

voisins (voir la figure page 100). Dans le cas des métaux, l'énergie cinétique des électrons libres est transmise par collision entre électrons (les mêmes électrons qui interviennent dans la conduction électrique). Si les métaux sont de bons conducteurs de chaleur et d'électricité, c'est que les électrons peuvent se répartir dans toute la structure cristalline du métal. À l'inverse, les solides non métalliques, comme le bois et le verre, sont de mauvais conducteurs parce que les électrons restent localisés aux voisinage des atomes et ne transmettent pas leur énergie par collision. La conductivité thermique des liquides et des gaz est plus faible, surtout pour les gaz : l'énergie cinétique s'y transmet d'autant moins bien que le milieu est peu dense et les collisions rares.

Quand on met en contact deux corps de natures et de températures différentes (la main sur une surface métallique par exemple) la température d'équilibre de l'interface de contact se rapprochera de celle du meilleur conducteur thermique. Ainsi, du bois à température ambiante (20 °C) nous paraît plus chaud que du métal à la même température. En effet, la main est un meilleur conducteur de chaleur que le bois et donc, la température de leur interface, qui est aussi celle qui sera ressentie, sera proche de celle de la surface de la main, soit environ 25 °C. À l'inverse, un métal est un bien meilleur conducteur thermique que la main et la température de leur interface sera proche de celle du métal (20 °C) : la chaleur de la main est absorbée plus vite par le métal qu'elle ne peut la fournir.

CONDUCTION ET CONVECTION

Outre ces mouvements de transmission de la chaleur de proche en proche, des mouvements d'ensemble transportent aussi la chaleur. En hiver, lorsque le vent souffle, nous ressentons un froid plus vif, car le transfert thermique par conduction est remplacé par un transfert



par convection, plus efficace. La convection transporte l'énergie thermique par des mouvements macroscopiques de matière, forcés (ventilateurs) ou naturels (mouvements atmosphériques) : la couche limite protectrice est constamment renouvelée.

Par exemple, l'air chaud au voisinage d'un radiateur d'une pièce est moins dense. Sous l'effet de la poussée d'Archimède, il s'élève et est remplacé par de l'air plus froid qui se réchauffera à son tour. Ce mouvement naturel d'air ascendant tend à uniformiser la température de la pièce (voir le cartouche). Des mouvements de convection analogues jouent un rôle considérable dans les phénomènes atmosphériques.

Le vent est un exemple de mouvement de convection forcé qui renforce les échanges de chaleur entre l'intérieur et l'extérieur du corps. Quelle est, selon la vitesse du vent, la température ressentie par la peau nue, dont la température de surface est d'environ 25 °C ? On cherche à quelle température «équivalente» doit être l'air ambiant supposé immobile pour que le flux d'énergie entre la peau et l'air soit égal à l'énergie emportée par le vent à la température réelle. L'écart entre la température ressentie et la température réelle est d'autant plus grand que l'écart entre la température réelle et celle de la

peau est grand et que le vent est plus fort (que la convection est plus active). Par exemple, dans un vent à -10 °C soufflant à 30 kilomètres par heure, la température ressentie est de -18 °C (voir le tableau)

BIENFAISANTE ÉVAPORATION

Dans le calcul précédent, l'air est supposé sec. Dans le cas d'un air humide, l'énergie prélevée au corps pour évaporer l'eau renforce la sensation de froid. On comprend ainsi mieux le rôle de la sueur qui, nécessitant une importante quantité d'énergie pour s'évaporer, joue un rôle essentiel dans la régulation thermique humaine (la chaleur de vaporisation de l'eau est de 2,26 kilojoules par gramme). Un courant d'air

sur un visage en sueur donne une forte sensation de fraîcheur, car la convection forcée active l'évaporation (de même que le linge humide sèche plus rapidement quand il y a du vent). Pour mesurer cette activation, observons qu'un thermomètre dont l'extrémité est enveloppée d'un mouchoir en papier humide indique une température bien inférieure à celle du même thermomètre à l'air libre.

Finalement, notre confort thermique ne dépend pas de la température extérieure réelle, mais plutôt du flux thermique entre notre corps et l'air ambiant : la sensation de froid (chaud) est d'autant plus prononcée que le flux thermique sortant de (entrant dans) notre corps est important.

