

commun à plusieurs géométries possibles que l'on définit en ajoutant à la géométrie absolue, soit l'axiome des parallèles, soit un autre axiome. Parmi les différentes géométries possibles obtenues en complétant la géométrie absolue, c'est aux physiciens de dire celle qui leur convient le mieux pour représenter l'espace.

Être incomplet, pour un système formel (comme celui de la géométrie euclidienne), c'est laisser certaines propositions en suspens : un système incomplet est un système où l'on ne peut prouver ni la vérité ni la fausseté d'énoncés qu'il permet pourtant de formuler. Un indécidable d'un système incomplet, c'est un énoncé pour lequel le système ne sait rien dire.

L'incomplétude de la géométrie absolue traduit simplement un oubli dans les axiomes : depuis des siècles, de nombreux mathématiciens croyaient que l'axiome des parallèles pouvait se déduire des autres, ils se trompaient. En voilà une affaire !

Bien des problèmes restent ouverts concernant l'indécidabilité de problèmes simples, y compris lorsqu'ils ont été résolus dans un cadre particulier. Par exemple, la démonstration du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 s'est faite dans le cadre de la théorie des ensembles – ce théorème n'est pas un indécidable de la théorie des ensembles, mais savoir s'il s'agit d'un indécidable de l'arithmétique est une question difficile et non résolue dont nous verrons la pertinence.

EN ATTENDANT GÖDEL...

Les phénomènes d'indécidabilité et d'incomplétude (même si, dans le passé, les mathématiciens n'utilisaient pas ces termes) sont présents dans les mathématiques depuis toujours. Ce qui a changé en 1931, avec les fameux résultats de Kurt Gödel, c'est qu'il est aujourd'hui prouvé que ces phénomènes – contrairement à ce qu'on pensait – sont universels : toute théorie d'un certain niveau y est assujettie. D'aucuns ont cru déduire de cette universalité que l'indécidabilité était inquiétante. D'autres, sans contester la justesse des résultats de Gödel, soutiennent à l'opposé qu'on ne doit pas s'en préoccuper, et donc, en quelque sorte, que la situation des mathématiques est désespérée, mais pas grave.

Un exemple simplissime de système formel est indiqué dans l'encadré 3. Les logiciens affirment qu'un système formel est consistant (ou cohérent, ou non contradictoire) quand il est impossible d'y démontrer une proposition et sa négation (autrement dit, le système ne se contredit pas). Dans le

2. L'AXIOME DES PARALLÈLES EST INDÉCIDABLE

Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P , alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' , contenant P et ne rencontrant pas D .

Cette formulation de l'axiome des parallèles n'est pas exactement celle d'Euclide. Il utilisait l'énoncé équivalent : si deux droites, coupées par une sécante, forment des angles intérieurs d'un même côté dont la somme est inférieure à deux droits, ces droites se coupent.

