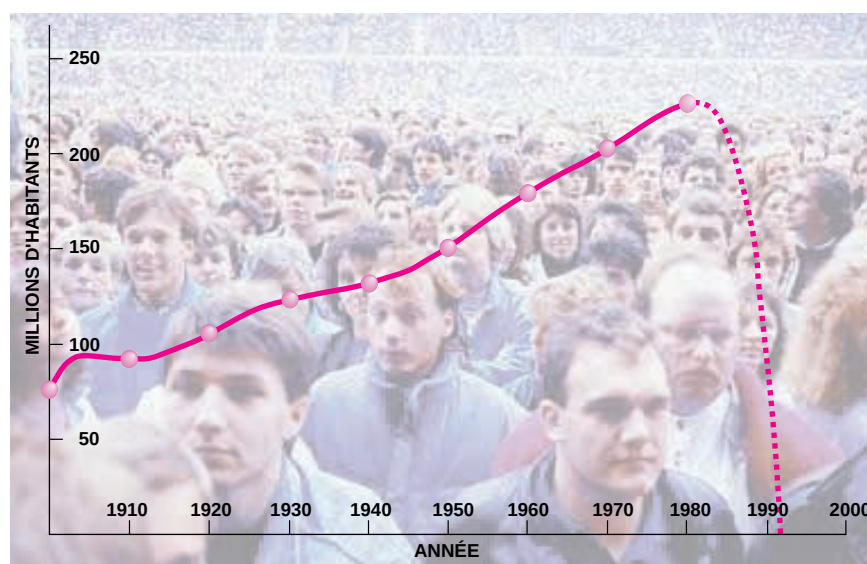
Existe-t-il des critères objectifs de choix de modèles ? Le but d'une mesure est d'obtenir un maximum d'information à partir d'observations. Dans l'exemple de la prédiction de la population, la meilleure fonction n'est pas celle qui passe par tous les points observés, mais celle qui assure la prédiction voulue avec la meilleure précision. De façon générale, le choix du modèle influe sur l'incertitude finale sur les valeurs des inconnues : il est donc logique de choisir le modèle tel que cette incertitude finale soit la plus faible possible. Dans la pratique, on fonde ce choix sur le calcul de la relation entre l'incertitude sur les observations et l'incertitude finale sur les inconnues.

Quantifier l'incertain

On ne parvient toutefois jamais à annuler complètement cette incertitude. S'il est une chose que sait l'homme, ou qu'il devrait savoir, c'est qu'il ne sait pas

tout : sa connaissance de la réalité est imparfaite. La relation directe, aussi simple soit-elle, n'est jamais connue avec une certitude absolue. Dans le cas, pourtant simple, du compteur de vitesse, on ne tient ainsi pas compte du jeu des pièces, ni des vibrations mécaniques, ni du mouvement brownien dans l'air. En pratique, on ne distingue pas l'incertitude des observations des incertitudes liées au choix du modèle : on traite toutes les incertitudes comme s'il s'agissait d'incertitudes sur les observations.

Or, quand on mesure une grandeur, on a autant besoin de connaître sa valeur que la précision avec laquelle elle est obtenue. Nous devons donc, lors de l'inversion, prendre en compte les incertitudes dans nos calculs. Nous utilisons à cette fin une approche probabiliste : à toute grandeur incertaine, nous associons une fonction, nommée fonction de densité de probabilité, dont l'amplitude est proportionnelle à la probabilité de trouver une valeur de la grandeur au voisinage d'un point. Nous pouvons alors appliquer à ces variables incertaines tous les outils mathématiques des probabilités et des statistiques, et nous prenons effectivement en compte l'incertitude dans leur traitement. Cette approche permet aussi de donner une définition quantitative de l'information, par une formule qui exprime la quantité d'information en fonction de la densité de probabilité.