Lorsque vous vous brûlez la main, il est ainsi nécessaire d'évacuer la chaleur emmagasinée en passant la brûlure sous l'eau froide pendant plusieurs minutes. Pour évacuer la chaleur reçue par les grands brûlés, on a envisagé de plonger les victimes dans un bain d'eau à 15 °C circulant autour du corps. Les calculs montrent que, dans les cas les plus graves, la chaleur est évacuée qu'après plusieurs heures. En pratique, la difficulté est de maintenir la température corporelle proche de 37 °C afin d'éviter l'hypothermie.

TEMPÉRATURE AMBIANTE RÉELLE

	-15 °C	-10 °C	-5 °C	0 °C	5 °C	10 °C	15 °C	20 °C	25 °C	30 °C	35 °C	40 °C
5 KM/H	-18 °C	-10 °C	-7 °C	-2 °C	3 °C	9 °C	14 °C	19 °C	25 °C	31 °C	36 °C	41 °C
10 KM/H	-20 °C	-14 °C	-8 °C	-3 °C	2 °C	8 °C	13 °C	19 °C	25 °C	31 °C	37 °C	42 °C
30 KM/H	-24 °C	-18 °C	-12 °C	-6 °C	1 °C	7 °C	12 °C	18 °C	25 °C	32 °C	38 °C	43 °C
50 KM/H	-29 °C	-21 °C	-14 °C	-7 °C	0 °C	6 °C	12 °C	18 °C	25 °C	32 °C	38 °C	44 °C
70 KM/H	-35 °C	-24 °C	-15 °C	-8 °C	-1 °C	6 °C	12 °C	18 °C	25 °C	32 °C	38 °C	44 °C
90 KM/H	-41 °C	-30 °C	-19 °C	-9 °C	-2 °C	5 °C	12 °C	18 °C	25 °C	32 °C	38 °C	45 °C

VITESSE DU VENT

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au Service d'astrophysique du CEA.

S. OLIVIER et H. GIÉ, *Thermodynamique*, Lavoisier Tech & Doc, 1996.

H. WEINSTOCK, *Thermodynamics of cooling a live human body*, in *American Journal of Physics*, vol. 48, pp. 339, 1980.



Les sphéricônes

IAN STEWART

Un volume inédit amuse les mathématiciens.

Aujourd'hui, un cône, c'est plus souvent une crème glacée que la forme qui passionna les géomètres grecs dans l'Antiquité. Ils se délectaient de la subtile géométrie des sections coniques, à l'intersection d'un plan et d'un cône. Ils utilisaient ces ellipses, paraboles et hyperboles pour résoudre des problèmes inaccessibles «à la règle et au compas», dont les plus célèbres sont la trisection d'un angle et la construction d'un cube d'un volume double de celui d'un cube initial.

Ces deux problèmes se ramènent à la résolution d'une équation du troisième degré, c'est-à-dire que le plus grand exposant de l'inconnue est trois. Les sections coniques sont utiles dans la résolution de tels problèmes, car l'équation de l'intersection de deux d'entre elles est une

équation du troisième ou du quatrième degré, alors que les constructions avec une règle et un compas ne donnent accès qu'à des solutions d'équations du deuxième degré.

Le cône seul a moins intéressé les mathématiciens que ses intersections avec un plan, peut-être parce qu'il est très simple. Qu'espérer en dire de neuf? En mai 1999, un lecteur anglais de ces colonnes, C. Roberts, a démontré qu'un peu d'opiniâtreté n'est jamais déplacée : il s'est intéressé à une étrange forme proche du cône, qu'il a nommée sphéricône.

Le sphéricône s'obtient à partir de deux cônes dont l'angle au sommet est de 90 degrés. On les accole par leur base, puis on coupe ce double cône par un plan qui passe par l'axe commun : la section est un carré, puisque les angles au sommet sont droits. Comme un carré est invariant par une rotation de 90 degrés, une moitié du double cône, tournée de 90 degrés, s'ajuste parfaitement à l'autre moitié non tournée. Une fois les deux moitiés recollées, vous obtenez un sphéricône (voir la figure 1). La rotation d'une moitié en fait un animal mathématique que je n'avais encore jamais rencontré.

