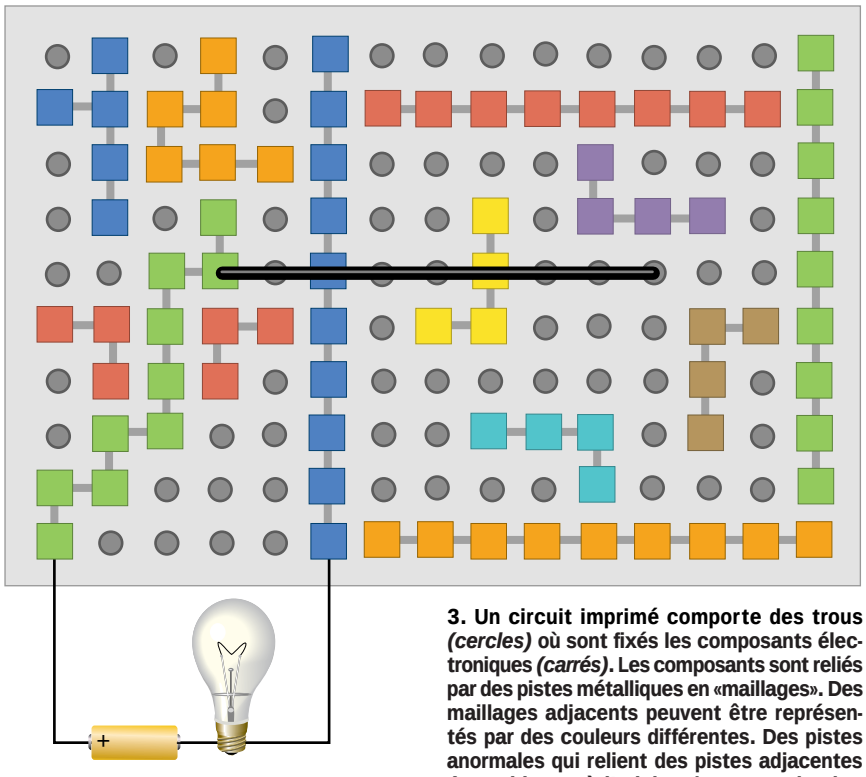
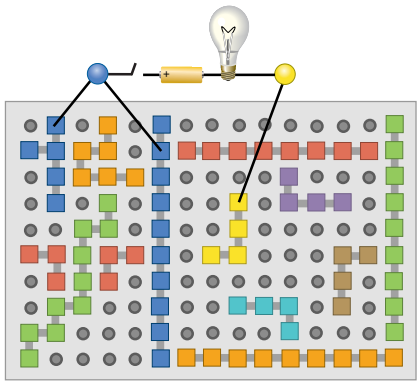
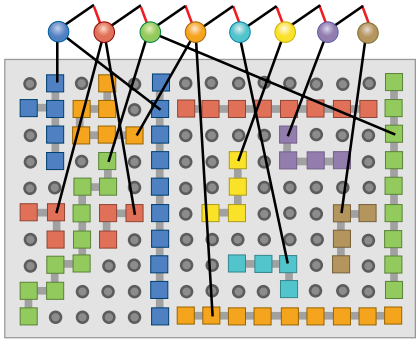


3. Un circuit imprimé comporte des trous *(cercles)* où sont fixés les composants électroniques *(carrés)*. Les composants sont reliés par des pistes métalliques en «maillages». Des maillages adjacents peuvent être représentés par des couleurs différentes. Des pistes anormales qui relient des pistes adjacentes *(en noir)* sont à l'origine de courts-circuits. Quand on relie un circuit composé d'une lampe et d'une pile en série aux maillages bleu et vert, le courant électrique passe dans la lampe, qui s'allume.



4. On teste efficacement les circuits imprimés si l'on cherche des courts-circuits entre groupes de maillages d'une même couleur. En plaçant une ampoule et une pile entre les groupes de maillages bleu et jaune, on détecte un éventuel court-circuit entre les maillages de ces couleurs.



5. On réduit encore le nombre de tests en connectant des groupes de maillages.

connections horizontales, et une fois pour déposer les connections verticales. Des erreurs se produisent quand il dépose trop de matériau conducteur, reliant deux maillages qui devaient être séparés : si deux maillages non adjacents sont ainsi reliés, des maillages adjacents, entre eux, le seront nécessairement aussi.

Nous avons vu que le graphe d'une carte électronique est d'épaisseur égale à deux si les deux faces comportent un circuit imprimé. Le graphe de maillages, pour la même raison, est aussi d'épaisseur égale à deux. Or le mathématicien britannique Percy John Heawood a démontré, au XIX^{e} siècle, que tout graphe d'épaisseur égale à deux peut être «12-colorié» : avec 12 couleurs, on peut colorier les sommets de sorte que deux sommets joints par un arc soient toujours de couleurs différente. Ainsi le graphe de maillages de tout circuit imprimé peut être 12-colorié, et nous pouvons transférer ce coloriage (conceptuellement) aux maillages des circuits imprimés. Avec 12 couleurs, on peut donc associer une couleur à chaque maillage, de sorte que deux maillages de la même couleur ne soient jamais adjacents. Comme nous cherchons les courts-circuits entre des maillages adjacents, nous pouvons restreindre nos recherches à des courts-circuits entre maillages de couleurs différentes.

