

1995) reste défectueuse (voir la figure 1, qui vous permet de savoir si vous êtes concerné). Si cette imperfection est sans importance pour faire courir et sauter Lara Croft ou pour le bon fonctionnement d'un traitement de texte, il n'en est pas ainsi pour ceux qui utilisent un tableur ou un logiciel de statistiques.

L'argument avancé par Intel que l'erreur ne se produit qu'une fois tous les 27 000 ans pour un utilisateur moyen faisant 1 000 divisions par jour est contestable. D'une part, un utilisateur de tableur de logiciel scientifique ou de comptabilité fait beaucoup plus de 1 000 divisions par jour ; d'autre part, le taux d'erreurs du Pentium est dix millions de fois supérieur à la norme admise dans le monde des processeurs. Les ingénieurs d'Intel avaient commis une bourde dans la partie de la puce servant à faire les divisions, et cette erreur, gravée au plus profond de cinq millions de puces disséminées dans le monde entier, était vraiment ennuyeuse, quoi que prétende Intel.

Un analyste financier trouva des cas où le quatrième chiffre d'un résultat était faux. Un expert médical affirma que : «Toute erreur un tant soit peu significative dans une analyse de résultats est susceptible d'entraîner des conséquences sur la vie et la mort.» Pendant plusieurs mois, Intel fut l'objet de moqueries qui circulaient sur le réseau : «Combien de concepteurs du Pentium faut-il pour visser une ampoule ? Réponse : 1,999904274, mais c'est une bonne approximation pour un non technicien» ; «Pourquoi Intel a-t-il préféré le terme Pentium plutôt que 586, qui venait naturellement après le processeur 486 ? Parce qu'il a additionné 486 avec 100 en utilisant le Pentium et qu'il a trouvé 585,999990132», etc.

Les puces vendues aujourd'hui sont bien sûr exemptes du défaut qu'Intel a appris à repérer avant d'en vendre des millions : si votre machine est récente, vous n'avez rien à craindre.

L'ARITHMÉTIQUE JUSTIFIÉE ?

La découverte d'une telle erreur lors d'un calcul sur les nombres premiers a été saluée par de nombreux mathématiciens comme une preuve de leur propre utilité : il n'est pas absurde de mener de longs calculs arithmétiques qui poussent dans leurs retranchements les différents composants matériels et logiciels d'une machine, du processeur jusqu'au compilateur, et permettent de découvrir des erreurs qui, sinon, passeraient inaperçues.

Je ne pense pas que cela soit très sérieux. Il serait triste que les mathématiciens ne puissent justifier leur existence que par de tels exploits. On devrait affirmer que : «Les microprocesseurs sont

utiles, car ils servent à faire de bonnes mathématiques», plutôt que l'inverse : «Les mathématiques sont utiles, car elles servent à faire de bons microprocesseurs.»

C'est la tentative, quelque peu scandaleuse, d'Intel de cacher ce qu'il savait qui a été dévoilée, et elle ne l'a été que parce que T. Nicely n'a pas renoncé à identifier la cause d'erreur. C'est finalement l'existence du monde universitaire, avec sa liberté, son esprit de curiosité et son exigence de rigueur poussée parfois jusqu'à l'absurde qui fut à l'origine de la découverte du camouflage. Une entreprise industrielle ou commerciale aurait-elle accepté qu'un de ses employés découvrant un problème – plutôt bénin – dans un programme mène la recherche de l'erreur plusieurs mois de suite jusqu'à la rechercher dans le microprocesseur ?

LES ÉCARTS ENTRE NOMBRES PREMIERS

L'objectif «premier» de T. Nicely était l'identification des records d'écarts entre nombres premiers. On sait que deux nombres premiers consécutifs peuvent être très écartés l'un de l'autre. Beaucoup plus difficile est de savoir quand un écart donné se produit pour la première fois.

La première fois que l'écart 6 apparaît est après 23, car 24, 25, 26, 27 et 28 sont composés (pour mesurer un écart, on considère la différence entre les deux nombres premiers qui encadrent les nombres composés consécutifs, 23 et 29 dans notre exemple). La première fois qu'apparaît l'écart 110 est après 370261. Aujourd'hui, grâce au programme de T. Nicely, on sait que la première fois que l'écart 906 apparaît, c'est après 218209405436543, et 906 est le plus grand nombre pour lequel on connait cette information.