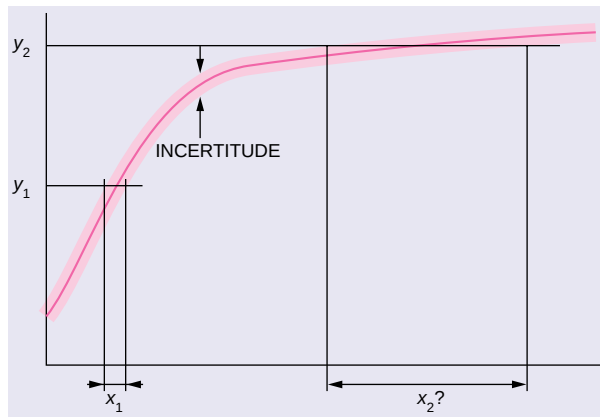
3. LES VARIATIONS DE LA POPULATION des États-Unis sont bien modélisées par une fonction analytique qui passe par tous les points connus (en rose, cet exemple est une mise en garde donnée par le logiciel MATLAB). Ce modèle ne permet manifestement pas de faire des prévisions : il prévoit une diminution très improbable. En revanche, le même modèle est utile pour des interpolations entre des mesures.

Notons que l'utilisation de lois de probabilité ne signifie pas que les variables manipulées soient aléatoires. Nous nous plaçons ici dans le cadre purement utilitaire de la définition de l'information : nous ne nous préoccupons pas du sens de la fonction de densité de probabilité, mais seulement de son utilité pour le traitement de l'incertitude.

Grâce aux lois de probabilité, on peut aussi définir la justesse de la mesure : si l'on fait une mesure, on veut non seulement qu'elle soit le moins incertaine possible, mais aussi qu'elle soit juste ! Ainsi, au tir à la cible, des impacts groupés sur le bord de la cible témoignent d'un tir peu incertain, mais faux (c'est généralement le centre qui est visé !) : la justesse est la différence entre la valeur vraie de la grandeur cherchée (qui doit être obtenue par l'étalonnage du système de mesure, c'est-à-dire le relevé des observations en fonction de valeurs fixées pour les grandeurs qui seront inconnues quand on effectuera les mesures) et la moyenne de la loi de probabilité de la mesure.

Dans les cas où une faible incertitude sur les observations conduit à une très grande incertitude sur les inconnues, par exemple quand la relation entre une observation et une inconnue est une fonction à très faible pente (voir la figure 4), on ne peut pas simplement inverser le problème direct. Ces cas, qualifiés de « problèmes mal posés », sont fréquents. Ainsi, dans l'exemple du dépôt de zinc, un choix sans précaution des fréquences de travail conduit à une infinité de valeurs possibles de l'épaisseur.

Si le problème direct est non linéaire, on ne sait généralement pas calculer la transformation des lois de probabilité des incertitudes entre les inconnues et les observations. De plus, le caractère non linéaire transforme des lois dites « centrées » (dont la moyenne est nulle) en des lois non centrées. En effet, tandis qu'un système linéaire soumis à une entrée de valeur moyenne nulle présente en sortie une valeur moyenne nulle (la somme des combinaisons linéaires des incertitudes reste nulle), un système dont la sortie est proportionnelle au carré de l'entrée, par exemple, présente en sortie, dans les mêmes conditions, une valeur moyenne



4. DANS UN PROBLÈME MAL POSÉ, l'incertitude sur les inconnues x est beaucoup plus grande que l'incertitude sur les observations y (cette incertitude est représentée par l'épaisseur de la courbe, en rose clair). On ne peut pas alors inverser le problème, c'est-à-dire déterminer la valeur de x_2 correspondant à l'observation y_2 (en revanche, x_1 est assez bien défini à partir de y_1).

non nulle : ce sont les carrés des incertitudes, tous positifs, qui sont alors combinés, et la moyenne de valeurs positives ne peut être nulle. Ainsi s'introduit une erreur de justesse (un biais), *a priori* non connue, puisque l'on ne dispose pas d'un étalonnage (on ne peut pas tracer la fonction montrant les observations en fonction des inconnues ; dans l'exemple du puits de pétrole, on ne peut pas fabriquer de gisement dont le contenu et la forme soient connus !).

