

LA SOLUTION

L. Fejes-Toth a démontré, en 1940, que l'empilement hexagonal de disques était le plus compact possible : le problème plan était résolu. En 1953, ce mathématicien réduisit le problème de Kepler infini à un nombre fini, mais encore trop grand, de possibilités. Il imagina déjà que le problème pouvait être résolu par ordinateur. T. Hales a ramené le problème à l'analyse de 5 000 types d'empilements. L'ordinateur devint alors l'outil incontournable, quoique l'informatique joue, dans ce cas, un rôle moins fondamental que dans la fameuse démonstration du théorème des quatre couleurs. Ici, seule la comptabilisation et un certain nombre de calculs accessoires ont été délégués à la machine.

Dans l'empilement de Kepler, les tétraèdres réguliers sont toujours contigus, par une face, à des octaèdres réguliers (des solides platoniciens à huit côtés égaux) ; à chaque sommet se touchent huit tétraèdres et six octaèdres. L'arrangement de sphères correspondant est constitué de quatre sphères disposées en un carré, une sphère étant posée dans l'espace central par-dessus et une autre par dessous. À l'intérieur d'un octaèdre, il reste plus d'espace libre que dans le tétraèdre : la densité n'y est plus que de 0,720903...

Toujours est-il que l'on peut paver un volume avec des tétraèdres et des octaèdres sans espace vide, mais deux solides de même type ne se touchent jamais par une face. C'est le pavage qui correspond à l'empilement de Kepler.

T. Hales a réalisé le bilan du volume occupé par les sphères à l'aide d'une double «comptabilité». L'analyse des 5 000

cas individuels vise à montrer qu'aucun arrangement de sphères ne peut faire mieux qu'en accolant huit tétraèdres à un octaèdre, comme dans l'empilement de Kepler.

Pour établir un premier bilan comptable, il faut relier les centres des sphères voisines par des arêtes et étudier les polyèdres que forment ces arêtes. On est ainsi amené à considérer comme voisines des sphères qui sont proches, mais qui ne se touchent pas. Toutefois, le pavage de l'espace par des polyèdres n'est plus unique et naturel, comme il l'était dans le cas de Kepler ; rien n'empêche, en effet, de diviser un octaèdre par plusieurs plans perpendiculaires en quatre tétraèdres (non réguliers), sans introduire de nouveaux sommets. C'est là que cette méthode de comptabilité atteint ses limites.

Dans la seconde manière d'établir le bilan, les polyèdres enveloppent les sphères. À chaque sphère est associée une sorte d'antichambre (le nom officiel est «cellule de Voronoï»), ensemble de tous les points qui sont plus proches du centre de la sphère considérée que du centre de toute autre sphère. L'antichambre d'une sphère dans l'empilement de Kepler est un rhombododécaèdre (*figure 4a*). On peut paver l'espace avec ces rhombododécaèdres sans laisser de vide.

Plus l'antichambre est petite, meilleure est la densité d'empilement. Quelle est la plus petite antichambre possible ? Une sphère peut avoir au maximum 12 sphères voisines qui la touchent, comme on le sait depuis le siècle dernier. Comme d'habitude, le volume minimal de l'antichambre est atteint pour l'arrangement présentant la symétrie maximale : les 12 sphères contiguës sont placées aux sommets d'un icosaèdre régulier. L'antichambre est alors un dodécaèdre et la densité d'empilement est égale à 0,754737... ; malheureusement on ne peut pas empiler des dodécaèdres sans laisser d'espaces vides.

En combinant habilement ces deux méthodes de comptabilisation (constructions de polyèdres liant les centres des sphères et examen de cellules de Voronoï), T. Hales réussit à régler le sort des 5 000 empilements. Un seul cas était notablement plus difficile que tous les autres. L'élève de T. Hales, Samuel Ferguson, a écrit une thèse sur ce sujet ; dans ce cas, les sphères sont placées aux sommets d'un prisme ayant pour base un pentagone régulier et des parois carrées, que l'on peut coiffer en haut et en bas d'un couvercle plat de cinq triangles équilatéraux.