Pour effectuer ces recherches, groupons tous les maillages de même couleur : pour chacune des 12 couleurs, nous construisons une «sonde», c'est-à-dire une structure arborescente réalisée en matériau conducteur et qui relie tous les maillages d'une même couleur.

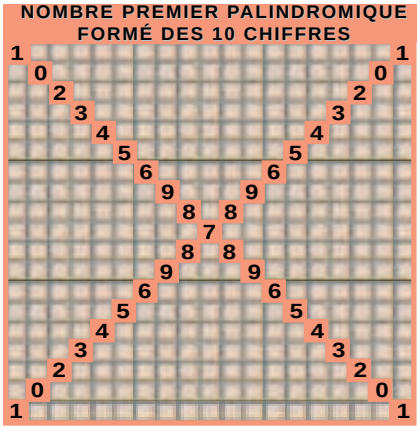
Par exemple, relions tous les maillages bleus ensemble, d'une part, et tous les maillages jaunes, d'autre part. Puis relions ces groupes par l'intermédiaire d'un circuit composé d'une pile et d'une ampoule en série : si le circuit n'est pas défectueux, aucun courant ne passe, car aucun des maillages bleus n'est relié aux maillages jaunes. Le courant ne passe que si une erreur de fabrication a relié un maillage bleu à un maillage jaune.

Ce test n'indique pas où se trouve les courts-circuits éventuels, mais cette information n'est pas utile : les fabricants de circuits imprimés jettent généralement les cartes défectueuses sans chercher à les réparer. Aussi, pour détecter la présence d'un défaut, il suffit de tester toutes les paires possibles de sondes. Au lieu de 125 000 tests, 66 suffisent.

On peut même faire mieux. Testons les groupes de maillages de couleur 1 et de couleur 2 ; rejetons les cartes défectueuse. Puis, relions ensemble les groupes de maillages de couleurs 1 et 2, et cherchons si cet ensemble est relié au groupe de maillages de couleur 3 : si la lampe s'allume, c'est la preuve que le groupe de maillages de couleur 3 est relié au groupe de maillages de couleur 1 ou au groupe de maillages de couleur 2. Or chacune de ces deux éventualités conduit à un défaut, qui nous conduit à rejeter la carte. Nous poursuivons alors les regroupements et les tests : ainsi le nombre de tests est réduit à 11.

Allen Schwank, de l'Université du Michigan, a encore réduit ce nombre. Il écrit d'abord les nombres 1, 2, ... ,12 en binaire : de 0001 à 1100 ; puis il repère chaque groupe de maillages par un de ces nombres. Il construit un «supergroupe» composé de tous les groupes dont le numéro commence par 0 et un autre supergroupe composé des groupes dont le numéro commence par 1. Il cherche si ces supergroupes sont connectés, et élimine les cartes où ils le sont. Pour les autres, il réalise deux nouveaux supergroupes entre les groupes ayant le même deuxième chiffre dans leur numérotation binaire, et il examine leur éventuelle connexion. Sinon il répète l'opération pour les troisièmes chiffres binaires, puis pour les quatrièmes. Et le travail s'achève ainsi. Pour comprendre la méthode, notons que si deux groupes distincts sont reliés par un court-circuit, leur indexation binaire doit différer par au moins un de leurs quatre chiffres ; de ce fait, un des quatre tests doit détecter les courts-circuits.

Les coloriages, un jeu d'enfant ? Peut-être, mais l'industrie électronique a intérêt que ses ingénieurs s'amusent comme des enfants.



Les chasseurs de nombres premiers

JEAN-PAUL DELAHAYE

Nuit et jour, des centaines d'ordinateurs recherchent éperdument des nombres premiers.

Dans le zoo des nombres, les mathématiciens ont identifié, il y a plus de deux mille ans, une espèce remarquable, les nombres premiers (comme 2, 3, 5, 7, 11, ...) qui ne sont multiples exacts que de 1 et d'eux-mêmes. Ces nombres sont aux entiers ce que les éléments sont aux composés chimiques, car tout nombre entier se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers. Exemple : $440 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$.

L'esprit de sérieux s'est emparé du sujet, et des milliers de pages de mathématiques difficiles, voire très difficiles, ont été écrites sur cette espèce numérique qui ne sera jamais en voie d'extinction puisqu'elle est infinie et que, de toute façon, lorsqu'un nombre est premier, rien ne peut changer sa nature !

Les universitaires sont obsessionnellement attachés à la répartition des nombres premiers (quelle est la proportion moyenne des nombres premiers parmi les nombres inférieurs à n?) ; ils s'y cassent le nez depuis plus de cent ans (la conjecture de Riemann, qui donnerait des informations précises de répartition échappe obstinément à toutes les tentatives de preuve). Parallèlement, une secte d'amateurs est restée fidèle à la tradition des pythagoriciens qui furent sans doute les premiers à définir et à prêter attention aux nombres premiers, et à y chercher émerveillements et amusements.

Les membres pacifiques et tranquilles de cette secte examinent les sous-espèces de nombres premiers, mènent toutes sortes de calculs, lancent des défis sans cesse renouvelés qui résistent ou tombent, mais sont alors reformulés en défis plus forts ou plus absurdes. Le tout constitue un jeu à l'échelle planétaire qui s'épanouit sur Internet. Ces zoologues mathématiciens se sont particulièrement intéressés aux nombres premiers *repunits* et aux nombres premiers palindromes.

