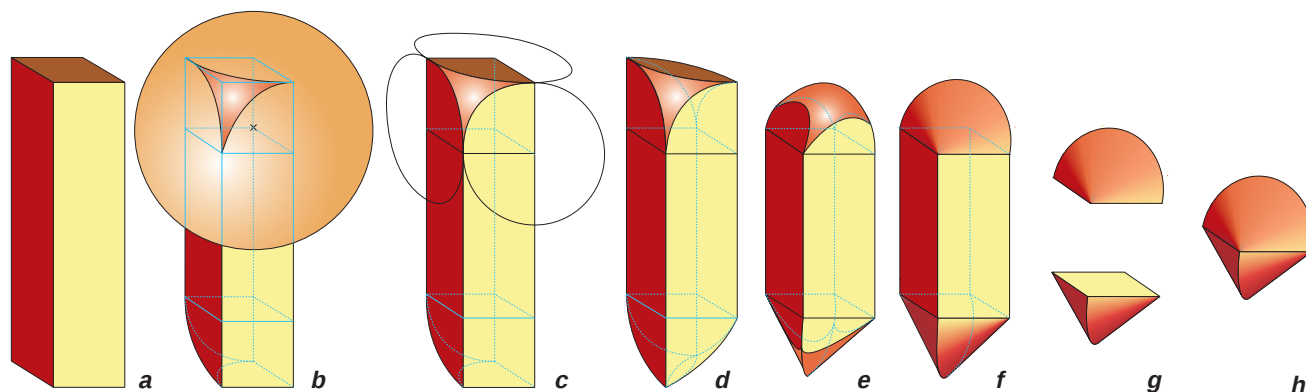




2. À partir d'une longueur de bois à section carrée (a), on peut fabriquer un sphérocône : à chaque extrémité, on taille un coin selon l'intersection avec une sphère (b et c) ; on taille ensuite les deux coins opposés aux précédents (d) ; puis on arrondit les

quatre coins restés intacts jusqu'à obtenir, à chaque extrémité de la pièce de bois, un demi-cercle qui joint deux sommets opposés de la section carrée (e et f) ; on élimine alors le bois central (g) et on colle les deux morceaux.

l'autre. Intrigué, je questionnai ce lecteur qui, en guise de réponse, m'expédia une énorme boîte en carton d'une légèreté surprenante : elle contenait un réseau d'environ 50 sphérocônes soigneusement assemblés. Ce réseau est régulier : sa structure peut se répéter indéfiniment dans les trois dimensions de l'espace.

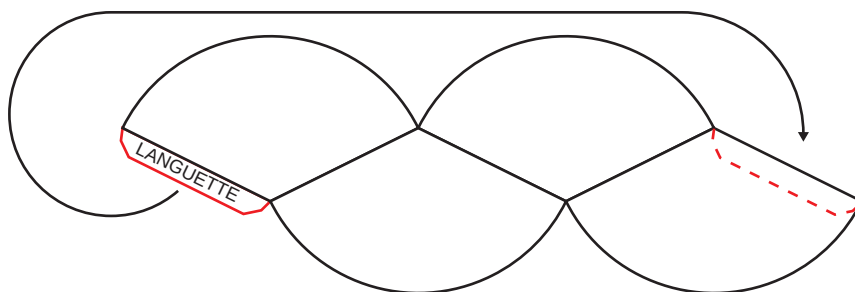
Les remarquables propriétés du sphérocône résultent de la possibilité de l'inscrire dans un réseau cubique : ses quatre arêtes – qui séparent les quatre secteurs – appartiennent à un octaèdre régulier (les quatre autres sont les bissectrices de chaque secteur), dont les sommets sont les centres des six faces d'un cube.