Le sphéricône s'obtient également par le pliage d'une feuille découpée suivant quatre secteurs identiques, juxtaposés tête-bêche (voir la figure 3). Pour quel angle des secteurs obtient-on le sphéricône? Prenons le problème à l'envers : partons d'un double cône. De profil, on voit un carré. Si le côté est égal à un, le théorème de Pythagore

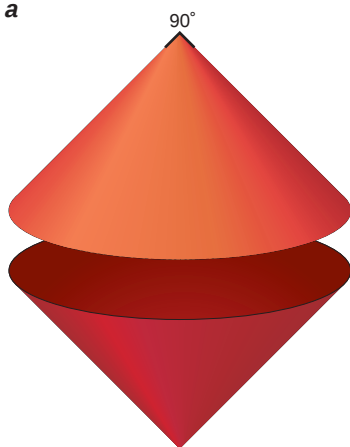
stipule que la diagonale, qui est aussi le diamètre des cônes, est égale à $\sqrt{2}$. La circonférence de la base des cônes est donc égale à $\pi\sqrt{2}$. Comme les arcs des secteurs représentent la moitié d'un cône, leur longueur est égale à $(\pi\sqrt{2})/2$. L'angle au centre de chaque secteur est alors égal à $(\pi\sqrt{2})/2$ radians, soit environ 127,28 degrés.

Avec un peu d'attention et quelques bouts de ruban adhésif, vous obtiendrez un magnifique sphéricône.

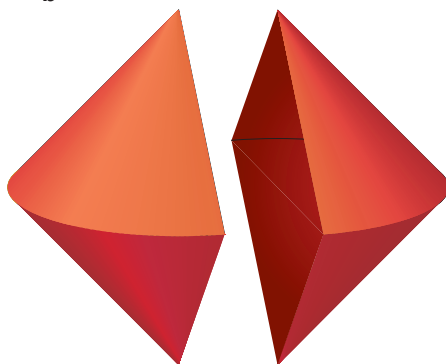
Vous aurez alors le plaisir de voir le sphéricône rouler! Sur un plan, un cône roule en décrivant un cercle. Un double cône, lui, décrit soit des cercles différents selon le cône d'appui, soit une ligne droite lorsqu'il est en équilibre sur la frontière des deux cônes ou qu'il est guidé par des rails. Un sphéricône, enfin, décrit une ligne sinueuse autour d'une droite : il suit exactement le patron de construction de la figure 2, où les sommets des secteurs correspondent aux points de contact des sommets de la section carrée, tandis que les secteurs correspondent au balayage de la zone de contact. Sur une pente douce, le sphéricône se dodeline de gauche à droite avec une démarche chaloupée. N'hésitez plus à construire le sphéricône et observez-le rouler sur une table.

La lettre de C. Roberts mentionnait également quelques propriétés fascinantes, telles que la présence d'une face continue ou la possibilité pour deux sphéricônes identiques de rouler indéfiniment l'un sur

