

4. LES CELLULASES éliminent les «peluches», sur les vêtements. À mesure que les tissus s'usent (a à c), les fibres de surface se détachent et s'effritent ; «digérées» par les enzymes, elles se détachent et sont éliminées au lavage (d).

pas présentes sous forme active dans le produit fini.

Les différentes enzymes utilisées dans l'industrie des détergents sont les protéases, qui éliminent les taches dues aux protéines, par exemple les taches d'œuf ; les lipases, qui enlèvent les taches d'huile ; les amylases qui dégradent les substances amylacées (pommes de terre, pâtes), et les cellulases. Ces dernières assurent un biopolissage qui améliore la qualité du coton et des autres fibres naturelles cellulosiques. Elles donnent un aspect lisse et lustré aux tissus. En effet, à l'usage, les fibres de surface des vêtements deviennent cassantes et forment de petites pilosités, qui donnent un aspect pelucheux. Les cellulases (qui, nous l'avons indiqué, hydrolysent les extrémités des fibres cellulosiques) utilisées dans les détergents éliminent les microfibrilles de surface, assouplissent les tissus et avivent les couleurs (en éliminant les fibrilles endommagées et décolorées).

L'utilisation des enzymes dans les détergents pose de nombreuses difficultés techniques. Elles doivent résister à de notables variations de l'acidité du milieu, à des concentrations ioniques variables et aux divers additifs, notamment les substances tensioactives qui évitent aux salissures de se redéposer sur le tissu propre. Les lessives domestiques liquides posent des difficultés supplémentaires, car les enzymes y sont moins stables que dans les lessives en poudre : en milieu liquide, elles risquent de perdre partiellement leur stabilité et, par conséquent, leur activité, tandis que dans les lessives en poudre, elles ne deviennent actives qu'au moment de la dissolution de la poudre.

Ainsi, depuis mai 1997, la Société Genencor International commercialise Puradax HA, un nouvel additif pour les détergents, dont le composé principal est une cellulase extraite d'un extrêmophile : elle a une forte activité catalytique lors du nettoyage des vête-

ments à un pH supérieur ou égal à 10. Cette cellulase provient de lagons alcalins situés au milieu des montagnes, dans un pays dont les découvreurs taisent le nom.

L'intérêt des catalases

Sous la pression de l'opinion publique qui réclame une industrie textile moins polluante, les industriels essaient de substituer les agents de blanchiment à base de chlore par le peroxyde d'hydrogène (l'eau oxygénée). Après l'opération de blanchiment, l'excès de peroxyde d'hydrogène est éliminé des bains et des effluents grâce à des catalases, des enzymes qui dégradent ce composé en eau et en oxygène. De surcroît, comme elles libèrent de l'eau, les catalases réduisent les besoins en eau dans les étapes ultérieures (de teinture, par exemple). Les enzymes utilisées dans ce procédé doivent être stables à des températures élevées et en milieu basique, et résister au peroxyde d'hydrogène, très réactif.

Ainsi, les extrêmophiles, capables de résister à des conditions physico-chimiques extrêmes, constituent une nouvelle source de molécules intéressantes pour l'industrie. Aujourd'hui, seules quelques unes sont utilisées dans des procédés industriels, dans le secteur de la biologie moléculaire, dans celui de la papeterie ou dans celui des détergents. Lorsque des enzymes naturelles sont utilisées dans des applications industrielles, comme catalyseurs pour des synthèses chimiques ou comme additifs dans des détergents, elles ne sont pas toujours très bien adaptées à leur tâche, car les substrats ne sont pas assez solubles, ou que les produits sont instables, ou encore en raison de réactions chimiques «parasites» qui entrent en compétition avec la réaction principale.

Ainsi, les enzymes qui interviennent dans certaines voies biochi-

miques sont souvent inhibées par leurs propres substrats ou par les produits réactionnels, ces derniers agissant alors en limitant le rendement du procédé biocatalytique. Au contraire, les biotechnologies nécessitent des enzymes qui sont stables et actives sur de longues périodes et dans un environnement contraignant (solvant organique, par exemple). Les enzymes disponibles ne présentent généralement pas toutes les caractéristiques nécessaires à une application industrielle particulière et doivent être modifiées.