Dans son article à paraître, T. Nicely remercie Intel pour un don d'ordinateur et pour l'aide apportée par plusieurs ingénieurs d'Intel dans le perfectionnement de son programme. Sans rancune !

D. Shanks a conjecturé que la taille de la première apparition de l'écart E se produit au nombre premier $p(E) \approx \exp \sqrt{E}$. Cette conjecture a été affinée par Weintraub qui proposa après expérimentation : $p(E) \approx \exp(\sqrt{1,165746 E})$. Un argument heuristique proposé par Marek Wolf conduit à une conjecture plus fine encore : $p(E) \approx E^{1/2} \cdot \exp((\log^2(E) + 4E)^{1/2}/2)$

Les calculs de M. Wolf et de T. Nicely confirment cette loi. Il n'est pas étonnant ici que ce soit un physicien qui propose la conjecture la plus avancée, car, comme on ne sait quasi rien démontrer sur les écarts entre nombres premiers, l'arithmétique est sur ce point une science observationnelle proche de la physique, où l'on utilise des lois (bien sûr, non démon-

trées) pour en proposer d'autres (non démontrées) qu'éventuellement on pourra confirmer ou invalider par un calcul.

UN RÉSULTAT NOUVEAU ET TRÈS SIMPLE

Signalons une magnifique découverte récente concernant les écarts entre nombres premiers, due encore à M. Wolf, cette fois associé à A. Odlyzko et M. Rubinstein. Pour la tranche des nombres premiers qu'on explore systématiquement (aujourd'hui de 1 à environ 10^{15}), on constate que 6 est l'écart entre nombres premiers le plus fréquent. Doit-on alors penser qu'il en est toujours ainsi ?

Non, l'analyse heuristique et le calcul pour confirmation conduisent à penser qu'il y a changement du «champion» vers $1,7 \cdot 10^{36}$, l'écart gagnant 6 étant alors remplacé par 30. Plus loin vers $5,81 \cdot 10^{428}$, le champion devient 2 310, puis vers $1,48 \cdot 10^{9656}$ il devient 30 030. La règle semble être que les champions successifs sont les produits des nombres premiers : $6 = 2 \times 3$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; $2\ 310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$; $30\ 030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$; etc.

La conjecture affirmant que les choses sont réellement ainsi (c'est-à-dire qu'indéfiniment il y a changement des champions, qui sont successivement tous les produits de nombres premiers) est tellement éloignée de tout ce qu'on sait démontrer qu'on peut affirmer sans risque qu'avec l'étude de l'écart entre nombres premiers les mathématiciens ont de quoi s'occuper quelques siècles... si ce n'est un millénaire entier.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. Adresse internet : delahaye@lil.fr

C. CALDWELL, *The Prime Pages*. <http://www.utm.edu/research/primess/>

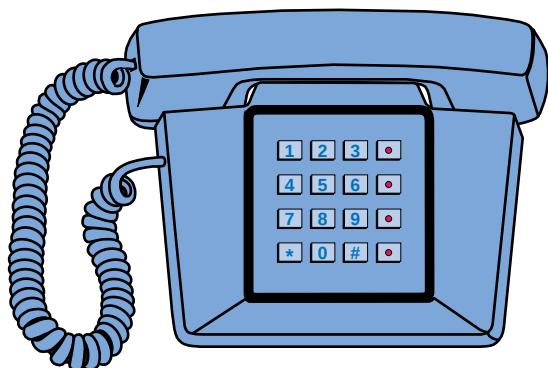
T. FORBES, *Prime k-tuplets*. <http://www.ltkz.demon.co.uk/ktuplets.htm>

J. M. MULLER, *Algorithmes de division pour microprocesseurs : illustration à l'aide du «Bug» du Pentium, Technique et science informatiques*, 14-8, pp. 1031-1049, 1985.

T. NICELY, *Pentium Division Flaw* : <http://www.lynchburg.edu/public/academic/math/nicely/pentbug/pentbug.htm>

T. NICEL, *Enumeration to $1e14$ of the Twin Primes and Brun Constant*, in *Virginia Journal Science*, 46-3, pp. 195-204, 1996. <http://www.lynchburg.edu/public/academic/math/nicely/twins/twins.htm>

T. NICELY, *New Maximal Prime Gaps and First Occurrences, Mathematics of Computation*, 1999 (article à paraître). <http://www.lynchburg.edu/public/academic/math/nicely/gaps/gaps.htm>



Tours, tortillements, topologie et téléphone

IAN STEWART

L'ADN s'entortille comme un cordon de téléphone.