Âgé de 47 ans, C. Roberts a inventé le sphérocône il y a 30 ans. Devenu menuisier, il a taillé son premier sphérocône dans du bois. Le ruban de Möbius, formé d'un ruban de papier dont on colle les deux extrémités après avoir tourné l'une d'elles de 180 degrés, est à l'origine de l'idée du sphérocône. Quelle que soit sa finesse, le papier a une épaisseur : une section transverse du ruban est donc un rectangle allongé. Avec une section carrée, les extrémités pourront être collées après une rotation de seulement 90 degrés : le volume ainsi obtenu est un anneau qui a une seule face. Existait-il un volume sans trou et dont la surface soit une unique face ? Alors qu'il travaillait une longueur de bois à section carrée, C. Roberts a cherché à relier sans arête l'extrémité de deux des faces rectangulaires adjacentes. La même opération pour les deux autres faces rectangulaires permet d'obtenir un demi-cercle qui joint les extrémités d'une diagonale de la section carrée (voir la figure 2f). Le passage d'une face rectangulaire à l'autre rappelle les virages relevés des vélodromes. Après avoir répété le même procédé à l'autre extrémité de la pièce de bois en suivant une diagonale perpendiculaire à la précédente,

l'élimination du bois superflu entre les deux extrémités donne naissance à un... sphérocône (voir la figure 2h).

Il en a taillé un dans du bois d'acajou (*Swietenia mahagoni*), et il l'a offert à sa sœur, qui l'a encore. Le volume disparut de sa mémoire jusqu'en 1997, où il m'a vu donner des conférences télévisées sur la symétrie.

Mentionnons, pour terminer, que deux sphérocônes peuvent rouler l'un sur l'autre ; quatre sphérocônes arrangés en carré peuvent également rouler les uns sur les autres ; huit sphérocônes peuvent parcourir un neuvième sphérocône placé au centre... Les combinaisons semblent infinies, je laisse le soin au lecteur d'en explorer les possibilités.



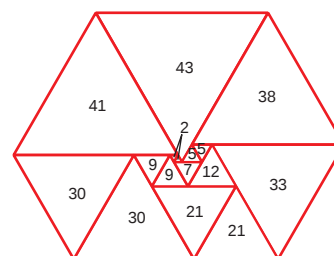
3. LA CONSTRUCTION du sphérocône est facile quand on suit ce patron. Après avoir découpé cette forme (agrandie !) dans du carton, on colle la languette et on joint les bords des demi-cônes.

Réactions

La correspondance qui a suivi l'article «La quadrature du carré» (voir *Pour la Science*, octobre 1997) n'est pas encore terminée. Par exemple, Robert Wainwright demande quelle est la plus grande aire convexe, c'est-à-dire sans angle rentrant, qui peut être pavée par des triangles équilatéraux à côtés entiers sans diviseurs communs. D'autres lettres annoncent vos résultats, notamment des pavages d'aire égale à 4 751 (celle du plus petit triangle possible est égale à l'unité), puis à 4 782 par 15 triangles.

En 1998, par inadvertance, j'ai négligé le pavage par 15 triangles d'une aire égale à 5 114, proposé par John Layman, de l'Institut polytechnique de Virginie, plus grand que tous ceux que j'avais repro-

duits ! (Je lui présente ici mes excuses. Je dois sans doute améliorer mon système de classement.) Plus récemment, J. Layman a trouvé un pavage d'aire 9 158 avec 16 triangles (voir la figure, les chiffres indiquent la longueur d'un côté), un d'aire 16 655 avec 17 triangles et un d'aire 29 214 avec 18 triangles.





Les propositions indécidables

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'incomplétude gödelienne concerne-t-elle d'autres domaines que les mathématiques ?

En 1931, le logicien Kurt Gödel prouvait un théorème révolutionnaire qui démontrait que les mathématiques sont plus profondes que les mathématiciens ne l'imaginaient. Toute tentative pour définir de qu'est une preuve échoue nécessairement à cause des propositions dites indécidables (on ne peut déterminer ni leur vérité, ni leur fausseté) qui se glissent dans tout système.

Imaginez l'émoi que ce résultat aurait dû susciter : assez paradoxalement toutefois, l'incomplétude et l'indécidabilité gödelienne engendrent un intérêt considérable chez nombre de ceux qu'elles ne concernent pas vraiment (ou seulement à titre de vagues métaphores) et une indifférence aveugle chez les mathématiciens, qui devraient en être troublés. Nous allons examiner le théorème de Gödel et l'importance qu'il devrait avoir.