Malheureusement, on ignore, la plupart du temps, les relations entre la séquence protéique d'une enzyme, sa structure et sa fonction, condition pourtant indispensable à la modélisation rationnelle d'une protéine. En revanche, les techniques moléculaires permettent aux biologistes de réaliser des mutations dirigées *in vitro* sur des gènes clonés et de sélectionner ainsi les gènes et les molécules qu'ils codent, qui ont les caractéristiques recherchées. En continuant l'exploration de l'immense réservoir d'activité enzymatique enfoui au fond des océans et en utilisant les techniques d'ingénierie des protéines pour ajuster les propriétés des enzymes aux exigences industrielles, on disposera, dans quelques années, de catalyseurs enzymatiques qui faciliteront les réactions déjà connues et qui autoriseront des réactions nouvelles, qui restent à découvrir.

Yannick GUEGUEN, biochimiste, mène ses recherches dans le Laboratoire de biotechnologie des micro-organismes hydrothermaux, de l'IFREMER, à Brest, que dirige Jacques DIETRICH.

C. R. WOESE et al., *Towards a natural system of organisms : proposal for the domain Archaea, Bacteria and Eucarya*, in *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, vol. 87, pp. 4576-4579, 1990.

J. GUEZENNEC et J. DIETRICH, *Les micro-organismes extrêmophiles*, in *La science au présent : 2000*, coll. Biotechnologies, Éditions Encyclopedia Universalis, 1999.



AKG Paris

Promenade au pays des indécidables

JEAN-PAUL DELAHAYE

Débat difficile entre logiciens et mathématiciens à propos de l'importance à accorder aux indécidables.

L'universalité de l'incomplétude, c'est-à-dire l'existence dans chaque système mathématique de propositions indécidables, dont les axiomes du système ne permettent de prouver ni la vérité ni la fausseté, est inquiétante. Depuis que ce résultat a été établi par Kurt Gödel en 1931, il a donné lieu à une multitude de commentaires (voir l'article de cette rubrique de novembre 1999). Sans contester l'exactitude mathématique du résultat de Gödel, les mathématiciens y opposent une sorte de résistance passive : ils tentent de se persuader que, malgré son universalité, l'incomplétude est un phénomène marginal. Nous verrons que le débat n'est pas simple à trancher, pour des raisons profondes qui forcent à reconsidérer la nature intime des mathématiques et de son rapport avec ses applications.

La contradiction, presque un paradoxe, apparaît grande entre les logiciens qui ont, depuis 1931, construit un grand nombre d'indécidables, et les mathématiciens qui remarquent qu'aucun résultat central des mathématiques classiques, concernant par exemple l'arithmétique élémentaire, n'a été prouvé indécidable.

Le mathématicien bourbakiste Jean Dieudonné écrivait : « 95 pour cent des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes. » La vérité est-elle du côté des cinq pour cent restants ?

LES INDÉCIDABLES S'OBTIENNENT MÉCANIQUEMENT

La démonstration de K. Gödel de 1931 non seulement indique qu'il existe des indécidables pour tout système formel S consistant (c'est-à-dire non contradictoire), mais donne un moyen mécanique pour construire explicitement un indécidable I_S à partir de la description de tout système S . Grossièrement dit, cette formule est une transposition élaborée de la formule *Je*

mens exprimée dans le langage de tous les jours. La méthode consiste à détailler, dans une formule de S , la description du fonctionnement de S , puis, grâce à cette description, à fabriquer une formule qui exprime *Je ne suis pas prouvable dans S* ; cette formule est indécidable dans S .

Le procédé permettant, à partir d'un système consistant S , d'obtenir l'indécidable I_S est mécanique, et donc un ordinateur peut l'élaborer.

Notons que ce point retire toute valeur aux considérations qui prétendent tirer du théorème de Gödel un argument montrant l'impossibilité logique de simuler un être humain par une machine. Cela ne signifie pas que cette simulation est possible, mais seulement que le théorème de Gödel n'apprend rien à son sujet : si l'intelligence artificielle peut exister, elle le prouvera par ses réalisations, comme celle évoquée dans cette rubrique au mois de septembre, où l'on décrivait un système informatique qui battait les humains en exploitant leur incapacité à simuler le hasard.

La construction de Gödel étant générale, c'est donc chaque système formel (assez puissant pour faire de l'arithmétique) qui est concerné. Tous les mathématiciens devraient donc se sentir menacés, y compris Nicolas Bourbaki, le mathématicien polycéphale qui, depuis plus de 50 ans, développe un traité de mathématiques qui est le plus complet jamais écrit. Toute la théorie de Bourbaki se développe dans le système formel de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, sujette, bien sûr, à l'incomplétude. Pour suivre plus commodément l'exposé, nous caricaturerons en disant que Zermelo-Fraenkel comprend les axiomes de l'arithmétique de Peano, plus les axiomes traitant de l'infini.