1. REPUNITS EN BASE 2 ET NOMBRES DE MERSENNE

En base 2, les *repunits* sont de la forme $2^n - 1$. Ces nombres premiers sont dénommés les nombres premiers de Mersenne, en l'honneur du père Mersenne, qui les étudia en 1644.

Ces nombres sont particulièrement intéressants, car on connaît une méthode très efficace pour en tester la primalité. Le test de Lucas-Lehmer est basé sur le résultat suivant : $2^p - 1$ est premier si et seulement si $2^p - 1$ divise $S(p - 1)$, où $S(1) = 4$ et $S(n + 1) = S(n)^2 - 2$.

Grâce à ce test, le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $2^{3021377} - 1$ (découvert en 1998 par Clarkson, Woltman et Kurowki), qui comporte 909 526 chiffres. On espère trouver un nombre premier de un million de chiffres avant l'an 2000.

On connaît aujourd'hui 37 nombres premiers de Mersenne, qui sont ceux correspondant aux exposants: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377. On ne sait prouver que les nombres de Mersenne premiers sont en nombre infini, ni que les nombres de Mersenne composés ayant un exposant premier sont en nombre infini.

LES REPUNITS

Les *repunits* sont des nombres constitués d'une chaîne de 1. Le nombre 11 est premier. En revanche, le nombre 111 ne l'est pas, car $111 = 3 \times 37$. De même, quatre "1" consécutifs ou cinq "1" ne constituent pas des nombres premiers : $1111 = 11 \times 101$ et $11111 = 41 \times 271$. Plus loin, 11...1 (19 fois le "1") est premier comme l'est 11...1 (23 fois le "1"). D'où la question : quels sont les *repunits* premiers ?

Cette question est loin d'être simple, et personne aujourd'hui ne connaît de règles simples permettant de savoir systématiquement et rapidement quels sont les *repunits* premiers et quels sont les *repunits* composés. Notre ignorance n'est cependant pas complète, car on a découvert quelques propriétés des *repunits*.

– Pour être premier, un *repunit* doit nécessairement comporter un nombre premier de "1". En effet, si m divise n alors 11...1 (m fois) divise 11...1 (n fois). On le démontre en généralisant l'égalité $111111111111 = 1111 \times 100010001$ (ce qui est facile).

– Un nombre *repunit* ne peut être ni un carré (comme $25 = 5 \times 5$), ni un cube (comme $27 = 3 \times 3 \times 3$), ni une puissance cinquième (comme $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$). Les deux derniers résultats sont récents, et nul ne sait ce qui se passe pour les puissances autres que les multiples de 2, 3 et 5.

Les *repunits* de petites tailles (moins de 30 000 chiffres) susceptibles d'être premiers ont été étudiés soigneusement. On peut résumer ce qu'on sait en quelques mots :

– 11...1 (n fois le "1") est un nombre premier pour n = 2, 19, 23, 317 (découvert par Hugh Williams en 1978), 1031 (découvert par Hugh Williams et Harvey Dubner en 1986).

– Aucune autre valeur de n inférieure à 30 000 ne donne de *repunits* premiers. Au-delà de 30 000, les calculs deviennent trop longs, et l'on ignore donc ce qui s'y passe, comme d'ailleurs on ignore si l'espèce des *repunits* premiers est infinie.

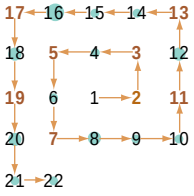
La factorisation des *repunits* est un sport plus difficile que la simple détermination de la primalité : aussi étonnant que cela paraisse, on sait prouver qu'un nombre n'est pas premier avec certitude sans pour autant donner la moindre idée de ses facteurs (voir la figure 1, où une méthode de ce type est décrite pour les *repunits* en base 2). Le nombre composé de 77 fois 1 n'est pas premier (c'est assez facile à démontrer), mais ses deux facteurs sont difficiles à identifier : l'un est un nombre premier de 30 chiffres, l'autre un nombre premier de 41 chiffres. On sait aujourd'hui factoriser tous les *repunits* jusqu'à 157 chiffres.

Les *repunits* ont la particularité évidente d'être identiques à eux-mêmes quand on inverse l'ordre de leurs chiffres. Dit autrement, ce sont des palindromes numériques. Bien sûr, il y a d'autres nombres palindromes, par exemple 12321 ou 843348.