Connaître ce que l'on cherche

Pour résoudre ces problèmes mal posés, comment choisir la « bonne solution » (ou du moins la « meilleure ») parmi l'infinité des solutions possibles ? Si quelqu'un nous demandait la température de notre corps à plus ou moins deux degrés près, nous répondrions sans trop d'hésitation : 37 °C. Supposons que, prenant notre température, nous devions choisir parmi trois valeurs données par un (bien étrange) thermomètre : 55 °C, 11 °C et 37,7 °C. Quelle valeur nous paraîtrait la meilleure ? La réponse, évidente, nous montre que nous avons un critère de choix : avant de faire la mesure, nous avons une idée sur la valeur cherchée. Il existe donc une information sur les inconnues avant que la mesure ne soit effectuée : c'est l'information *a priori*.

Comment utiliser cette information *a priori* ? Tout d'abord, on doit la représenter mathématiquement. Toujours dans l'exemple de la température corporelle, quel serait notre « degré de surprise » en fonction de la valeur donnée

par le thermomètre ? Nous serions très surpris de trouver 60 °C ou 25 °C, moins étonné de trouver 37 °C ou 38 °C. Pour utiliser cette information, le même formalisme que pour l'incertitude est utile : nous définissons une fonction « inverse de la surprise », et nous considérons qu'elle représente la densité de probabilité de la valeur cherchée (ici la température) traitée comme une variable aléatoire. Cette modélisation de l'incertitude est dite « bayésienne », du nom du mathématicien anglais Thomas Bayes (1702-1761) ; en pratique, c'est l'un des procédés les plus efficaces pour traiter les problèmes de mesures généralisées que nous exposons ici.

On améliore encore les résultats en prenant également en compte l'information *a priori* sur la structure propre des solutions recherchées, et non plus seulement sur leurs valeurs. Si l'on sait par exemple qu'un signal radio est émis en modulation de fréquence, le récepteur le recherche sous la forme du cosinus d'une fonction du temps : on ne cherche des solutions que dans l'ensemble restreint de celles qui ont des propriétés particulières.

Cette technique est utilisée par les systèmes dits « numériques » (électroniques ou informatiques), qui ne peuvent suivre continûment les variations des signaux et que l'on rencontre presque partout, particulièrement dans le domaine des télécommunications : un signal est représenté par la suite de ses valeurs obtenues à des instants équirépartis dans le temps. Le problème de la reconstitution des signaux à partir des échantillons observés est bien plus que mal posé : le nombre de solutions est infini ! Le « théorème d'échantillonnage », qui est la base du traitement numérique du signal, impose la structure de la solution : on choisit la courbe qui fluctue le moins entre les points mesurés (en d'autres termes, l'information *a priori* est alors l'hypothèse que le signal émis a été échantillonné suffisamment rapidement par le dispositif émetteur).

Une démarche de mesure

À ce stade, nous pouvons exprimer une démarche générale permettant d'effectuer une mesure, ou encore, comme

nous l'avons dit, d'obtenir de «bonnes solutions». Dans l'exemple du compteur de vitesse, la méthode suivie par le graveur de cadran a été la suivante : il a commencé par tracer la courbe donnant la position de l'aiguille pour certaines valeurs de la vitesse et a ainsi obtenu un modèle direct. Puis il s'est posé la question : «Pour chaque position de l'aiguille, quelle est la valeur de la vitesse qui, appliquée au modèle, créerait un déplacement identique du mouvement réel?» Il a ensuite porté ces indications de vitesse pour chacune des positions.

Ainsi, lorsqu'on applique les «bonnes valeurs» des inconnues à l'entrée du modèle direct, le calcul doit fournir des observations «synthétiques» les plus proches possibles des observations réelles : c'est le critère de conformité aux observations. Pour les cas simples, tel le compteur de vitesse, observations réelles et observations synthétiques peuvent être égales.