Le fait que, pour tout système S consistant, l'affirmation exprimée dans S de cette consistance est un indécidable de S confirme à l'évidence que les indécidables doivent inquiéter tous les mathématiciens. En particulier, lorsqu'ils tentent de démontrer une conjecture difficile en utilisant

les moyens de la théorie de Zermelo-Fraenkel, dont ils ne sortent jamais en pratique, les mathématiciens devraient se poser la question : ne sommes-nous pas en présence d'un indécidable de Zermelo-Fraenkel, et ne sommes-nous donc pas en train de perdre notre temps à vouloir prouver ce qui, avec les méthodes de Zermelo-Fraenkel, est improuvable ?

VOS INDÉCIDABLES SONT INCOMPRÉHENSIBLES

Les mathématiciens ne sont pas inquiets : une de leurs premières réponses aux logiciens consiste à dire que les énoncés indécidables construits par Gödel ne sont justement pas écrits explicitement. Gödel décrit les méthodes qu'il faut utiliser pour construire les indécidables, mais n'explique jamais toutes les étapes de ce qu'on appelle le codage de I_S qui conduirait à mettre noir sur blanc la formule indécidable, sans raccourcis de notation ni abréviations typographiques. Jamais par exemple personne n'a vu écrit dans le formalisme utilisé par Bourbaki l'indécidable que la méthode de Gödel prétend tirer du système de Zermelo-Fraenkel utilisé par Bourbaki.

Les mathématiciens font remarquer que, si l'on menait le travail jusqu'au bout (en s'aidant de programmes, c'est concevable), on tomberait sur des propositions tellement compliquées qu'aucun mathématicien ne serait en mesure d'en percevoir le sens. Le fait est patent : sans les logiciens, personne n'aurait jamais tenté de démontrer les formules dont les logiciens disent qu'elles sont indécidables. N'étant jamais aussi complexes, il est donc possible que les énigmes sur lesquelles les mathématiciens travaillent ne soient jamais des indécidables.

Les mathématiciens marquent un point : ce que les théorèmes de Gödel leur disent être indécidable n'est pas donné explicitement par Gödel et ne correspond pas aux préoccupations authentiques des mathématiciens. Les mathématiciens

peuvent espérer ne jamais rencontrer les monstruosité dont Gödel dit qu'elles les menacent. Toutefois, les développements de la théorie du calcul par K. Gödel, A. Turing, E. Post et S. Kleene, à partir des années 1930 et qui se poursuivent aujourd'hui, donnent de nouveaux arguments aux logiciens.

LA THÉORIE DU CALCUL RÉPAND L'INDÉCIDABILITÉ

En tentant de généraliser le théorème de Gödel, et peut-être parce que ces problèmes étaient dans l'air des années 1930 (on commençait à s'intéresser aux calculateurs qui deviendront les ordinateurs), les logiciens proposèrent une théorie du calcul ; celle-ci allait fournir quelques munitions pour ébranler les mathématiciens.

La théorie du calcul consiste à détailler mathématiquement ce qu'est un algorithme. Pour ce faire, plusieurs voies sont possibles, dont celle, très élégante, que proposa A. Turing : elle consiste à définir une machine à calcul prototypique d'une simplicité parfaite (appelée aujourd'hui machine de Turing), dont le pouvoir théorique de calcul est aussi grand que le plus puissant des ordinateurs passés ou à venir. Cette théorie précise ce qu'est un système formel et fait, grâce à cela, émerger deux grands progrès.

D'une part, on peut formuler des versions générales des théorèmes d'incomplétude de Gödel. L'article de 1931 de Gödel ne concernait que le système formel des *Principia* de B. Russell et A. Whitehead, et quelques systèmes apparentés. La portée des méthodes qu'il utilisait était à identifier, ce que fit la théorie du calcul en précisant ce qu'est un mécanisme de preuve dans un système formel.

D'autre part, la théorie du calcul conduisit à formuler dans chaque système formel une multitude de propositions indécidables ayant un sens proche des préoccupations des mathématiciens, et certainement plus troublantes pour un mathématicien que les énoncés proposés initialement par Gödel.

BOURBAKI CONCERNÉ ?

Donnons quelques exemples d'indécidables parmi les centaines provenant de cette théorie du calcul. Nous nous fixons un système formel S (par exemple, celui de la théorie des ensembles que Bourbaki utilise, mais ce pourrait être celui de l'arithmétique de Peano, ou un autre encore) dont nous supposons qu'il est consistant (lorsque S est inconsistant, tout est vrai et faux à la fois, et donc rien d'intéressant ne se produit dans S).