L'AXIOME DES PARALLÈLES

L'exemple le plus simple d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité est ancienne : c'est la géométrie qui découle de l'axiome des parallèles. L'affaire remonte aux *Éléments* d'Euclide, qui furent écrits vers 300 avant J.-C. et qui rapportaient des résultats mathématiques plus anciens encore. Euclide y développe une conception axiomatique de la géométrie : il énumère les propriétés primitives des objets points, droites, plans, etc., qu'il accepte sans démonstration (ce sont les axiomes et postulats). Toute la géométrie n'est plus alors qu'une question de raisonnement pur, de déduction logique.

La présentation d'Euclide ne décrit pas les règles de raisonnement autorisées (elles n'ont été comprises qu'au

cours du XIX^e siècle). Euclide ignore les notations qui, aujourd'hui, facilitent l'exposé des démonstrations et leurs vérifications ; pour rendre plus aisée la lecture, l'axiomatisation de la géométrie que nous évoquons ici prend en compte les progrès faits par la méthode axiomatique.

Parmi les propriétés posées par Euclide, la pierre d'achoppement est l'axiome des parallèles (ou cinquième postulat d'Euclide), qui énonce :

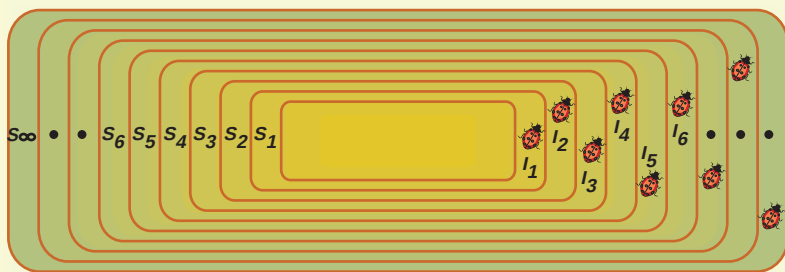
Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P, alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' contenant P et ne rencontrant pas D (la droite D' est dénommée la parallèle à D passant par P).

La question s'est posée très tôt : pouvait-on déduire cet axiome des autres axiomes, en apparence plus naturels ? On a longtemps pensé que cela devait être possible. Hélas, toutes les tentatives échouèrent pour prouver l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes. Avec la maturité des méthodes logiques, on a fini par démontrer en 1868 que l'énoncé des parallèles ne se déduisait pas des autres axiomes : aujourd'hui, il est donc inutile d'essayer de le « prouver » !

Il s'agit bien là d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité : la géométrie euclidienne sans l'axiome des parallèles, dénommée *géométrie absolue*, est incomplète. Quelle que soit la longueur des raisonnements qu'on fasse, on ne peut déduire de la géométrie absolue, ni l'axiome des parallèles ni sa négation (c'est-à-dire l'affirmation qu'il n'est pas vérifié). Vis-à-vis de la géométrie absolue, l'axiome des parallèles est indécidable.

Même si la preuve de cette indécidabilité a joué un rôle important dans la compréhension de la nature de l'espace physique, la conclusion qu'on en tire n'est pas très grave sur le plan mathématique. On la formule ainsi : la géométrie absolue n'est pas la théorie de l'espace, car la géométrie absolue n'est que le socle

1. ON N'ÉCHAPPE PAS AU THÉORÈME DE GÖDEL



Si un système formel permet de faire de l'arithmétique et qu'il est consistant (c'est-à-dire qu'il ne se contredit pas), alors il existe des énoncés *I* dont *S* ne peut démontrer ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux (on les appelle des indécidables de *S*).

Le théorème de Gödel permet de construire explicitement un tel indécidable *I* (sa démonstration est fondée sur l'écriture d'un énoncé codant dans *S* l'affirmation : "je ne suis pas démontrable dans *S*").

Une idée naturelle vient à l'esprit : partant d'un système *S*₁, on construit un tel indécidable *I*₁ et on l'ajoute à *S*₁ comme nouvel axiome, ce qui donne un nouveau système *S*₂ dans lequel bien sûr *I*₁ n'est plus indécidable.