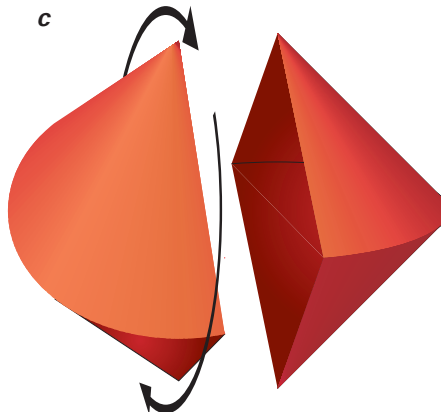
a



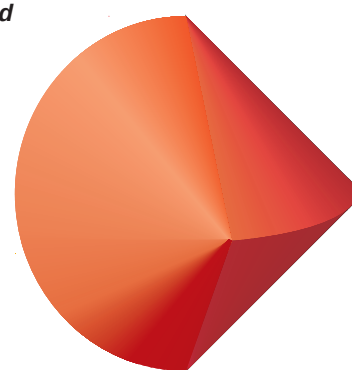
b



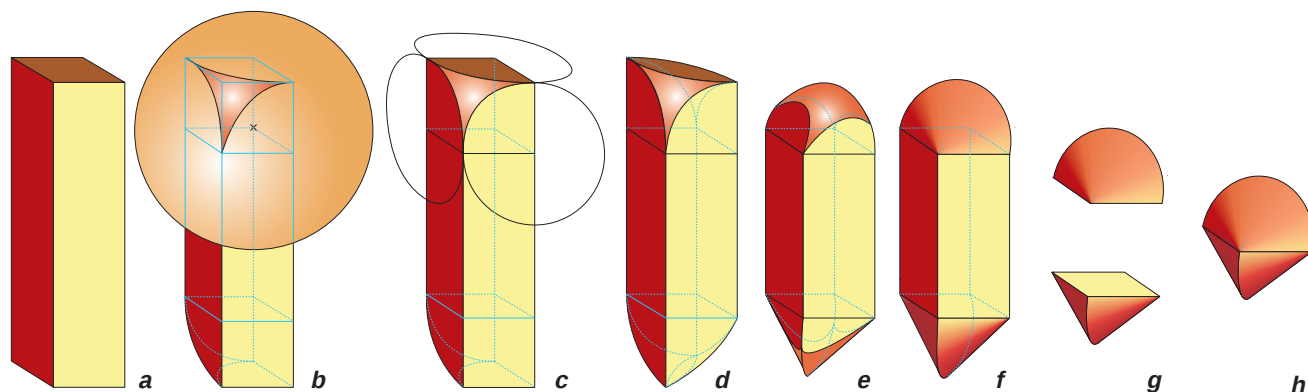
c



d



1. LA CONSTRUCTION D'UN SPHÉRICÔNE : collez deux cônes identiques, d'angle au sommet égal à 90 degrés, par leurs bases (a) ; coupez selon le plan de l'axe des deux cônes (b) ; pivotez l'une des moitiés de 90 degrés (c) ; enfin, recollez les deux parties (d).



2. À partir d'une longueur de bois à section carrée (a), on peut fabriquer un sphérocône : à chaque extrémité, on taille un coin selon l'intersection avec une sphère (b et c) ; on taille ensuite les deux coins opposés aux précédents (d) ; puis on arrondit les

quatre coins restés intacts jusqu'à obtenir, à chaque extrémité de la pièce de bois, un demi-cercle qui joint deux sommets opposés de la section carrée (e et f) ; on élimine alors le bois central (g) et on colle les deux morceaux.

l'autre. Intrigué, je questionnai ce lecteur qui, en guise de réponse, m'expédia une énorme boîte en carton d'une légèreté surprenante : elle contenait un réseau d'environ 50 sphérocônes soigneusement assemblés. Ce réseau est régulier : sa structure peut se répéter indéfiniment dans les trois dimensions de l'espace.

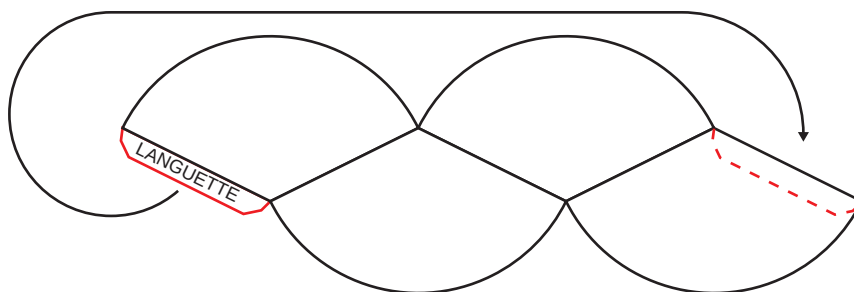
Les remarquables propriétés du sphérocône résultent de la possibilité de l'inscrire dans un réseau cubique : ses quatre arêtes – qui séparent les quatre secteurs – appartiennent à un octaèdre régulier (les quatre autres sont les bissectrices de chaque secteur), dont les sommets sont les centres des six faces d'un cube.