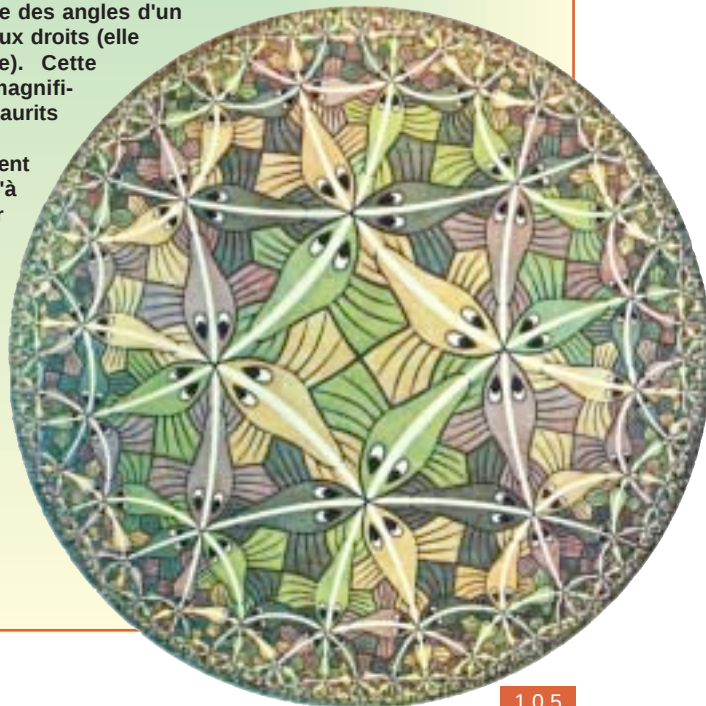
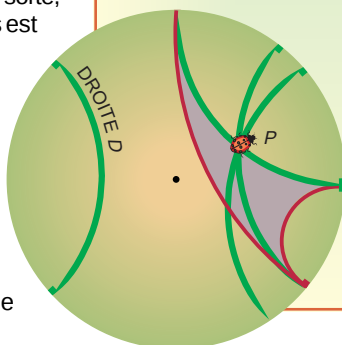
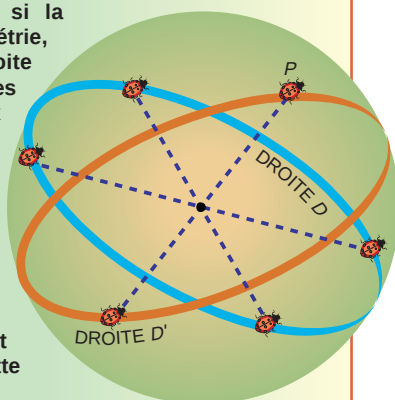
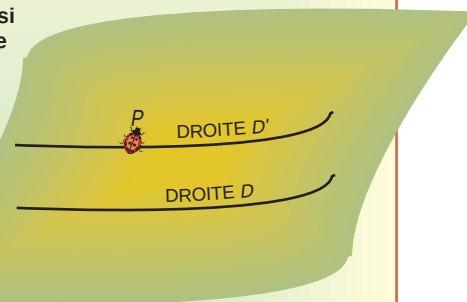
D'autres formulations équivalentes sont : si une droite D coupe une droite, elle coupe aussi toutes les droites parallèles à D (axiome de Proclus) ; la somme des angles d'un triangle vaut deux droits ; la surface d'un triangle peut être aussi grande qu'on veut. La terminologie du *cinquième postulat d'Euclide* ou *postulat des parallèles*, est trompeuse, car chez Euclide certaines définitions cachent des axiomes.

Dans la présentation moderne de l'axiomatisation de la géométrie – étudiée par David Hilbert –, il y a bien plus de cinq postulats-axiomes fondamentaux.

La première démonstration que l'axiome des parallèles est indécidable dans la géométrie absolue est due à Eugenio Beltrami en 1868. Il prouva que la géométrie elliptique (ou de Riemann) est consistante si la géométrie euclidienne l'est. Dans cette géométrie, par un point ne passe pas forcément de droite parallèle à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il appelle point un couple de points diamétralement opposés et droite un cercle sur la sphère de diamètre maximum. Avec ce vocabulaire redéfini, il constate que les axiomes de la géométrie sont vérifiés. Par exemple : par deux points (au sens nouveau) distincts passe une droite (au sens nouveau) unique. Le seul axiome qui n'est pas satisfait est celui des parallèles : une droite D étant donnée, ainsi qu'un point P à l'extérieur de cette droite, toute droite D' passant par P coupe D .

Une autre version de la démonstration de l'impossibilité de déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes est due au grand mathématicien français Henri Poincaré. On prend un disque (sans sa circonférence) et on appelle droite les arcs de cercle situés dans ce disque qui coupent orthogonalement le bord du disque. Dans cette géométrie hyperbolique (ou de Lobachevski), par un point donné passent plusieurs droites parallèles à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits (elle est éventuellement nulle). Cette géométrie a inspiré de magnifiques œuvres au graveur Maurits Escher.

Les mathématiciens utilisent aujourd'hui des dessins "à la Escher" pour visualiser les propriétés de la géométrie hyperbolique.



cadre de la logique usuelle, dès qu'un système peut démontrer P et non- P (une proposition et sa négation), alors il peut tout démontrer. C'est pourquoi l'insistance est crainte et bannie.