Puisque le théorème de Gödel appliqué à *S*₂ nous permet d'obtenir un autre indécidable *I*₂ on l'ajoute aux axiomes de *S*₂, ce qui conduit à un nouveau système *S*₃. Etc.

Les systèmes emboîtés *S*₁, *S*₂, *S*₃, etc., sont de plus en plus puissants (ils comportent de moins en moins d'indécidables). À l'infini, ils fournissent un nouveau système formel *S*_∞. Malheureusement, ce système comporte encore des indécidables ! On n'échappe pas si facilement au théorème de Gödel.

commun à plusieurs géométries possibles que l'on définit en ajoutant à la géométrie absolue, soit l'axiome des parallèles, soit un autre axiome. Parmi les différentes géométries possibles obtenues en complétant la géométrie absolue, c'est aux physiciens de dire celle qui leur convient le mieux pour représenter l'espace.

Être incomplet, pour un système formel (comme celui de la géométrie euclidienne), c'est laisser certaines propositions en suspens : un système incomplet est un système où l'on ne peut prouver ni la vérité ni la fausseté d'énoncés qu'il permet pourtant de formuler. Un indécidable d'un système incomplet, c'est un énoncé pour lequel le système ne sait rien dire.

L'incomplétude de la géométrie absolue traduit simplement un oubli dans les axiomes : depuis des siècles, de nombreux mathématiciens croyaient que l'axiome des parallèles pouvait se déduire des autres, ils se trompaient. En voilà une affaire !

Bien des problèmes restent ouverts concernant l'indécidabilité de problèmes simples, y compris lorsqu'ils ont été résolus dans un cadre particulier. Par exemple, la démonstration du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 s'est faite dans le cadre de la théorie des ensembles – ce théorème n'est pas un indécidable de la théorie des ensembles, mais savoir s'il s'agit d'un indécidable de l'arithmétique est une question difficile et non résolue dont nous verrons la pertinence.

EN ATTENDANT GÖDEL...

Les phénomènes d'indécidabilité et d'incomplétude (même si, dans le passé, les mathématiciens n'utilisaient pas ces termes) sont présents dans les mathématiques depuis toujours. Ce qui a changé en 1931, avec les fameux résultats de Kurt Gödel, c'est qu'il est aujourd'hui prouvé que ces phénomènes – contrairement à ce qu'on pensait – sont universels : toute théorie d'un certain niveau y est assujettie. D'aucuns ont cru déduire de cette universalité que l'indécidabilité était inquiétante. D'autres, sans contester la justesse des résultats de Gödel, soutiennent à l'opposé qu'on ne doit pas s'en préoccuper, et donc, en quelque sorte, que la situation des mathématiques est désespérée, mais pas grave.

Un exemple simplissime de système formel est indiqué dans l'encadré 3. Les logiciens affirment qu'un système formel est consistant (ou cohérent, ou non contradictoire) quand il est impossible d'y démontrer une proposition et sa négation (autrement dit, le système ne se contredit pas). Dans le

2. L'AXIOME DES PARALLÈLES EST INDÉCIDABLE

Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P , alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' , contenant P et ne rencontrant pas D .

Cette formulation de l'axiome des parallèles n'est pas exactement celle d'Euclide. Il utilisait l'énoncé équivalent : si deux droites, coupées par une sécante, forment des angles intérieurs d'un même côté dont la somme est inférieure à deux droits, ces droites se coupent.