Pourquoi le cordon du téléphone s'entortille-t-il sans cesse? Lors des premières utilisations, cette spire hélicoïdale qui relie le combiné à son berceau pend sans fantaisie, mais, les semaines passant, elle devient désagréablement entortillée. On observe le même comportement avec un élastique dont on tient les extrémités entre le pouce et l'index de chaque main ; quand on fait rouler l'élastique entre les doigts, il s'enroule, puis se surenroule. Le phénomène est général : les biologistes le retrouvent même quand ils étudient l'ADN.

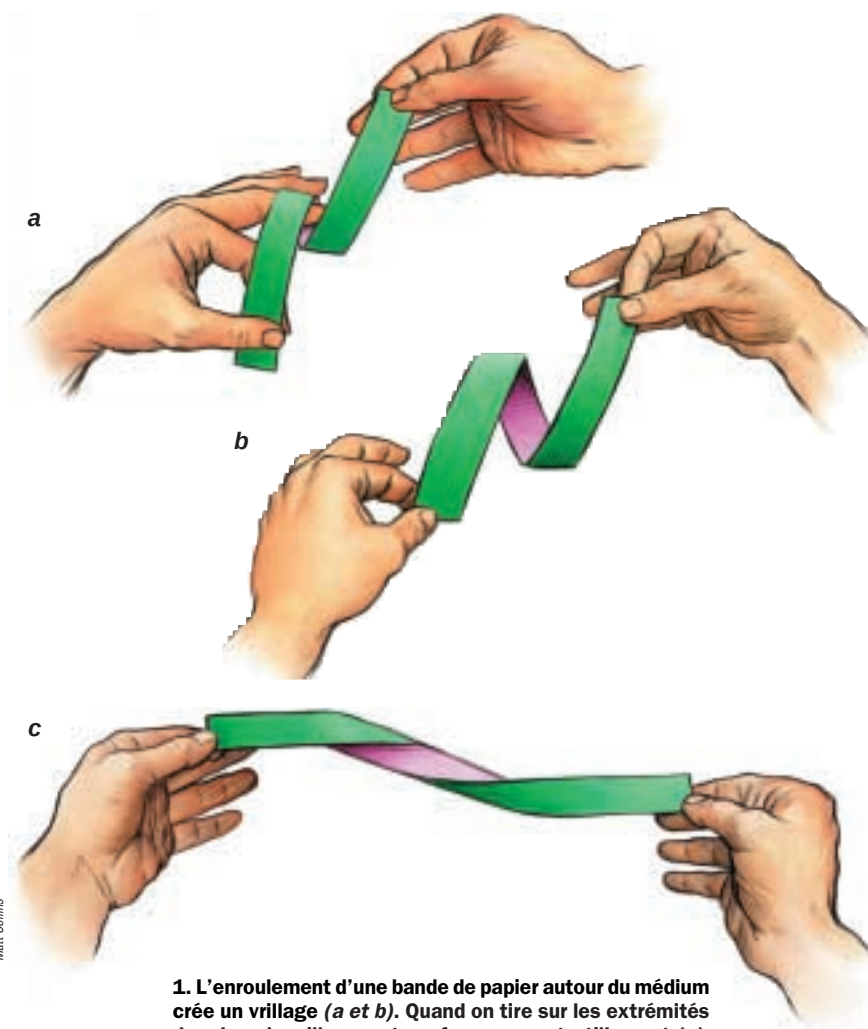
Pourquoi le surenroulement? Quand le téléphone sonne, je le prends de la main droite et le tourne de 90 degrés. Puis, pour parler, je passe souvent le combiné dans la main gauche, libérant la droite pour écrire ; au cours de ce transfert, le combiné tourne de 180 degrés. Enfin, la conversation terminée, je raccroche l'appareil de la main gauche, ajoutant encore un tortillement de 90 degrés. Ainsi, quand je téléphone, j'inflige généralement au cordon un tour complet sur lui-même, toujours dans le même sens.

Si je conservais le combiné dans la main droite, je déserroulerais le cordon en le reposant ; c'est le transfert dans la main gauche qui est responsable de l'effet observé. On retrouve d'ailleurs ce même effet quand on enroule un tuyau ou un long câble électrique en travers du torse, à la manière des alpinistes : progressivement le câble s'entortille. Quelque chose transforme les vrillages en tortillements, mais quoi?