Finalement, toutes ces réflexions et bien d'autres encore mènent à des problèmes de minimisation. Les



Scott Tyrell

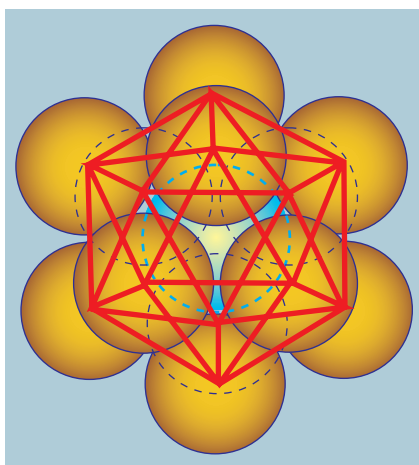
6. De nombreux mathématiciens ont établi des limites supérieures de la densité de compactage : 0,828 (Rankin, 1947), 0,7797 (Rogers, 1958), 0,77844 (Lindsey, 1987), 0,77836 (Muder, 1988), 0,7731 (Muder, 1993), jusqu'à ce que Thomas Hales (*ci-dessus*) démontre que la limite était celle déterminée par Kepler : 0,74048...

12 sphères tangentes à la sphère centrale ne sont pas tangentes entre elles, mais mobiles ; en fonction de leur position, le volume de l'antichambre varie. Il existe toujours un continuum d'arrangements possibles, que l'on n'arrive à maîtriser que si l'on trouve, parmi tous les arrangements d'une catégorie, le plus favorable et que l'on vérifie ensuite que même celui-là n'est pas meilleur que l'arrangement de Kepler. Il faut donc minimiser, dans de nombreux cas individuels, une fonction non linéaire de plusieurs variables.

Kepler a laissé son nom au problème, mais il ne l'a pas inventé : en 1600, le mathématicien anglais Thomas Harriot formula la question de l'empilement compact de sphères. Tenant de l'atomisme, il considérait les atomes comme des sphères et pensait avoir déterminé la densité maximale d'un solide.

Les considérations sur le problème de l'empilement des sphères ont des applications en codage : si, dans un espace à n -dimensions, le centre de chaque sphère représente un nombre binaire, il faut s'assurer que les autres nombres sont également distants deux à deux pour qu'une erreur ait le moins de chances possibles de transformer un nombre en un autre. Donc le problème est moins futile qu'il ne le paraît aux bécotiers, et, comme toujours, les mathématiques triomphent.

Christoph PÖPPE est rédacteur à la revue *Spektrum der Wissenschaft*, édition en langue allemande de *Scientific American*.



5. On ne peut placer au maximum que 12 sphères égales en contact avec une sphère de même taille. Ces sphères ne sont pas jointives. La densité «de la cellule de Voronoï» est maximale pour cette configuration où les centres des sphères sont au sommet d'un icosaèdre.



Chœurs lumineux

IAN STEWART

Comment les lucioles synchronisent leurs émissions de lumière.

Peu après le coucher du soleil, en Asie du Sud-Est, la vie offre à ceux qui savent aller l'admirer l'un des plus remarquables spectacles : des nuées de lucioles clignotent en chœur. Dans les années 1930, le biologiste Hugh Smith décrit le phénomène : «Imaginez un arbre de près de 15 mètres de haut et dont, semble-t-il, chaque feuille porte une luciole. Toutes ces lucioles clignotent à l'unisson, environ trois fois par deux secondes. Entre chaque émission de lumière, l'arbre s'obscurcit complètement. Imaginez une dizaine de kilomètres de bord de rivière, avec une file ininterrompue d'arbres qui portent tous des lucioles ; tous les arbres s'éclairent ensemble, et tous s'éteignent ensemble !»

Pourquoi les émissions sont-elles synchrones ? Une théorie propose que l'évolution a présidé à l'apparition de ce curieux

phénomène : seuls les mâles émettent de la lumière, afin d'attirer les femelles ; or, des flashes simultanés se voient de plus loin, surtout dans les zones où la végétation est dense.