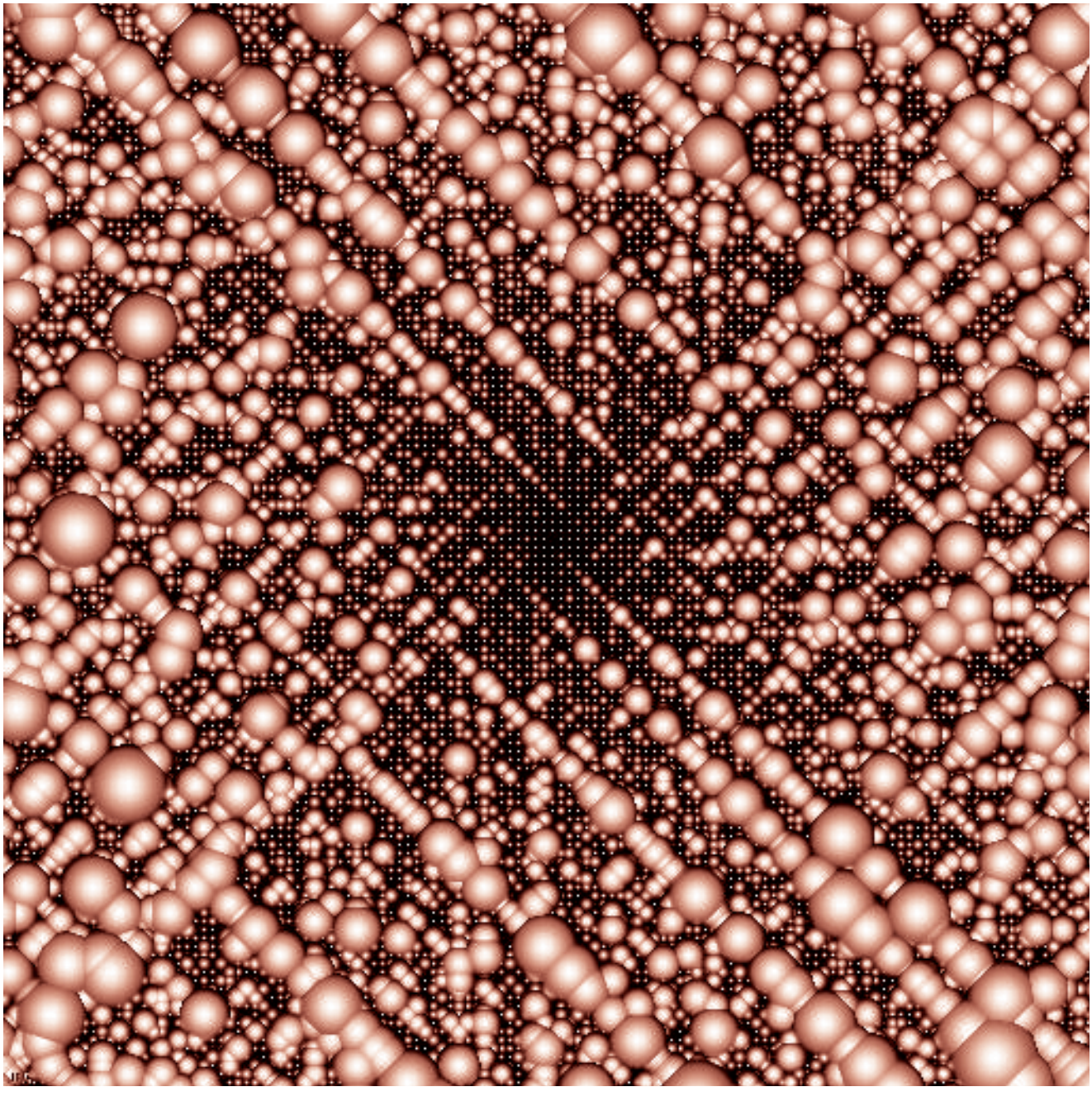
D'où la question naturelle et pressante pour tout amoureux des nombres : quels sont les nombres premiers palindromes ?

LES NOMBRES PREMIERS PALINDROMES

Il est évident que 11 est le seul nombre premier palindrome à deux chiffres (un tel nombre est de la forme XX, et donc multiple de 11). Exception faite de 11, il n'existe aucun nombre premier palindrome ayant un nombre pair de chiffres à cause du critère de divisibilité par 11 : tout nombre dont la différence de la somme de ses chiffres de rang impair et de ses chiffres de rang pair est nulle, est divisible par 11. En revanche, il existe 15 nombres premiers palindromes possédant 3 chiffres : 101, 131, 151, 181,



2. Spirale de Ulam retraitée : les nombres entiers sont inscrits à la suite les uns des autres selon une spirale carrée représentée à droite. Sur la figure ci-dessous, les diamètres des sphères associées à chaque nombre sont proportionnels au nombre de diviseurs de ce nombre. Un nombre premier se réduit à un point.



Jean-François Colonna

3. NOMBRES PREMIERS PERSISTANTS

a. Premiers permutables

Un nombre premier est permutable si, quel que soit l'ordre de ses chiffres, on obtient un nombre premier. 337 est un nombre premier permutable, car 337, 733, 373 sont premiers.

Les seuls nombres premiers permutables connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, 11...1 (19 fois le "1"), 11...1 (23 fois le "1") 11...1 (317 fois le "1") 11...1 (1 031 fois le "1"). Il n'existe pas d'autres nombres premiers permutables ayant moins de 467 chiffres.

b. Premiers circulaires

Un nombre premier est circulaire si, lorsqu'on fait tourner ses chiffres, on obtient d'autres nombres premiers : par exemple, 187, 871 et 718 sont premiers.

Les seuls nombres premiers circulaires connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, 79, 113, 187, 199, 337, 1193, 3779, 11939, 19937, 193939, 199933, 11...1 (19 fois le "1"), 11...1 (23 fois le "1") 11...1 (317 fois le "1") 11...1 (1 031 fois le "1")

c. Premiers raccourcissables à droite

7
73
739
7393
73939
739391
7393913
73939133

Les nombres premiers raccourcissables à droite restent premiers quand on en coupe la fin. Ainsi le nombre 73 939 133 est-il le plus long des nombres premiers connus raccourcissables à droite, ce qui, par définition,signifie qu'on a la pile de nombres premiers qui est représentée à gauche.

d. Premiers raccourcissables à gauche

3576863126462165676291 37
576863126462165676291 37
76863126462165676291 37
6863126462165676291 37
863126462165676291 37
63126462165676291 37
3126462165676291 37
126462165676291 37
26462165676291 37
6462165676291 37
462165676291 37
62165676291 37
2165676291 37
165676291 37
65676291 37
5676291 37
676291 37
76291 37
6291 37
291 37
91 37
37
7

Les nombres premiers raccourcissables à gauche sont ceux n'utilisant pas le 0 et qui restent premiers quand on en coupe le début. Ainsi, 4632647 est un nombre raccourcissable à gauche, car c'est un nombre premier, de même que 632647, 32647, 2647, 647, 47 et 7.