La branche des mathématiques qui explore ces phénomènes est la topologie, la géométrie des objets déformables, celle des déformations continues. Les topologistes distinguent deux manières de faire une boucle dans un ruban plat : les tortillements et le vrillage. Pour saisir la différence, utilisons une bande de papier fort de 20 centimètres de long et de 2 centimètres de large. Colorions une face en vert, et une face en violet, afin de les distinguer ultérieurement.

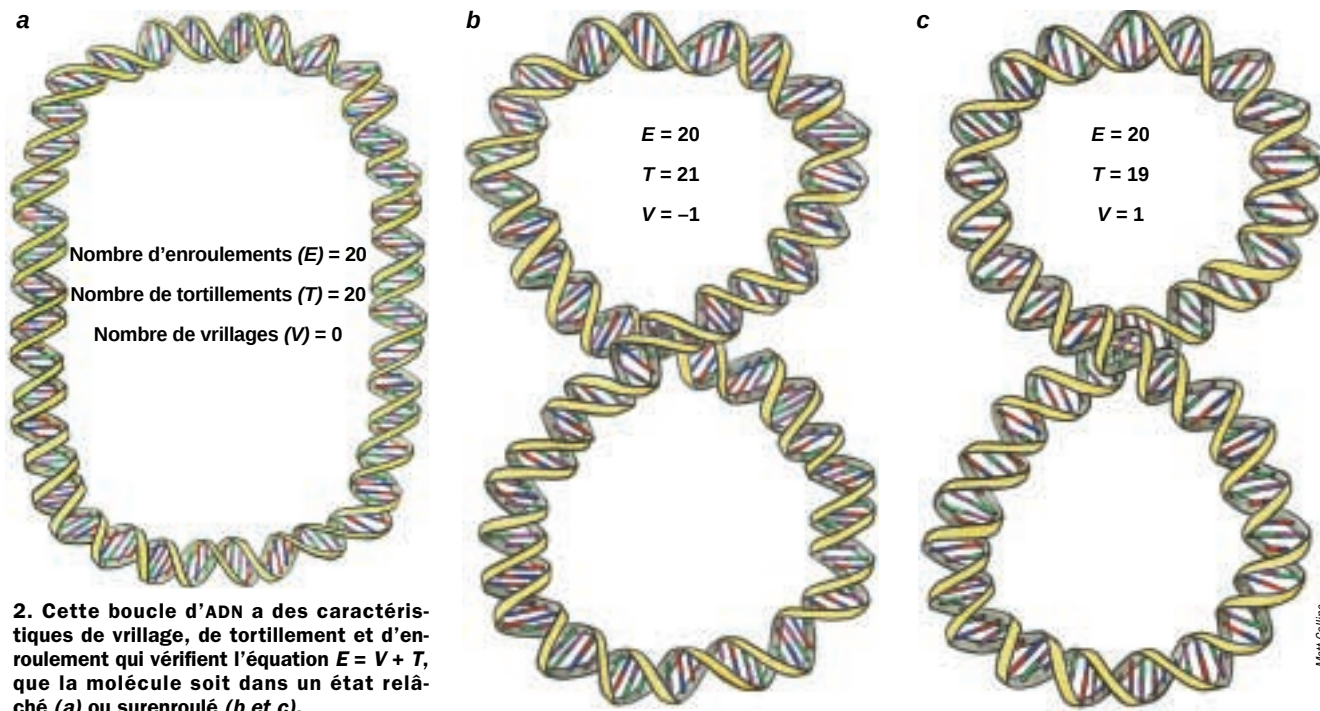
Prenons le ruban à plat entre le pouce et l'index de la main gauche ; puis, de la main droite, prenons l'extrémité libre et enroulons-la d'un tour autour du médium gauche (voir la figure 1). Retirons alors le médium pour libérer la boucle formée. Nous n'avons ainsi fait qu'un tour de ruban ; on dit que le nombre de vrillages est égal à un. Si l'on écarte lentement les mains, la bande se déforme et s'entortille. Si l'on marquait, sur la bande non vrillée, des flèches parallèles entre elles, et perpendiculaires à l'axe du ruban, on verrait que les flèches, restant perpendiculaires à l'axe du ruban, tournent autour de celui-ci d'un tour complet. Le tortillement, qui mesure la torsion du ruban, est égal à un. Autrement dit, le vrillage diminue et le tortillement augmente lorsque l'on étire le ruban vrillé. On aurait obtenu le même résultat si l'on avait tenu le ruban à plat devant soi, et si, maintenant l'extrémité gauche fixe, on avait tordu l'extrémité droite de 360 degrés. Autrement dit, le vrillage peut se transformer topologiquement en tortillement.