Il existe une autre explication, mathématique. Les lucioles émettent de la lumière grâce à un composé qui réagit chimiquement. Elles ont une réserve de ce composé, qu'elles libèrent par bouffées, selon un cycle. Tout se passe comme si les lucioles comptaient régulièrement de 0 à 100, libérant le composé à 100, tandis qu'elles remettent alors le compteur à 0. L'état de la luciole est ainsi déterminé par la valeur du compteur interne. C'est la «phase» de leur cycle.

Un tel cycle est un oscillateur, c'est-à-dire un système dont la dynamique naturelle est périodique. Les oscillateurs sont nombreux, dans le monde vivant :

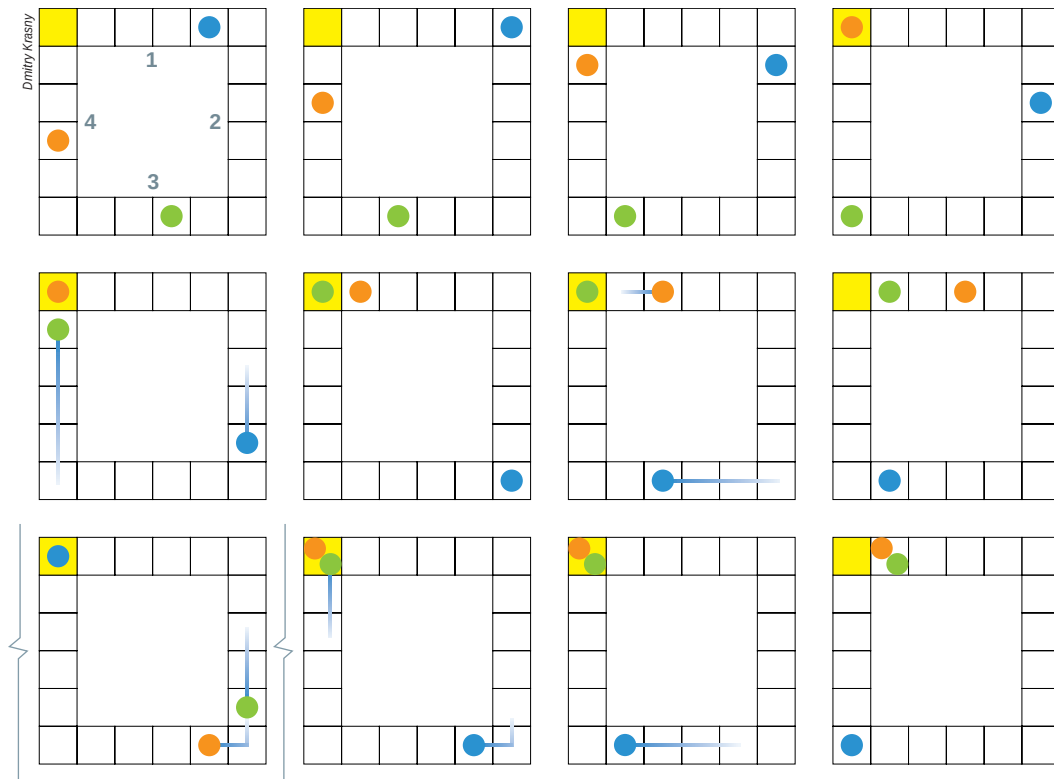
ils font battre le cœur ou gonfler les poumons.

Pourquoi des systèmes oscillent-ils ? Parce que c'est le comportement le plus simple après l'immobilité complète. Pensez au tigre captif qui parcourt cycliquement sa cage ou, en physique, aux vibrations d'une corde de violon. La corde ne peut rester immobile, quand elle est perturbée par l'archet ; elle ne peut faire n'importe quel mouvement, parce que ses extrémités sont fixes. De ce fait, elle vibre périodiquement.

Dans le cas des lucioles, les oscillations sont créées par un mécanisme d'accumulation et de décharge : ce mécanisme s'observe chaque fois qu'une quantité d'un composé augmente jusqu'à un seuil. Une fois le seuil atteint, le système «décharge» (pour les lucioles, c'est le flash), et la quantité de composé stocké s'annule, avant de recommencer à croître.