Dans les systèmes très incertains ou quand le nombre des observations est différent de celui des grandeurs recherchées, la conformité absolue aux observations est impossible. Dans le cas des problèmes mal posés, la conformité aux observations ne permet pas d'obtenir une solution unique (du moins, avec une précision suffisante). On ajoute alors un second critère : les observations synthétiques doivent être aussi proches que possible de ce que l'on en savait avant de faire la mesure. C'est un critère de conformité à l'information *a priori*.

Dans le cas général, on définit un critère composite, formé d'un critère de conformité aux observations (distance entre les observations et les sorties du modèle, ou observations synthétiques) et d'un critère de conformité à l'information *a priori*. Les «bonnes valeurs» des inconnues sont celles qui minimisent ce critère composite. Dans la pratique, on utilise un algorithme numérique qui effectue des itérations en proposant des solutions successives jusqu'à ce que le critère composite soit minimisé.

La mesure de l'information gagnée

Lorsqu'un ingénieur adopte la démarche que nous venons d'exposer afin de résoudre un problème de mesure particulier, il est conduit à effectuer des choix à plusieurs niveaux de la chaîne de mesure. Ainsi, nous avons vu que la

qualité des mesures dépend du modèle choisi. Plus généralement, on peut énoncer un critère informationnel de la qualité d'une méthode de mesure, qui guidera l'ensemble des choix.

Supposons que l'on fasse la mesure d'une tension comprise entre 0 et 256 volts avec un convertisseur analogique-numérique parfait à 256 niveaux de quantification : un tel appareil transforme une tension analogique, c'est-à-dire variant continûment, en une tension choisie parmi 256 valeurs numériques (ici, chaque niveau de quantification a donc une largeur de un volt). Avant de faire la mesure, on sait que la tension sera toujours comprise entre 0 et 256 volts : c'est l'information *a priori*. Après la mesure, si l'appareil affiche par exemple 123 volts, on sait que la tension était comprise entre 122,5 volts et 123,5 volts : c'est l'information *a posteriori*. La mesure a divisé l'incertitude par 256, et l'on peut alors calculer l'«incrément d'information», qui traduit la différence entre l'information *a posteriori* et l'information *a priori*, exprimées par des fonctions de densité de probabilité. Cet incrément est mesuré en bits : il est ici égal à 8 bits ($2^8 = 256$).

La notion d'incrément d'information caractérise ainsi de façon quantitative la qualité d'une mesure, ou d'un système de mesure (ensemble de l'appareillage et des algorithmes utilisés). Plus cet incrément est grand, meilleure est la mesure.

L'incrément d'information dépend évidemment de l'instrument de mesure. Celui-ci est en partie caractérisé par un certain nombre de paramètres : le nombre et les valeurs des fréquences dans le cas du zinc, le nombre et la position des capteurs de rayonnement dans le cas de la tomographie en rayons X, ou encore le nombre de personnes interrogées dans un sondage. On peut alors optimiser ces paramètres, appelés instrumentaux, soit en maximisant l'incrément d'information pour un nombre d'observations donné, soit en minimisant le nombre d'observations pour une incertitude résiduelle donnée, ce dernier cas se traduisant évidemment par une diminution de la complexité, donc du coût, du système de mesure.

Toutefois, à l'exception, heureusement courante, de quelques cas simples (systèmes linéaires et incertitudes réparties selon une fonction de Gauss, suivant une courbe «en

cloche»), l'incrément d'information ne peut être déterminé que par des méthodes approximatives et lourdes, tandis que les biais induits par certaines non linéarités ne peuvent être pris en compte par des méthodes analytiques. Toutes ces raisons créent des difficultés pratiques qui font que la notion d'incrément d'information, la seule conforme à une définition «informationnelle» de la mesure, reste rarement utilisée (sauf dans le cas des sondages et, plus généralement, des statistiques, où sa mise en œuvre est évidente). Notre équipe a mis au point des méthodes d'évaluation statistiques pour remédier à cette difficulté. Dans les cas très complexes, plusieurs autres méthodes existent, telles celles qui cherchent à minimiser le caractère mal posé du problème.