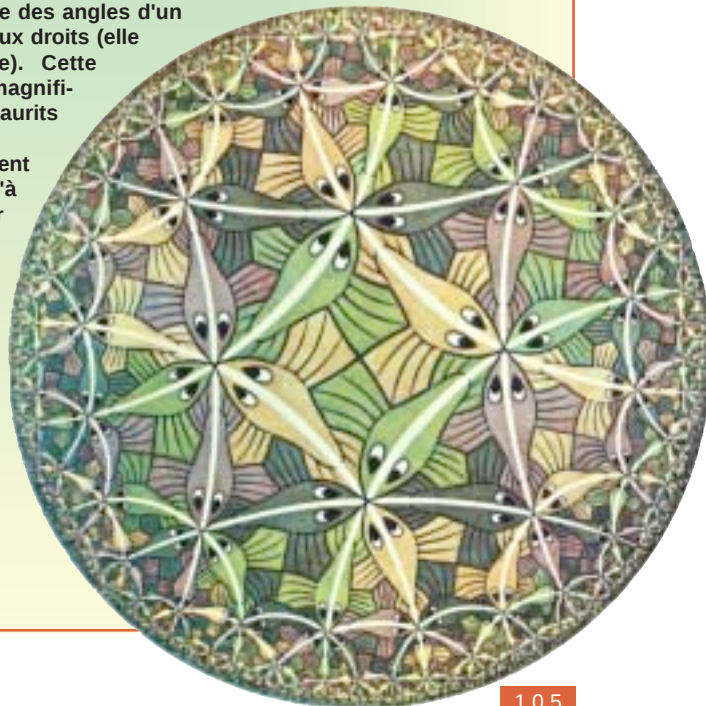
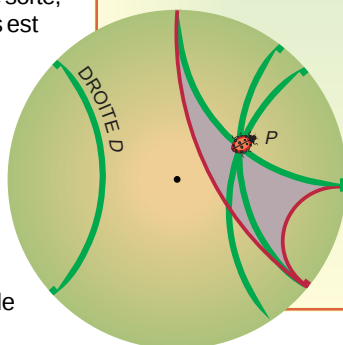
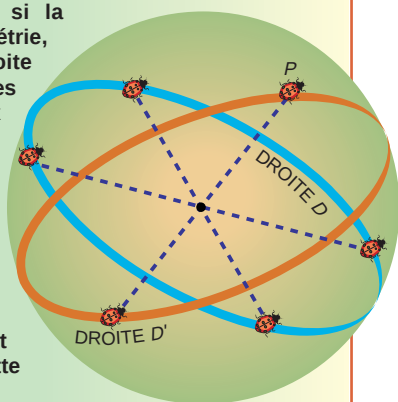
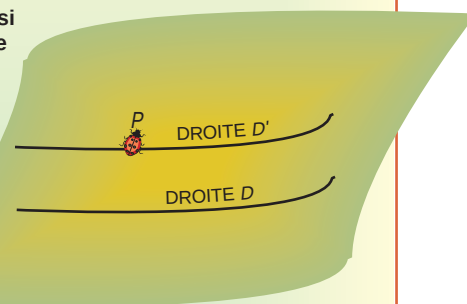
D'autres formulations équivalentes sont : si une droite D coupe une droite, elle coupe aussi toutes les droites parallèles à D (axiome de Proclus) ; la somme des angles d'un triangle vaut deux droits ; la surface d'un triangle peut être aussi grande qu'on veut. La terminologie du *cinquième postulat d'Euclide* ou *postulat des parallèles*, est trompeuse, car chez Euclide certaines définitions cachent des axiomes.

Dans la présentation moderne de l'axiomatisation de la géométrie – étudiée par David Hilbert –, il y a bien plus de cinq postulats-axiomes fondamentaux.

La première démonstration que l'axiome des parallèles est indécidable dans la géométrie absolue est due à Eugenio Beltrami en 1868. Il prouva que la géométrie elliptique (ou de Riemann) est consistante si la géométrie euclidienne l'est. Dans cette géométrie, par un point ne passe pas forcément de droite parallèle à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il appelle point un couple de points diamétralement opposés et droite un cercle sur la sphère de diamètre maximum. Avec ce vocabulaire redéfini, il constate que les axiomes de la géométrie sont vérifiés. Par exemple : par deux points (au sens nouveau) distincts passe une droite (au sens nouveau) unique. Le seul axiome qui n'est pas satisfait est celui des parallèles : une droite D étant donnée, ainsi qu'un point P à l'extérieur de cette droite, toute droite D' passant par P coupe D .