Comment expliquer le synchronisme des lucioles ? Les observations des entomologistes, dans la nature ou en laboratoire, ont montré que certaines lucioles qui perçoivent un flash d'un congénère sont excitées, et leur phase est alors avancée vers le seuil de décharge.

Leurs oscillateurs sont «couplés» : chacun d'eux modifie l'état des autres. Le mathématicien hollandais Christiaan Huygens étudia de tels oscillateurs alors qu'il mettait au point des pendules dont la période ne dépend pas de l'amplitude de l'oscillation : il vit que deux pendules accrochés à une même étagère se calaient progressivement. Ce phénomène de synchronisation est courant, mais l'élucidation du mécanisme de synchronisation est parfois difficile (attention : la synchronisation des oscillateurs n'a pas toujours lieu ; ainsi chaque membre



Le jeu de flash solitaire reproduit le comportement des lucioles. Cette série de positions se lit de gauche à droite et de haut en bas. Trois lucioles (points de couleur) se déplacent dans le sens des aiguilles d'une montre. Quand une luciole atteint la case flash (en jaune), elle émet un flash qui fait avancer les autres lucioles (lignes bleues) d'un nombre de cases égal au numéro de la rangée sur laquelle les lucioles se trouvent. Les étapes omises sont signalées par une ligne grise.

d'un animal est associé à un oscillateur, mais tous ces oscillateurs ne sont pas en phase).

Le physiologiste Charles Peskin fut un des pionniers des couplages d'oscillateurs. En 1975, il étudia la synchronisation des fibres musculaires du cœur et il proposa un modèle détaillé des systèmes à accumulation et décharge. Il proposa notamment une équation qui décrivait l'accumulation en fonction de la phase ; cette même équation décrit le comportement lumineux des lucioles. Dans le modèle de Ch. Peskin, le couplage n'est assuré que par les décharges : un oscillateur qui atteint son seuil de décharge envoie à ses voisins un signal qui avance leur phase vers le seuil de décharge. Quand cette stimulation fait dépasser le seuil d'un des oscillateurs, ce dernier émet à son tour un signal, et ainsi de suite.

Or les composés luminescents de certaines lucioles sont précisément modifiés par un mécanisme de ce type, la stimulation étant la lumière reçue d'autres lucioles. Quand une luciole perçoit le flash d'un congénère, elle est «excitée», et sa phase se rapproche de celle de la décharge. Ch. Peskin a montré que, pour deux oscillateurs à accumulation et décharge, avec des impulsions couplées, qui obéissent à son équation, la synchronisation survient généralement (si le déphasage initial est égal à des valeurs particulières, les flashes ne se synchronisent pas, et les émissions de lumière alternent plutôt ; cependant cet état est instable, et la moindre perturbation conduit à la synchronisation).

Ch. Peskin a également supposé qu'il en serait de même pour tout réseau d'oscillateurs couplés à accumulation et décharge. Dans un article de 1990, Renato Mirollo et Steven Strogatz ont démontré l'hypothèse de Ch. Peskin, mais pour une équation plus générale que la sienne. Sous réserve de quelques hypothèses techniques, R. Mirollo et S. Strogatz montrèrent que, pour un système composé d'un nombre quelconque d'oscillateurs couplés identiques, à accumulation et décharge, l'état final est le synchronisme (sauf pour quelques rares conditions initiales qui conduisent à un comportement périodique, et ces états sont instables).

Leur démonstration est fondée sur un phénomène nommé absorption, qui a lieu lorsque deux oscillateurs déphasés se synchronisent et restent synchronisés. Le couplage étant totalement symétrique (tous les oscillateurs agissent les uns sur les autres de la même façon), un groupe d'oscillateurs qui s'est accordé reste synchrone. Mathématiquement on démontre qu'une suite de telles absorptions doit finalement mettre en phase tous les oscillateurs.