Âgé de 47 ans, C. Roberts a inventé le sphérocône il y a 30 ans. Devenu menuisier, il a taillé son premier sphérocône dans du bois. Le ruban de Möbius, formé d'un ruban de papier dont on colle les deux extrémités après avoir tourné l'une d'elles de 180 degrés, est à l'origine de l'idée du sphérocône. Quelle que soit sa finesse, le papier a une épaisseur : une section transverse du ruban est donc un rectangle allongé. Avec une section carrée, les extrémités pourront être collées après une rotation de seulement 90 degrés : le volume ainsi obtenu est un anneau qui a une seule face. Existait-il un volume sans trou et dont la surface soit une unique face ? Alors qu'il travaillait une longueur de bois à section carrée, C. Roberts a cherché à relier sans arête l'extrémité de deux des faces rectangulaires adjacentes. La même opération pour les deux autres faces rectangulaires permet d'obtenir un demi-cercle qui joint les extrémités d'une diagonale de la section carrée (voir la figure 2f). Le passage d'une face rectangulaire à l'autre rappelle les virages relevés des vélodromes. Après avoir répété le même procédé à l'autre extrémité de la pièce de bois en suivant une diagonale perpendiculaire à la précédente,

l'élimination du bois superflu entre les deux extrémités donne naissance à un... sphérocône (voir la figure 2h).

Il en a taillé un dans du bois d'acajou (*Swietenia mahagoni*), et il l'a offert à sa sœur, qui l'a encore. Le volume disparut de sa mémoire jusqu'en 1997, où il m'a vu donner des conférences télévisées sur la symétrie.

Mentionnons, pour terminer, que deux sphérocônes peuvent rouler l'un sur l'autre ; quatre sphérocônes arrangés en carré peuvent également rouler les uns sur les autres ; huit sphérocônes peuvent parcourir un neuvième sphérocône placé au centre... Les combinaisons semblent infinies, je laisse le soin au lecteur d'en explorer les possibilités.



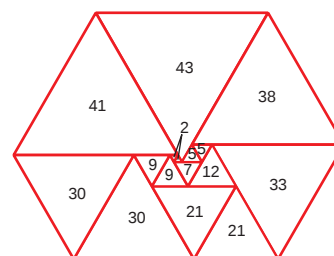
3. LA CONSTRUCTION du sphérocône est facile quand on suit ce patron. Après avoir découpé cette forme (agrandie !) dans du carton, on colle la languette et on joint les bords des demi-cônes.

Réactions

La correspondance qui a suivi l'article «La quadrature du carré» (voir *Pour la Science*, octobre 1997) n'est pas encore terminée. Par exemple, Robert Wainwright demande quelle est la plus grande aire convexe, c'est-à-dire sans angle rentrant, qui peut être pavée par des triangles équilatéraux à côtés entiers sans diviseurs communs. D'autres lettres annoncent vos résultats, notamment des pavages d'aire égale à 4 751 (celle du plus petit triangle possible est égale à l'unité), puis à 4 782 par 15 triangles.

En 1998, par inadvertance, j'ai négligé le pavage par 15 triangles d'une aire égale à 5 114, proposé par John Layman, de l'Institut polytechnique de Virginie, plus grand que tous ceux que j'avais repro-

duits ! (Je lui présente ici mes excuses. Je dois sans doute améliorer mon système de classement.) Plus récemment, J. Layman a trouvé un pavage d'aire 9 158 avec 16 triangles (voir la figure, les chiffres indiquent la longueur d'un côté), un d'aire 16 655 avec 17 triangles et un d'aire 29 214 avec 18 triangles.





Les propositions indécidables

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'incomplétude gödelienne concerne-t-elle d'autres domaines que les mathématiques ?

En 1931, le logicien Kurt Gödel prouvait un théorème révolutionnaire qui démontrait que les mathématiques sont plus profondes que les mathématiciens ne l'imaginaient. Toute tentative pour définir de qu'est une preuve échoue nécessairement à cause des propositions dites indécidables (on ne peut déterminer ni leur vérité, ni leur fausseté) qui se glissent dans tout système.

Imaginez l'émoi que ce résultat aurait dû susciter : assez paradoxalement toutefois, l'incomplétude et l'indécidabilité gödelienne engendrent un intérêt considérable chez nombre de ceux qu'elles ne concernent pas vraiment (ou seulement à titre de vagues métaphores) et une indifférence aveugle chez les mathématiciens, qui devraient en être troublés. Nous allons examiner le théorème de Gödel et l'importance qu'il devrait avoir.

L'AXIOME DES PARALLÈLES

L'exemple le plus simple d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité est ancienne : c'est la géométrie qui découle de l'axiome des parallèles. L'affaire remonte aux *Éléments* d'Euclide, qui furent écrits vers 300 avant J.-C. et qui rapportaient des résultats mathématiques plus anciens encore. Euclide y développe une conception axiomatique de la géométrie : il énumère les propriétés primitives des objets points, droites, plans, etc., qu'il accepte sans démonstration (ce sont les axiomes et postulats). Toute la géométrie n'est plus alors qu'une question de raisonnement pur, de déduction logique.