C'est ce que nous avons fait pour la mesure de l'épaisseur du zinc, en optimisant le choix des fréquences de travail (c'est l'optimisation de l'instrument). Cette optimisation a permis de choisir quelques fréquences pour lesquelles les mesures de l'impédance de la bobine autorisent la détermination (par la minimisation d'un critère de conformité aux observations et à l'information *a priori*) d'un triplet d'inconnues unique (à des incertitudes raisonnables près, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que celles présentes sur les mesures d'impédance).

Jacques OKSMAN dirige le Service des mesures à l'École supérieure d'électricité, à Gif-sur-Yvette.

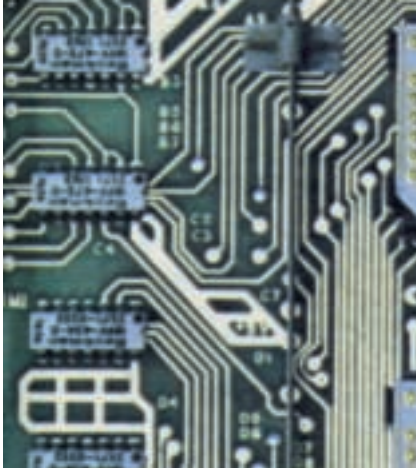
A. TARANTOLA, *Inverse Problem Theory- Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, 1987.

E. WALTER et L. PRONZATO, *Outils et méthodes pour la reconstruction de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, 1994.

L. LE BRUSQUET et J. OKSMAN, *Débit-métrie par traceurs : reconstruction du profil de concentration*, 1^{er} Colloque interdisciplinaire en instrumentation, pp. 531-538, 18-19 novembre 1998.

L. SANDU, J. OKSMAN et G. FLEURY, *Information Criteria for the Choice of Parametric Functions for Measurement*, in *IEEE Transactions on Measurement*, à paraître.

M. DAVOUST, G. FLEURY et J. OKSMAN, *A Parametric Estimation Approach for Grooves Dimensioning using Remote Field Eddy Current Inspection*, in *Research in Nondestructing Evaluation*, à paraître.



Graphes et électronique

IAN STEWART

Comment tester les circuits imprimés.

Le coloriage, un jeu d'enfant ? Détrompez-vous : de nombreux mathématiciens ont cherché à démontrer que quatre couleurs seulement permettent de colorier toutes les cartes de sorte que les pays voisins soient de couleurs différentes, et c'est seulement un superordinateur qui a fini le travail : il a examiné un à un les nombreux cas qui restaient après l'analyse strictement mathématique du problème. Le plus fascinant de l'histoire, c'est que des résultats mathématiques voisins, à propos de coloriages, ont des applications inattendues... en électronique.

Les objets mathématiques utiles sont cette fois des graphes, composés de sommets reliés par des lignes nommées arcs ou arêtes. L'«épaisseur» d'un graphe, notamment, est un concept découvert par

des chercheurs des Laboratoires AT&T Bell, à Murray Hill, qui a été utilisé en électronique par Joan Hutchinson, du Collège Malacaster, dans le Minnesota.

Commençons par une définition : un graphe est planaire, ou d'épaisseur égale à un, s'il peut être dessiné sur un plan, sans que ses arcs se recoupent. Les graphes d'épaisseurs égale à deux sont ceux dont les arcs doivent être groupés en deux ensembles planaires. De même, les graphes d'épaisseur égale à trois ont des arcs qui sont groupés en trois ensembles planaires, etc.

Ainsi un graphe d'épaisseur égale à deux est comme un sandwich : une des tranches de pain porte les arcs du premier ensemble, qui ne se coupent jamais ; l'autre tranche porte les arcs du second ensemble, qui ne se coupent pas non plus. Les sommets étirés en segments verticaux forment en quelque sorte la garniture du sandwich (voir la figure 1).