Vous pouvez étudier des groupes de lucioles à l'aide d'un modèle simple, le «Jeu du flash solitaire», qui se joue avec des jetons que l'on déplace sur les bords d'un damier ou sur la plaque d'un jeu de Monopoly ; vous pouvez aussi construire un carré de six cases de côté (voir la figure 1). On n'utilise que le pourtour, où l'on marque un coin que l'on nomme «seuil», ou «coin flash». Les quatre côtés sont alors numérotés 1, 2, 3, 4 à partir de cette case, dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelques jetons placés aléatoirement représentent les lucioles. La position d'une luciole par rapport au coin flash, dans le sens des aiguilles d'une montre, indique sa phase. Les lucioles qui atteignent le seuil émettent un flash, puis reconstituent leurs réserves de composé luminescent selon quatre règles.

Règle 1 : on déplace chaque luciole d'une case dans le sens des aiguilles d'une montre. Bien qu'on doive déplacer les lucioles les unes après les autres, considérez que leur mouvement est simultané.

Règle 2 : quand une luciole tombe sur le coin flash, on déplace toutes les autres lucioles dans le sens des aiguilles d'une montre ; l'amplitude du déplacement est égale au numéro de la rangée sur laquelle se trouve initialement la luciole déplacée. Ainsi une luciole sur le côté 3 est déplacée de trois cases dans le sens des aiguilles d'une montre. Toutefois, quand ce déplacement conduit une luciole à dépasser le coin flash, la luciole s'arrête au coin flash (cette étape représente le couplage). Les autres lucioles perçoivent le flash qui les avance vers leur seuil.

Règle 3 : quand une luciole atteint le coin flash à la suite du pas 2, on répète ce pas ; on déplace une nouvelle fois tous les jetons.

Règle 4 : appliquer à nouveau les quatre règles.

Notons que l'arrivée de deux lucioles ou plus sur le coin flash correspond à une synchronisation ; on les déplace ensuite en bloc. Dans l'exemple de la figure 1, c'est ce que font deux des lucioles. Si vous poursuivez cet exemple, vous observerez que les trois lucioles finissent synchrones.

Je soupçonne que, pour certaines tailles de damier, on trouve des placements initiaux qui conduisent à des comportements périodiques asynchrones qui correspondent aux états instables de la théorie de Mirollo-Strogatz. Le Jeu du flash est un modèle à nombre fini d'états plus simple que celui qui a été analysé mathématiquement, et il pourrait ne pas se comporter exactement de la même façon. À vous de jouer : faites-moi part de vos découvertes.



Lutte territoriale

CATHERINE PERRIN • RENAUD BOISTEL

Dans le brouhaha de la forêt guyanaise, une oreille exercée distingue, près des cours d'eau, le coassement répété du petit crapaud diurne au ventre rose *Atelopus franciscus*, de deux centimètres de long. Perché sur une feuille, à quelques dizaines de centimètres du sol, le mâle qui répète ce signal espère attirer les femelles situées à proximité. Ce marquage sonore indique aussi aux autres mâles que le territoire environnant, sur cinq à dix mètres carrés, est occupé.

Cet interdit n'est pas toujours suffisant : un concurrent un peu plus téméraire que les autres pénètre parfois sur le territoire du mâle qui coasse sur une feuille. Le rythme du coassement s'accélère en réponse au coassement de l'intrus, mais ce dernier, peu impressionné, grimpe sur une plante voisine (1) afin de se placer vis-à-vis de son adversaire. Après un échange de cris, le nouvel arrivant saute sur la feuille du mâle résident, qui riposte immédiatement en poussant un cri et en sautant sur l'assaillant (2). Il s'accroche à lui et essaie de l'expulser de la feuille. Pendant près d'une demi-heure, ils s'affrontent au corps à corps (3 et 4). Enfin, les deux crapauds tombent au sol (5). Celui qui est en position supérieure (ici, le défenseur) pousse un dernier cri, et le vaincu s'allonge complètement sur le sol, les pattes relevées, en signe de soumission. Le vainqueur se redresse, et remonte sur la feuille. Le perdant n'a plus qu'à s'éloigner à la recherche d'un autre territoire, vacant ou moins vigoureusement défendu (6).