La présentation d'Euclide ne décrit pas les règles de raisonnement autorisées (elles n'ont été comprises qu'au

cours du XIX^e siècle). Euclide ignore les notations qui, aujourd'hui, facilitent l'exposé des démonstrations et leurs vérifications ; pour rendre plus aisée la lecture, l'axiomatisation de la géométrie que nous évoquons ici prend en compte les progrès faits par la méthode axiomatique.

Parmi les propriétés posées par Euclide, la pierre d'achoppement est l'axiome des parallèles (ou cinquième postulat d'Euclide), qui énonce :

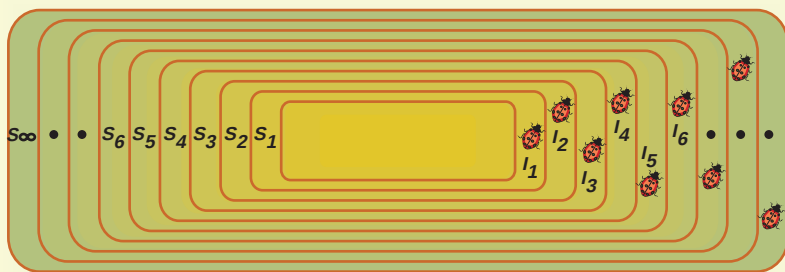
Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P, alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' contenant P et ne rencontrant pas D (la droite D' est dénommée la parallèle à D passant par P).

La question s'est posée très tôt : pouvait-on déduire cet axiome des autres axiomes, en apparence plus naturels ? On a longtemps pensé que cela devait être possible. Hélas, toutes les tentatives échouèrent pour prouver l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes. Avec la maturité des méthodes logiques, on a fini par démontrer en 1868 que l'énoncé des parallèles ne se déduisait pas des autres axiomes : aujourd'hui, il est donc inutile d'essayer de le « prouver » !

Il s'agit bien là d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité : la géométrie euclidienne sans l'axiome des parallèles, dénommée *géométrie absolue*, est incomplète. Quelle que soit la longueur des raisonnements qu'on fasse, on ne peut déduire de la géométrie absolue, ni l'axiome des parallèles ni sa négation (c'est-à-dire l'affirmation qu'il n'est pas vérifié). Vis-à-vis de la géométrie absolue, l'axiome des parallèles est indécidable.

Même si la preuve de cette indécidabilité a joué un rôle important dans la compréhension de la nature de l'espace physique, la conclusion qu'on en tire n'est pas très grave sur le plan mathématique. On la formule ainsi : la géométrie absolue n'est pas la théorie de l'espace, car la géométrie absolue n'est que le socle

1. ON N'ÉCHAPPE PAS AU THÉORÈME DE GÖDEL



Si un système formel permet de faire de l'arithmétique et qu'il est consistant (c'est-à-dire qu'il ne se contredit pas), alors il existe des énoncés *I* dont *S* ne peut démontrer ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux (on les appelle des indécidables de *S*).

Le théorème de Gödel permet de construire explicitement un tel indécidable *I* (sa démonstration est fondée sur l'écriture d'un énoncé codant dans *S* l'affirmation : "je ne suis pas démontrable dans *S*").

Une idée naturelle vient à l'esprit : partant d'un système *S*₁, on construit un tel indécidable *I*₁ et on l'ajoute à *S*₁ comme nouvel axiome, ce qui donne un nouveau système *S*₂ dans lequel bien sûr *I*₁ n'est plus indécidable.

Puisque le théorème de Gödel appliqué à *S*₂ nous permet d'obtenir un autre indécidable *I*₂ on l'ajoute aux axiomes de *S*₂, ce qui conduit à un nouveau système *S*₃. Etc.

Les systèmes emboîtés *S*₁, *S*₂, *S*₃, etc., sont de plus en plus puissants (ils comportent de moins en moins d'indécidables). À l'infini, ils fournissent un nouveau système formel *S*_∞. Malheureusement, ce système comporte encore des indécidables ! On n'échappe pas si facilement au théorème de Gödel.