Les trois nombres premiers raccourcissables à gauche les plus longs connus sont dus à Chris Caldwell ; ce sont :

959189189997653319693967,
9668631264621656762913 7 et
3576863126462165676291 37.

Ce dernier nombre donne la pile de nombres premiers représentée à gauche.

191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929. Vous remarquerez qu'aucun n'appartient aux centaines 2, 4, 5, 6 et 8 (en réfléchissant deux secondes, vous comprendrez pourquoi).

Il existe 93 nombres premiers palindromes à 5 chiffres, et 668 à 7 chiffres. Parmi ces derniers, le quadruplet suivant est remarquable : 1878781 – 1879781 – 1880881 – 1881881, car il est composé de quatre nombres premiers palindromes pris dans quatre groupes consécutifs de mille (c'est l'unique cas de ce type). La totalité des nombres premiers palindromes de 11, 13 et 15 chiffres a été calculée par Martin Eibl en utilisant le langage UBASIC. Le 9 juin 1998, le décompte de ceux à 17 chiffres a été obtenu par Carlos Rivera. C. Rivera est un amateur passionné de nombres premiers ; bien que travaillant dans l'industrie des céramiques à Monterrey, au Mexique, il a mis en place le site http://www.sci.net.mx/~crivera/home.html, où il présente toutes sortes de propriétés et d'énigmes récréatives concernant les nombres premiers palindromes.

Certaines identités amusantes ont été notées par Rivera. Des identités entre des nombres premiers palindromes à 3 chiffres : 101 + 131 + 151 = 383 ; entre des nombres premiers palindromes à 5 chiffres : 30103 + 30203 + 30403 = 90709 ; entre des nombres premiers palindromes à 43 chiffres :
10000000000000021099525990120000000000000001 +
0 0 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 +
10000000000000021100252001120000000000000001 =
30000000000000063297777792360000000000000003

Cette égalité est la plus petite possible de sa catégorie (une somme de trois nombres premiers palindromes de 43 chiffres donnant un nombre premier palindrome de 43 chiffres).

Ce n'est cependant encore qu'une égalité simple à côté de celle-ci, pour laquelle on a utilisé la notation $(0)_n$ pour désigner une suite de n zéros consécutifs. Il s'agit cette fois d'une égalité entre nombres premiers palindromes de 191 chiffres (noter que 191 est aussi un nombre premier palindrome) :
$1(0)_{87}132298010892231(0)_{87}1+1(0)_{87}132300858003231(0)_{87}1+$
$1(0)_{87}132301111103231(0)_{87}1=3(0)_{87}396899979998693(0)_{87}3$

Toujours plus fort (ou plus absurde, selon les goûts), Rivera a découvert que le nombre premier palindrome 71317 peut s'écrire de trois façons différentes comme somme de nombres premiers consécutifs :
71317 = 2351 + 2357 +...+ 2579 + 2591 (29 nombres premiers)
71317 = 10163 + 10169 + 10177 + 10181 + 10193 + 10211 + 10223 (7 nombres premiers)
71317=14243+14249+14251+14281+14293 (5 nombres premiers)

Parmi les identités farfelues, celles-ci, découvertes à propos du nombre premier palindrome 134757431, semblent miraculeuses. Ce nombre s'écrit de 3 façons différentes comme somme de puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 :
$134757431 = 1^7 + 2^3 + 3^8 + 4^5 + 5^4 + 6^2 + 7^1 + 8^9 + 9^6$
$134757431 = 1^7 + 2^5 + 3^8 + 4^1 + 5^2 + 6^4 + 7^3 + 8^9 + 9^6$
$134757431 = 1^7 + 2^8 + 3^4 + 4^2 + 5^3 + 6^5 + 7^1 + 8^9 + 9^6$

Ce nombre est le seul possédant cette propriété. Il existe – paraît-il – un autre nombre premier palindrome qu'on peut exprimer de deux façons différentes comme somme de puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un lecteur saura-t-il le trouver ?

SUPERSTITION

Laissons-nous glisser un peu plus vers la conception pythagoricienne des nombres qui, on le sait, comportait un élément de superstition. Ne croyez-vous pas que le fait suivant, remarqué en 1998 ($1998 = 3 \times 666$) par G.L. Honaker, doit posséder une interprétation philosophique ou religieuse importante ? La somme des 666 plus petits nombres premiers palindromes est le nombre 2391951273, qui vérifie l'égalité remarquable :
$2^3 + 3^3 + 9^3 + 1^3 + 9^3 + 5^3 + 1^3 + 2^3 + 7^3 + 3^3 = 666 + 666 + 666$.

Ceux qui s'intéressent au nombre 666 considéré comme maléfique seront heureux d'apprendre que les nombres de la forme 10...06660...01 (appelés nombres premiers palindromes) ont été soigneusement étudiés. Le plus petit est 16661. Le suivant est : 1000000000000006660000000000000001 = $1(0)_{13}666(0)_{13}1$ (le 13 ne devrait-il pas nous intriguer?).