Le résultat de Kurt Gödel de 1931, qui universalise l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue, se décompose en deux parties. La première indique que tout système formel permettant de faire de l'arithmétique (la théorie élémentaire des nombres entiers) est soit inconsistent (donc inintéressant, puisque tout y est vrai et faux à la fois), soit incomplet (donc insatisfaisant, puisque le système laisse en suspens certains énoncés).

Autrement dit : tout système formel, à la fois assez puissant pour l'arithmétique élémentaire et consistant contient des indécidables. La seconde partie des résultats de 1931 (ou second théorème de Gödel) indique que justement l'énoncé qui affirme qu'un système est consistant est l'un des indécidables de ce système, ce que l'on traduit simplement en disant qu'un système consistant ne peut savoir qu'il l'est. Une démonstration de ce théorème due à Georges Boolos est présentée sur le site Internet de *Pour la Science*.

Insistons sur le fait que ces résultats n'indiquent pas qu'il existe des

indécidables absolus (c'est-à-dire définitivement indémonstrables dans tout système formel), mais indique que, pour chaque système formel particulier (assez puissant et consistant), il y a au moins un indécidable I .

Si vous repérez un indécidable pour un système S auquel vous ajoutez le nouvel axiome I , vous créez un système S' où I n'est plus indécidable. Fort bien, mais avez-vous par là véritablement progressé ? Hélas, guère : le théorème de Gödel s'applique alors au nouveau système S' , et donc il existe au moins un indécidable I' de S' (I' est bien sûr aussi un indécidable de S). Si vous ajoutez I' aux axiomes de S' , vous obtenez un système S'' qui contiendra un indécidable I'' , etc.

Ceux qui interprètent le phénomène de l'indécidabilité comme établissant que les mathématiques sont incomplètes se trompent : un système particulier qui n'accède pas à une certaine vérité mathématique peut toujours être complété pour y accéder.

Un piège existe, piège que nous allons détailler pour assimiler le sens du théorème de Gödel. Le mathématicien n'est jamais effrayé par l'infini et, devant les systèmes S , S' , S'' , etc., il se dit qu'il suffit d'ajouter jusqu'à l'infini les indécidables qu'on trouve et qu'on obtiendra alors un système complet.

UNE MÉTHODE DE COMPLÉTION INEFFECTIVE

Si ce mathématicien s'y prend trop naïvement, il ne réussira pas car, même après avoir ajouté I , I' , I'' , etc. jusqu'à l'infini, le système obtenu contiendra encore des indécidables (on sait le démontrer). L'impossibilité est analogue avec les tentatives d'énumération des nombres entiers : ce n'est pas parce que vous prenez une infinité d'entiers (par exemple, les entiers pairs, 2, 4, 6, 8, ...) que vous prenez tous les entiers. Similairement, ce n'est pas parce que vous ajoutez une infinité d'indécidables à S qu'il n'y en a plus.

Après un moment de réflexion, le mathématicien propose une autre idée un peu plus subtile. Il dit :

– Je numérote toutes les formules ayant un sens dans mon système $S = S_0 : f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ (une telle numérotation est possible pour des formules).

– Je les prends une à une en ajoutant comme nouveaux axiomes celles qui sont encore indécidables au moment où je les considère : à l'étape n du processus de complétion, j'arrive à un certain système S_n , je regarde f_n ; si c'est un indécidable de S_n , j'ajoute f_n à S_n pour obtenir S_{n+1} , sinon je conserve le même $S_n : S_{n+1} = S_n$.

3. UN EXEMPLE DE SYSTÈME FORMEL

Dans un système formel (ou système de démonstrations), on détaille successivement ce que sont les formules, les axiomes, les règles d'inférence. Examinons un exemple de système formel, dont la signification sera donnée par la suite.

Formules : des bâtons | suivis du symbole $\oplus$, puis à nouveau des bâtons, puis le symbole $=$, puis encore des bâtons, ou la même chose précédée de un ou plusieurs NON.

Exemples : $||||| \oplus ||||| = |||||$; NON $||||| \oplus ||||| = |||||$

Axiomes : Toutes les formules sans NON où le nombre de bâtons des trois paquets est le même.

Exemple : $||||| \oplus ||||| = |||||$

Règles d'inférence :

– **règle A** : on permute les deux paquets devant le $=$.