Vrillages et tortillements sont orientés : ils peuvent être «positifs» ou «négatifs».



1. L'enroulement d'une bande de papier autour du médium crée un vrillage (a et b). Quand on tire sur les extrémités du ruban, le vrillage se transforme en un tortillement (c).

Mart Collins



Un sens étant décrété positif, son image dans un miroir sera négative. Je propose de convenir que le vrillage représenté sur la figure 1 est positif, mais que le tortillement est négatif. De la sorte, on obtient l'équation simple : $V + T = 1$, où V est le nombre de vrillages, et T le nombre de tortillements si l'on considère que le ruban est refermé sur lui-même. En enroulant deux fois le ruban autour du médium, on lui donne deux tours positifs, ce qui engendre un tortillement égal à 1 quand on écarte les mains. Cette transformation se retrouve avec trois tours, quatre tours, etc.

On observe le même phénomène quand on tord une ficelle. Elle n'est pas plane, comme un ruban, mais il n'y a pas de raison qu'elle ne soit pas tordue ou torsadée ; là encore, le nombre de tortillements est relié au nombre de vrillages, c'est-à-dire au nombre de tours qui ont été initialement donnés. Si l'on maintient la ficelle tendue, elle ne peut présenter des tortillements, mais, si nous relâchons la ficelle, nous la verrons tourner tandis que le surenroulement disparaîtra. En effet, la ficelle est légèrement élastique : on peut la tordre, mais elle exerce alors un couple en sens inverse de celui qu'on applique. Quand on supprime le couple appliqué, le couple dû à l'élasticité du matériau provoque la rotation de la ficelle jusqu'à ce que ce couple s'annule.

En 1883, le mathématicien britannique Alfred Greenhill expliqua pourquoi un ruban est plutôt vrillé qu'entortillé : il démontra qu'une forme vrillée contient moins d'énergie élastique que la forme

entortillée correspondante : de même, une bande de papier se vrille plutôt, sauf si l'on apporte de l'énergie en tirant les deux extrémités dans des directions opposées. Greenhill démontra que, si un cylindre infiniment long est tordu par des forces à l'infini, il flambe en formant une hélice. Récemment, D. Stump et K. Gates, de l'Université du Queensland, et W. Fraser, de l'Université de Sydney, ont calculé l'élasticité d'un cylindre tordu en utilisant des hypothèses plus réalistes. Ils ont obtenu des formules qui donnent la forme exacte du surenroulement des câbles sous-marins.

Le cordon de téléphone est plus complexe, parce qu'il est initialement torsadé. Cependant il transforme également le tortillement en vrillages, comme un simple fil, du moins si son propre enroulement

hélicoïdal ne se défait pas (on observe d'étranges défauts du cordons, dans certains cas). Pour prévoir le comportement du cordon, il est utile d'imaginer qu'il contient une longue ficelle épaisse, à l'intérieur de l'hélice, enchâssant un long ruban plat : quand on tord le cordon, c'est comme si l'on tordait la ficelle et le ruban.

La molécule d'ADN, qui porte l'information génétique des êtres vivants, est une hélice, comme un cordon de téléphone. C'est même une double hélice : deux brins hélicoïdaux s'enroulent l'un autour de l'autre, à la façon d'une échelle qui aurait été vrillée. Les biologistes explorent le comportement de la molécule dans des conditions variées, et ils observent que la molécule subit des surenroulements, avec des transitions entre vrillage et tortillement. Comme nous l'avons vu, l'ADN et les cordons de téléphone ont des comportements que n'ont pas les ficelles : ils peuvent se désenrouler ou se surenrouler. Pour une boucle d'ADN, on décrit la structure par trois paramètres : le nombre d'enroulements E , c'est-à-dire le nombre de fois qu'un des brins croise l'autre, quand la molécule est couchée à plat sur un plan ; le nombre T de tortillements de l'ADN ; le nombre V de vrillages. Ces trois paramètres sont reliés par la formule : $E = V + T$, qui généralise la formule évoquée précédemment. Pour une boucle d'ADN, E est fixé, de sorte que la somme $V + T$ l'est aussi, mais nous pouvons changer des tortillements en tours, et inversement. La figure 2 montre ainsi des exemples avec une boucle d'ADN dont E est égal à 20.