Harvey Dubner, considérant que la connaissance de cette espèce particulière méritait quelques minutes de calcul, a lancé sa machine à la recherche des nombres premiers palindromes maléfiques. Il a établi que les 7 plus petits nombres de cette espèce diabolique sont ceux ayant un nombre de zéros entre le premier "1" et le premier "6" égal à 0, 13, 42, 506, 608, 2472, et 2623. Pourquoi ces nombres-là au-delà du 13? Laissons aux lecteurs le soin de proposer leurs interprétations.

Plus sérieusement – si j'ose dire –, le nombre premier palindrome le plus long connu est dû au même Harvey Dubner. C'est : $1(0)_{8176}3644463(0)_{8176}1$, qui possède 16361 (qui est palindrome) chiffres.

Cependant, comme de nouveaux records sont régulièrement obtenus, il se peut qu'au moment où paraîtra ce texte le champion ait changé. Sur le site Internet de Patrick de Geest, vous trouverez les mises à jour de ces records et bien d'autres informations divertissantes concernant les nombres premiers palindromes : http:wwwping.be/~ping6758/palpri.shtm

1379 EST TRÈS PRIMÉVAL!

Mike Keith a étudié récemment la notion de nombre priméval. Vous avez sans doute remarqué que certains mots en contiennent d'autres : le mot rameau contient les mots rame, rama, eau, mare, mure, mura, mue, rue, mer, mur, mu, me, ma, au, a. Mike Keith propose de transposer cette richesse aux nombres premiers, qui, contrairement aux mots, sont universels et ne changent pas d'un pays à l'autre. Il s'est donc attaché aux nombres qui contiennent des nombres premiers.

Le nombre 1379 contient, par exemple, les 31 nombres premiers : 3, 7, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 137 139, 173, 179, 193, 197, 317, 379, 397, 719, 739, 937, 971, 1973, 3719, 3917, 7193, 9137, 9173, 9371.

Passionné par cette propriété, Mike Keith définit le caractère priméval d'un nombre. Le nombre 1379 est très priméval, le nombre 4684 ne l'est pas du tout (il ne contient aucun nombre premier).

Un nombre *n* contenant *k* nombres premiers est un record priméval si aucun nombre plus petit que *n* n'est autant priméval que *n* (ne contient *k* nombres premiers). En utilisant son ordinateur, Keith a compté pour tous les nombres, jusqu'à 100 000, combien chacun contenait de nombres premiers. Le nombre 2 est un record priméval. En revanche, 3 ne l'est pas, car il ne contient qu'un seul nombre premier, or 2, plus petit que 3, contient lui aussi un nombre premier. De même, aucun des nombres 5 et 7 n'est un record priméval. Le nombre 11 n'est pas un record priméval car lui aussi ne contient qu'un seul nombre premier : lui-même. Le nombre 13 est un record priméval, car il contient les nombres premiers : 3, 13, 31.

Viennent ensuite 37 qui contient 4 nombres premiers, 107 (5), 113 (7), 137 (11), 1013 (14), 1037 (19), 1079 (21), 1237 (26), 1367 (29), 1379 (31), 10079 (33), 10123 (35), 10136 (41), 10139 (53), 10237 (55), 10279 (60), 10367 (64), 10379 (89), 12379 (96), 13679 (106).

Pour chaque entier *k,* on peut se demander quel est le plus petit *n* contenant exactement *k* nombres premiers. Voici les 30 premières valeurs trouvées : 2 (plus petit nombre contenant 1 nombre premier) ; 25 (plus petit nombre contenant 2 nombres premiers) ; 13 (3) ; 37 (4) ; 107 (5) ; 127 (6) ; 113 (7) ; 167 (8) ;1027 (9) ; 179 (10) ; 137 (11) ; 1036 (12) ; 1127 (13) ; 1013 (14) ; 1237 (15) ; 1135 (16) ; 1136 (17) ; 1123 (18) ; 1037 (19) ; 1139 (20) ;

4. CARRÉS MAGIQUES DE NOMBRES PREMIERS

(a) Pour 100 $ de plus

En 1987, Martin Gardner offrit 100 $ à quiconque découvrirait le premier un carré magique d'ordre 3 constitué de nombres premiers consécutifs. Le pari fut gagné l'année suivante par Harry Nelson qui, utilisant un ordinateur Cray, découvrit 22 solutions dont la plus petite est :

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

(b) Méthode générale

D'autres carrés magiques de ce type ont été découverts récemment, qui satisfont à une condition supplémentaire : les nombres premiers utilisés sont en progression arithmétique.

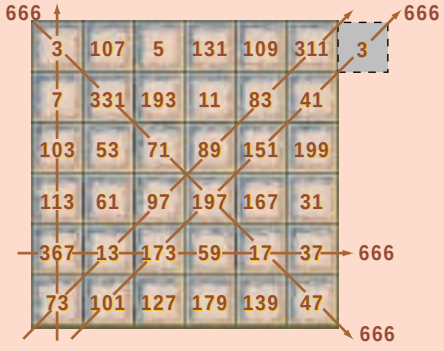
Partant du carré magique classique composé des nombres entre 0 et 8, on construit un carré magique de taille 3 x 3 avec 9 nombres en progression arithmétique P, P + R, P + 2R,..., P + 8R

1	8	3	P+R	P+8R	P+3R
6	4	2 →	P+6R	P+4R	P+2R
5	0	7	P+5R	P	P+7R

La difficulté est de trouver des nombres premiers *consécutifs* en progression arithmétique (problème différent et plus difficile que celui consistant à trouver des nombres premiers en progression arithmétique). Ce problème a été l'objet récemment de progrès inattendus et depuis février 1998, à la suite d'un calcul de Manfred Toplic et Tony Forbes, on connaît une suite de 10 nombres premiers consécutifs en progression arithmétique. On peut donc construire des carrés magiques 3 x 3 composés de nombres premiers consécutifs. La raison de la suite trouvée est 210, et le nombre P est:
100996972469714247637786655587969840329509324689190041803603417758904341703348882159067229719.