Exemple : de $||||| \oplus ||||| = |||||$, on déduit $||||| = ||||| \oplus |||||$

– **règle B** : on ajoute au paquet entre $\oplus$ et $=$ le nombre de bâtons qu'il y a dans le paquet à gauche de $\oplus$.

Exemple : de $||||| \oplus ||||| = |||||$, on déduit $||||| \oplus ||||| = |||||$

– **règle C** : on ajoute ou on soustrait au moins un des bâtons du paquet derrière $=$ et on fait précéder le tout de NON.

Exemple : de $||||| \oplus ||||| = |||||$, on déduit : NON $||||| \oplus ||||| = |||||$

– **règle D** : on ajoute deux fois NON devant une formule déjà obtenue.

Exemple : de $||||| \oplus ||||| = |||||$, on déduit : NON NON $||||| \oplus ||||| = |||||$

Une déduction (ou démonstration) dans le système $\oplus$ est une suite de formules telle que chacune est soit un axiome, soit provient de l'utilisation d'une des règles A, B, C ou D sur des formules précédemment déduites.

Les axiomes et les règles d'inférence doivent être suffisamment simples pour que la vérification qu'une suite de formules est une déduction correcte puisse se faire mécaniquement (c'est-à-dire par algorithme).

Exemple de déduction dans le système $\oplus$:

$| \oplus | = |$ (c'est un axiome)

$| \oplus | = |$ (règle B appliquée à la formule précédente).

$|| \oplus | = |$ (règle A appliquée à la formule précédente)

$|| \oplus || = |$ (règle B appliquée à la formule précédente)

$|| \oplus |||| = |$ (règle B appliquée à la formule précédente)

NON $|| \oplus |||| = ||$ (règle C appliquée à la formule précédente)

Interprétation du système formel $\oplus$

Ce système formel permet de démontrer (i) toutes les propriétés vraies concernant le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers du type : le pgcd de 6 et 4 est 2 (ce qui, avec nos notations, s'écrit $||||| \oplus |||| = ||$) ;

(ii) toutes les formules de ce type précédées d'un nombre quelconque de NON.

Le fait que nous ayons réussi à établir $|| \oplus |||| = |$ signifie en particulier que le pgcd de 2 et 5 est 1, autrement dit que 2 et 5 sont premiers entre eux. Ayant établi que NON $|| \oplus |||| = ||$, nous avons démontré que le pgcd de 2 et 5 n'est pas 2.

Les propriétés de ce système sont :

– correction vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on démontre en suivant le système est juste ;

– adéquation vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on peut formuler avec les formules du système et qui est vrai est démontrable ;

– consistance (résulte de l'adéquation) : jamais on ne prouve une formule et son contraire (la même formule précédée de NON) ;

– complétude : pour toute formule F du système, on peut démontrer F ou NON-F.

Ce système capte complètement le domaine mathématique visé, et son étude peut être menée entièrement (c'est rarement le cas). Il ne contient pas d'indécidables, mais, si on omettait un seul axiome (par exemple $| \oplus | = ||$), certains énoncés vrais (exemple : $|||| \oplus ||||| = ||$) deviendraient indécidables. Le système modifié serait alors incomplet.

– À l'infini, je dispose d'un système S_{infini} qui possède peut-être une infinité d'axiomes, mais qui est complet.

Ce système semble contredire le théorème de Gödel. Où est la faille de ce raisonnement?

Il est bien vrai qu'il n'y a plus d'indécidable pour S_{infini} : par construction, il ne peut y en avoir. Si au départ S était consistant, S_{infini} l'est aussi. En revanche, et c'est ce qui ne va pas, le prétendu système S_{infini} n'en est pas vraiment un, car il n'existe aucun moyen algorithmique de savoir si une formule donnée est un axiome ou n'en est pas un. Or pour qu'un système formel soit envisageable en mathématiques, il faut bien sûr qu'on sache en reconnaître les axiomes (on dit que le système doit être effectif). La prétendue méthode pour passer de S_n à S_{n+1} aboutit à une abstraction mathématique qui n'est pas utilisable comme système formel.

L'énoncé du premier théorème de Gödel en faisant apparaître cette précision (qu'on omet souvent pour simplifier l'exposé ou parce qu'on sous-entend le mot effectif dans la définition de système formel) est donc : tout système formel effectif permettant de faire de l'arithmétique est soit incomplet, soit inconsistent.