Une autre version de la démonstration de l'impossibilité de déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes est due au grand mathématicien français Henri Poincaré. On prend un disque (sans sa circonférence) et on appelle droite les arcs de cercle situés dans ce disque qui coupent orthogonalement le bord du disque. Dans cette géométrie hyperbolique (ou de Lobachevski), par un point donné passent plusieurs droites parallèles à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits (elle est éventuellement nulle). Cette géométrie a inspiré de magnifiques œuvres au graveur Maurits Escher.

Les mathématiciens utilisent aujourd'hui des dessins "à la Escher" pour visualiser les propriétés de la géométrie hyperbolique.



cadre de la logique usuelle, dès qu'un système peut démontrer P et non- P (une proposition et sa négation), alors il peut tout démontrer. C'est pourquoi l'insistance est crainte et bannie.

Le résultat de Kurt Gödel de 1931, qui universalise l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue, se décompose en deux parties. La première indique que tout système formel permettant de faire de l'arithmétique (la théorie élémentaire des nombres entiers) est soit inconsistent (donc inintéressant, puisque tout y est vrai et faux à la fois), soit incomplet (donc insatisfaisant, puisque le système laisse en suspens certains énoncés).

Autrement dit : tout système formel, à la fois assez puissant pour l'arithmétique élémentaire et consistant contient des indécidables. La seconde partie des résultats de 1931 (ou second théorème de Gödel) indique que justement l'énoncé qui affirme qu'un système est consistant est l'un des indécidables de ce système, ce que l'on traduit simplement en disant qu'un système consistant ne peut savoir qu'il l'est. Une démonstration de ce théorème due à Georges Boolos est présentée sur le site Internet de *Pour la Science*.

Insistons sur le fait que ces résultats n'indiquent pas qu'il existe des

indécidables absolus (c'est-à-dire définitivement indémonstrables dans tout système formel), mais indique que, pour chaque système formel particulier (assez puissant et consistant), il y a au moins un indécidable I .

Si vous repérez un indécidable pour un système S auquel vous ajoutez le nouvel axiome I , vous créez un système S' où I n'est plus indécidable. Fort bien, mais avez-vous par là véritablement progressé ? Hélas, guère : le théorème de Gödel s'applique alors au nouveau système S' , et donc il existe au moins un indécidable I' de S' (I' est bien sûr aussi un indécidable de S). Si vous ajoutez I' aux axiomes de S' , vous obtenez un système S'' qui contiendra un indécidable I'' , etc.

Ceux qui interprètent le phénomène de l'indécidabilité comme établissant que les mathématiques sont incomplètes se trompent : un système particulier qui n'accède pas à une certaine vérité mathématique peut toujours être complété pour y accéder.

Un piège existe, piège que nous allons détailler pour assimiler le sens du théorème de Gödel. Le mathématicien n'est jamais effrayé par l'infini et, devant les systèmes S , S' , S'' , etc., il se dit qu'il suffit d'ajouter jusqu'à l'infini les indécidables qu'on trouve et qu'on obtiendra alors un système complet.

UNE MÉTHODE DE COMPLÉTION INEFFECTIVE

Si ce mathématicien s'y prend trop naïvement, il ne réussira pas car, même après avoir ajouté I , I' , I'' , etc. jusqu'à l'infini, le système obtenu contiendra encore des indécidables (on sait le démontrer). L'impossibilité est analogue avec les tentatives d'énumération des nombres entiers : ce n'est pas parce que vous prenez une infinité d'entiers (par exemple, les entiers pairs, 2, 4, 6, 8, ...) que vous prenez tous les entiers. Similairement, ce n'est pas parce que vous ajoutez une infinité d'indécidables à S qu'il n'y en a plus.

Après un moment de réflexion, le mathématicien propose une autre idée un peu plus subtile. Il dit :

– Je numérote toutes les formules ayant un sens dans mon système $S = S_0 : f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ (une telle numérotation est possible pour des formules).

– Je les prends une à une en ajoutant comme nouveaux axiomes celles qui sont encore indécidables au moment où je les considère : à l'étape n du processus de complétion, j'arrive à un certain système S_n , je regarde f_n ; si c'est un indécidable de S_n , j'ajoute f_n à S_n pour obtenir S_{n+1} , sinon je conserve le même $S_n : S_{n+1} = S_n$.