De même, un circuit imprimé est analogue à un graphe dont les sommets sont les composants électroniques, et dont les arcs sont les connexions électriques entre les composants. Idéalement, les fabricants cherchent à réaliser des circuits imprimés planaires, sans fils chevauchant les pistes conductrices. Avec les cartes à double face, ils réalisent des graphes d'épaisseur égale à deux. Pour réaliser des circuits associés à des graphes d'épaisseur supérieure, plus d'un circuit imprimé s'impose. Ce même genre de considérations se retrouve en micro-électronique, dans la fabrication des puces.

De nombreux circuits imprimés utilisés dans l'industrie sont des grilles de 100×100 trous, où l'on fixe des composants, en les reliant par des pistes horizontales ou verticales faites d'un matériau conducteur. Les fabricants sont confrontés au difficile problème de la détection des cartes défectueuses, où des parties de pistes relient des composants qui devraient être séparés.

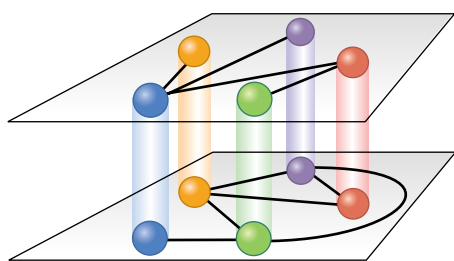
Pour des raisons pratiques, les fabricants groupent les composants d'un circuit imprimé en «maillages de pistes» : un

maillage est un ensemble de composants reliés par des pistes conductrices, sans boucle. Nous examinerons ici le problème de la recherche de courts-circuits, c'est-à-dire de connexions fautives. La méthode de test la plus simple est l'examen de toutes les paires de maillages : on connecte un maillage d'une paire testée au pôle positif d'une pile, et l'autre maillage au pôle négatif, via une ampoule. Si les maillages sont connectés, le courant électrique passe dans la lampe, qui s'allume (dans l'industrie électronique, les appareils de tests sont automatiques).

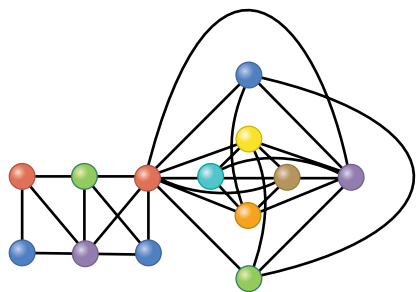
Toutefois, pour des circuits à n maillages, cette méthode nécessite $n(n-1)/2$ tests (c'est le nombre de paires de maillages). Avec des circuits imprimés qui comportent quelque 500 maillages, il faut 125 000 tests par carte, ce qui est excessif. La simple application du concept d'épaisseur d'un graphe réduit le nombre de tests à 11 ! Et, même, avec un peu de réflexion, à seulement 4.

Commençons par construire un graphe qui puisse décrire les courts-circuits : le «graphe de maillages» du circuit. Comme nous cherchons des courts-circuits entre des maillages, nous assignons un sommet à chaque maillage. Les arcs représentent alors les courts-circuits potentiels (pas les courts-circuits existants, bien sûr : si nous savions où ils se trouvent, nous n'aurions pas à les chercher). Plus précisément, deux sommets du graphe de maillages sont joints par un arc chaque fois que les maillages correspondants sont «adjacents», c'est-à-dire qu'ils peuvent être connectés par une droite horizontale ou verticale, qui ne traverse aucun maillage intermédiaire.

En principe, on peut imaginer des courts-circuits entre des maillages qui ne sont pas adjacents, mais des maillages adjacents seraient alors court-circuités et nous les dépisterons si nous identifions les jonctions entre les maillages adjacents. En effet, le robot de fabrication passe deux fois sur le panneau : une fois pour déposer les



1. Ce sandwich représente un graphe d'épaisseur égale à deux : il est composé de deux graphes planaires dont les sommets respectifs ont été étirés en segments verticaux.



2. Le graphe de maillages du circuit imprimé de la figure 3 est d'épaisseur égale à deux (une unité pour chaque face de la carte). Chaque réseau y est représenté par un sommet ; les sommets adjacents sont reliés par des arcs : ce sont les courts-circuits potentiels.