1. EXEMPLE D'ALGÈBRE INDÉCIDABLE

En algèbre, on utilise des structures (qu'on appelle des semis-groupes) qui sont définis par la donnée de symboles, ici trois, a , b et c , et par des lois qui sont des égalités, ici également au nombre de trois : (1) $ab = bc$, (2) $b = ccc$, (3) $bb = b$. Ce sont les tables de la loi.

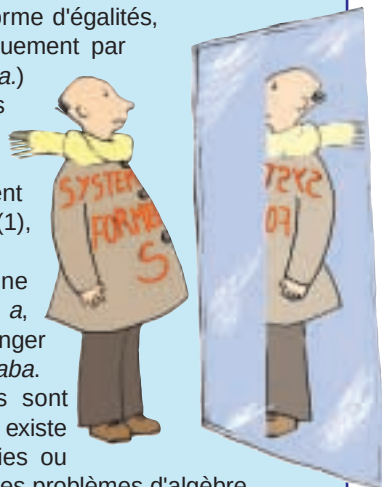
Quelles sont les autres lois, exprimées sous forme d'égalités, que nous pouvons obtenir en procédant uniquement par substitution ? (Attention, ab n'est pas égale à ba .)

Peut-on, par exemple, en utilisant les égalités ci-dessus et aucune autre arriver à la nouvelle égalité : $aaab = b$?

La réponse est oui : en utilisant successivement les égalités 1, 2 et 3, on obtient, en partant de (1), $aaab = aabc = abcc = bccc = bb = b$.

On démontre, avec ces égalités, que l'on ne trouvera jamais $aba = a$. En effet, partant de a , aucune des trois équations ne permet de changer quoi que ce soit, et l'on ne parviendra jamais à aba .

Ainsi, on démontre que certaines équations sont vraies et que d'autres sont fausses, mais il en existe dont on ne peut démontrer qu'elles sont vraies ou fausses : aussi élémentaires qu'ils paraissent, ces problèmes d'algèbre engendrent l'indécidabilité. Pour tout système formel donné, il existe un ensemble fini E_S d'équations et une équation e_S telle que E_S ne permet pas de déduire e_S . Pourtant, les lois régissant S ne permettent pas de démontrer la proposition " E_S ne permet pas de déduire e_S ".



2. L'INDÉCIDABILITÉ AVEC DES JEUX

On appelle jeu diophantien un jeu du type suivant : une équation est fixée, par exemple : $7(b_1 + a_2) + 3 + a_1 + a_3 = (b_2 + 2)(b_3 + 2) + a_1 + a_3$.

Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_1 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_1 .
Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_2 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_2 .
Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_3 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_3 .
La partie est alors terminée.

Si l'équation est vérifiée, B a gagné ; si elle ne l'est pas, A a gagné.

En analysant le jeu correspondant à l'équation indiquée, on voit que A gagnera toujours. Justification. Le premier choix de A est sans importance, car a_1 se simplifie. Le joueur B propose ensuite un nombre b_1 . Le joueur A doit choisir alors un nombre a_2 tel que $7(b_1 + a_2) + 3$ soit un nombre premier. C'est toujours possible, puisqu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $7n + 3$. À partir de là, B ne pourra plus s'arranger pour que l'égalité soit vérifiée, car si l'égalité était vérifiée, après simplification de a_1 et a_3 elle donnerait une décomposition de $7(b_1 + a_2) + 3$ en deux facteurs >1 , ce qui est impossible puisque $7(b_1 + a_2) + 3$ est premier. Le joueur A a donc gagné.

À chaque équation correspond un jeu. Dans un tel jeu à information complète, on sait qu'il existe pour chaque équation une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs : soit A possède la possibilité de toujours gagner, soit c'est B. Bien que le nombre d'échanges soit fini et connu à l'avance, ces jeux diophantiens sont difficiles à analyser. En fait, d'après un résultat d'indécidabilité de Matiassevitch, aucune méthode générale ne permet de mener l'analyse de tous ces jeux : à chaque système formel S correspond au moins un jeu diophantien dont l'analyse est infaisable dans S . Précisément : à chaque système formel S , on peut associer une équation gagnante pour B, et un premier coup pour le joueur A tel que la formule indiquant ce que B doit jouer en réponse à ce premier coup est une proposition indécidable de S .