(c) encore le nombre diabolique 666

Pour les superstitieux, nous avons représenté ci-dessous un carré magique de nombres premiers dont la somme de chaque ligne et chaque colonne est 666 (découvert par Alan William Johnson). Ce carré est pandiagonal, car les diagonales coupées donnent elles aussi le total de 666. Exemple : 3+101+173+197+151+41=666.



1079 (21) ; 10124 (22) ;10126 (23) ; 1349 (24) ; 1279 (25) ; 11237 (26) ; 3479 (27) ; 10699 (28) ; 1367 (29) ; 10179 (30).

On remarquera le fait surprenant que les deux nombres consécutifs, 1135 et 1136 se trouvent dans cette liste (ainsi d'ailleurs que 1139 tout proche).

Mike Keith s'est aussi demandé quel était le plus petit nombre premier contenant tous les nombres premiers de *k* chiffres (qu'il appelle nombres premiers *k*-primévaux).

– 2357 est le plus petit nombre premier 1-primeval : il contient tous les nombres premiers d'un chiffre.

– 1123465789 est le plus petit nombre 2-primeval : il contient tous les nombres premiers de deux chiffres (11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), et c'est le plus petit ayant cette propriété ;

– 10112233445566788997 est le plus petit nombre 3-primeval ;

– 1001112223334445556667779988889 est le plus petit nombre primeval

Qui calculera le suivant ?

NOMBRES ÉCONOMES ET PRODIGUES

Entre l'amusement et les mathématiques sérieuses, le pas est vite franchi, comme le montre l'exemple des nombres économes, récemment introduit. Ces nombres se trouvent liés à la notion de complexité de Kolmogorov et à des conjectures puissantes de théorie des nombres formulées depuis longtemps.

Bernardo Recamàn Santos a proposé d'appeler équidigital un nombre dont la factorisation en nombres premiers demande le même nombre de chiffres que son écriture décimale. Exemples : $162 = 7.3^4$; $15 = 3.5$. Il appelle de même économe un nombre dont la factorisation demande moins ou autant de chiffres que l'écriture décimale. Exemples : $1024 = 2^{10}$; $492075 = 3^9.5^2$. Il dénomme alors, bien sûr, prodigues les nombres pour lesquels l'écriture en facteurs premiers est aussi coûteuse ou plus coûteuse que l'écriture décimale usuelle. Exemples : $34 = 2.17$; $140 = 2^2.5.7$. Ces définitions rappellent celles de nombre simple au sens de Kolmogorov, qu'on définit en considérant le moyen de codage le plus économique qui représente un nombre.

Les nombres 13, $14 = 2.7$, $15 = 3.5$, $16 = 2^4$, 17 constituent une suite de 5 nombres entiers consécutifs économes. Les définitions dépendent de la base de numération, mais les résultats que nous présentons, ici en base 10, par souci de simplification, s'étendent aux autres bases de numération.

Constatant la présence régulière de nombres prodigues, R. Pinch s'est demandé s'il était possible qu'existent de longues séquences d'entiers successifs qui soient tous économes. On trouve une suite de 7 nombres économes consécutifs entre 157 et 163, parmi les petits entiers, mais rien de plus.

Dans un article de février 1998, R. Pinch, du *Queens' College,* à Cambridge, a réussi à lier ce problème à une célèbre conjecture mathématique concernant les nombres premiers : la conjecture de J. Dickson. Cette conjecture (énoncée en 1904) est un peu compliquée, mais sa puissance mérite qu'on la considère avec sérieux. La conjecture de Dickson (non démontrée aujourd'hui) stipule que :

Pour toute suite a_i et b_i ($i = 1,...,k$) d'entiers, il existe une infinité de valeurs de n telles que tous les nombres $(a_1n + b_1), (a_2n + b_2), ...,(a_kn + b_k)$ soient simultanément des nombres premiers, sauf s'il existe un entier d qui, pour tout n, divise le produit $(a_1n + b_1)(a_2n + b_2)...(a_kn + b_k)$. Pour k égal à 1, la conjecture indique que, si les nombres $a_1n + b_1$ ne sont pas tous multiples d'un même nombre d quand n varie, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a_1n + b_1$. Cet énoncé implique immédiatement le théorème de Dirichlet (lui est démontré) : si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a_1n + b_1$.

La conjecture de Dickson est un énoncé puissant qui, si on le démontrait, donnerait la solution d'une multitude de problèmes concernant les nombres premiers, en particulier la solution du problème des nombres premiers jumeaux : démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers séparés de 2 (comme 17 et 19) ; du problème des nombres de Mersenne composés : démontrer qu'il existe une infinité de nombres composés de la forme $2^n - 1$, avec n premier.