3. UN EXEMPLE DE SYSTÈME FORMEL

Dans un système formel (ou système de démonstrations), on détaille successivement ce que sont les formules, les axiomes, les règles d'inférence. Examinons un exemple de système formel, dont la signification sera donnée par la suite.

Formules : des bâtons | suivis du symbole $\clubsuit$, puis à nouveau des bâtons, puis le symbole $=$, puis encore des bâtons, ou la même chose précédée de un ou plusieurs NON.

Exemples : $||||| \clubsuit ||||| = |||||$; NON $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

Axiomes : Toutes les formules sans NON où le nombre de bâtons des trois paquets est le même.

Exemple : $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

Règles d'inférence :

– **règle A** : on permute les deux paquets devant le $=$.

Exemple : de $||||| \clubsuit ||||| = |||||$, on déduit $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

– **règle B** : on ajoute au paquet entre $\clubsuit$ et $=$ le nombre de bâtons qu'il y a dans le paquet à gauche de $\clubsuit$.

Exemple : de $||||| \clubsuit ||||| = |||||$, on déduit $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

– **règle C** : on ajoute ou on soustrait au moins un des bâtons du paquet derrière $=$ et on fait précéder le tout de NON.

Exemple : de $||||| \clubsuit ||||| = |||||$, on déduit : NON $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

– **règle D** : on ajoute deux fois NON devant une formule déjà obtenue.

Exemple : de $||||| \clubsuit ||||| = |||||$, on déduit : NON NON $||||| \clubsuit ||||| = |||||$

Une déduction (ou démonstration) dans le système $\clubsuit$ est une suite de formules telle que chacune est soit un axiome, soit provient de l'utilisation d'une des règles A, B, C ou D sur des formules précédemment déduites.

Les axiomes et les règles d'inférence doivent être suffisamment simples pour que la vérification qu'une suite de formules est une déduction correcte puisse se faire mécaniquement (c'est-à-dire par algorithme).

Exemple de déduction dans le système $\clubsuit$:

$| \clubsuit | = |$ (c'est un axiome)

$| \clubsuit | = |$ (règle B appliquée à la formule précédente).

$|| \clubsuit | = |$ (règle A appliquée à la formule précédente)

$|| \clubsuit || = |$ (règle B appliquée à la formule précédente)

$|| \clubsuit |||| = |$ (règle B appliquée à la formule précédente)

NON $|| \clubsuit |||| = ||$ (règle C appliquée à la formule précédente)

Interprétation du système formel $\clubsuit$

Ce système formel permet de démontrer (i) toutes les propriétés vraies concernant le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers du type : le pgcd de 6 et 4 est 2 (ce qui, avec nos notations, s'écrit $||||| \clubsuit |||| = ||$) ;

(ii) toutes les formules de ce type précédées d'un nombre quelconque de NON.

Le fait que nous ayons réussi à établir $|| \clubsuit |||| = |$ signifie en particulier que le pgcd de 2 et 5 est 1, autrement dit que 2 et 5 sont premiers entre eux. Ayant établi que NON $|| \clubsuit |||| = ||$, nous avons démontré que le pgcd de 2 et 5 n'est pas 2.

Les propriétés de ce système sont :

– correction vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on démontre en suivant le système est juste ;

– adéquation vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on peut formuler avec les formules du système et qui est vrai est démontrable ;

– consistance (résulte de l'adéquation) : jamais on ne prouve une formule et son contraire (la même formule précédée de NON) ;

– complétude : pour toute formule F du système, on peut démontrer F ou NON-F.

Ce système capte complètement le domaine mathématique visé, et son étude peut être menée entièrement (c'est rarement le cas). Il ne contient pas d'indécidables, mais, si on omettait un seul axiome (par exemple $| \clubsuit | = ||$), certains énoncés vrais (exemple : $|||| \clubsuit ||||| = ||$) deviendraient indécidables. Le système modifié serait alors incomplet.