COMPLÉTUDE DE LA LOGIQUE

Mettons en parallèle le résultat d'incomplétude de Gödel avec un autre résultat de Gödel, de deux ans plus ancien et qui, lui, est positif. Il s'agit de la complétude de la logique. Ce résultat intéresse moins les philosophes, alors que pourtant c'est la comparaison des résultats de complétude et d'incomplétude qui contient les enseignements les plus précieux, et fait entrevoir les mystères les plus profonds sur la nature des mathématiques.

Au lieu de s'intéresser à ce qui est vrai des nombres entiers, on cherche à savoir ce qui est vrai sur le plan de la logique pure. On se pose des questions comme :

- est-il vrai que si $\{a \text{ implique } b\}$ alors $\{non-b \text{ implique } non-a\}$?
- est-il vrai que si $\{pour \text{ tout } x, y : P(x,y)\}$ alors $\{pour \text{ tout } z : P(z,z)\}$?
- est-il vrai que si $\{pour \text{ tout } x, \text{ il existe } y \text{ tel que } : Q(x,y)\}$ alors $\{il \text{ existe } y \text{ tel que pour tout } x : Q(x,y)\}$?

(Réponses : oui, oui, non)

Nous cherchons ici un système formel pour ce que nous dénommons le calcul des prédicats du premier ordre qui est la logique générale où tout raisonnement mathématique peut s'exprimer.

Le résultat de Gödel de 1929 répond à cette question : il existe des systèmes formels qui démontrent toutes les formules justes du calcul des prédicats du premier

4. HERCULE CONTRE L'HYDRE

Une hydre possède une multitude de têtes reliées à son corps et organisées selon un réseau de cous reliés par des nœuds, le tout formant un arbre. Hercule doit tuer l'hydre en coupant toutes les têtes.



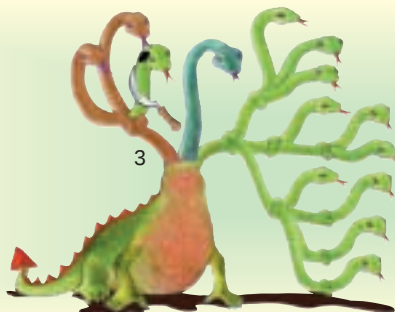
PREMIÈRE COUPURE

En brun, la partie excitée de l'hydre. La partie excitée est dupliquée.



DEUXIÈME COUPURE

En brun, la partie excitée par la deuxième coupure. La partie excitée est ajoutée deux fois.



TROISIÈME COUPURE

En brun, la partie excitée par la troisième coupure. La partie excitée est ajoutée trois fois. S'il coupe la tête bleue reliée directement au corps de l'hydre, elle ne repousse pas.



Coupera-t-on toutes les têtes de l'hydre? Cette affirmation, démontrable avec des théories puissantes, est un indécidable de l'arithmétique.

Hercule doit tuer l'hydre en ne coupant qu'une tête à la fois et en tranchant la dernière partie du cou située avant la tête coupée. Lorsqu'il coupe une tête et un cou, une multitude de nouveaux cous et têtes apparaissent : lorsqu'il vient de couper la n -ième tête et son cou, le cou en dessous de la partie qu'il vient de couper et tout l'ensemble des nœuds, cous et têtes au-dessus de ce nœud ("le bout excité de l'hydre") se reproduit en n exemplaires qui poussent à côté du bout excité. Toutefois, lorsque Hercule coupe un cou directement lié au corps de l'hydre, les têtes ne repoussent plus.

Hercule peut-il vaincre l'hydre en éliminant toutes les têtes? L'opération de coupe augmente beaucoup le nombre des têtes, mais diminue aussi le nombre de têtes associées à un cou relié au corps. Aussi espère-t-on arriver au moment où toutes les têtes sont directement liées au corps et où l'on peut les couper sans déclencher de reproduction. On démontre, avec des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano, que Hercule, avec n'importe quelle stratégie de choix de tête à couper, vient à bout de l'hydre en un temps fini, mais aussi que ce résultat est un indécidable de l'arithmétique de Peano.