Pinch a établi, à partir de la conjecture de Dickson, qu'il existe des suites de nombres consécutifs économes aussi longues qu'on veut. De même, il existe des suites de nombres consécutifs prodigues aussi longues qu'on veut. Bien que reposant sur une conjecture non démontrée (et ne constituant donc pas une preuve complète), son travail correctement exploité l'a conduit à découvrir numériquement une suite de neuf nombres consécutifs économes allant de 1034429177995381247 à 1034429177995381255. et qui sont indiqués sur le site web de *Pour la Science*.

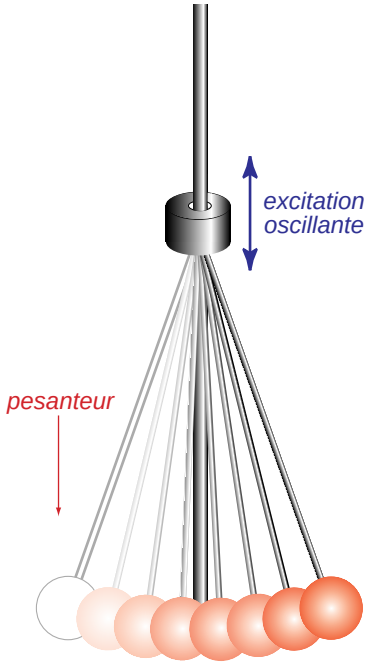
Il n'est pas certain que ces neuf nombres économes consécutifs soient les plus petits possibles. Un lecteur aura-t-il le courage de se lancer dans la recherche de la plus petite solution ?

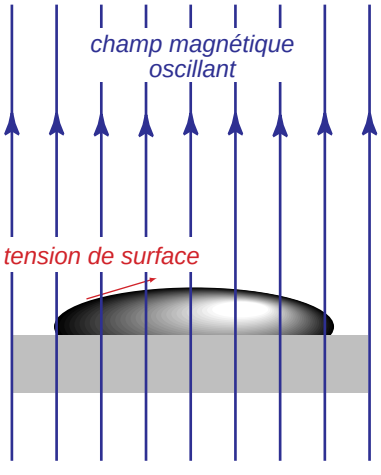
Jean-Paul Delahaye est professeur à l'Université de Lille.
Lien : delahaye@lifl.

Les gouttes et le chaos

S. DAUGAN • Y. FAUTRELLE • J. ETAY

Des gouttes de mercure oscillent dans un champ magnétique.





Les photographies de la page de droite représente des gouttes de mercure placées sur un support horizontal dont on a traité la surface pour minimiser les frottements. Les gouttes sont soumises à un champ magnétique vertical et alternatif, de fréquence inférieure à dix hertz. Elles oscillent : ce mouvement est ce que l'on nomme une «instabilité paramétrique».

On observe une telle instabilité quand un pendule oscille sans frottement, autour d'un point de suspension soumis à un mouvement alternatif vertical et de petite amplitude. Quand le point de suspension monte, la masse du pendule est accélérée vers le haut : cette accélération s'ajoute à celle de la pesanteur ; l'accélération totale diminue quand le point de suspension descend. Le mouvement du pendule dépend de la différence entre la fréquence propre (celle de l'oscillation sans mouvement du point de suspension) et la fréquence de l'oscillation du point de suspension.

Quand la fréquence du mouvement du point de suspension est égale à la fréquence propre, le phénomène de résonance se manifeste ; les oscillations sont renforcées, et le pendule oscille alors à une fréquence moitié de la fréquence propre.

Quand la fréquence du mouvement du point de suspension est voisine de la fréquence propre du pendule, le comportement observé dépend de l'amplitude de l'oscillation du point de suspension. Lorsque cette amplitude est petite, le comportement du pendule est «quasi périodique» : la fréquence de son mouvement est une superposition de sa fréquence propre et d'autres fréquences, invisibles à l'œil nu, qui s'ajoutent à la fréquence propre. Pour une grande amplitude, la trajectoire du pendule devient imprévisible : le mouvement de la masse du pendule est chaotique.

Revenons aux gouttes de mercure dans un champ magnétique variables. Le métal, conducteur de l'électricité, est le siège de courants électriques induits, nommés courants de Foucault. Ces courants interagissent avec le champ magnétique : des forces dites de Lorentz apparaissent.

Ces forces sont responsables de déformations de la surface du mercure. Dans l'industrie, où les forces de Lorentz peuvent servir à déformer la surface des bains de métaux en fusion, la connaissance de ces déformations est importante.

En quoi la description du pendule se retrouve-t-elle ici? La surface du métal est soumise à la tension de surface, qui agit de façon similaire à la force de gravitation sur le pendule pour ramener sa masse à l'équilibre, vers la position la plus basse. Les forces de Lorentz sont l'équivalent du mouvement d'oscillation du point de suspension.

Et c'est ainsi que l'on obtient les images présentées ici, en changeant la fréquence et l'intensité du champ magnétique vertical qui est appliqué aux gouttes. Les gouttes se déforment, et par brisure de symétrie, on voit apparaître des modes de vibrations de divers ordres, comme on en observe dans le mouvement du pendule.

Quand l'intensité est excessive, le chaos apparaît *(image en haut à gauche)*.

Yves FAUTRELLE est professeur à l'INP de Grenoble. Jacqueline ETAY est chargée de recherche au CNRS, dans le Laboratoire EPM-MADYLAM. Sandrine DAUGAN a travaillé dans ce laboratoire.