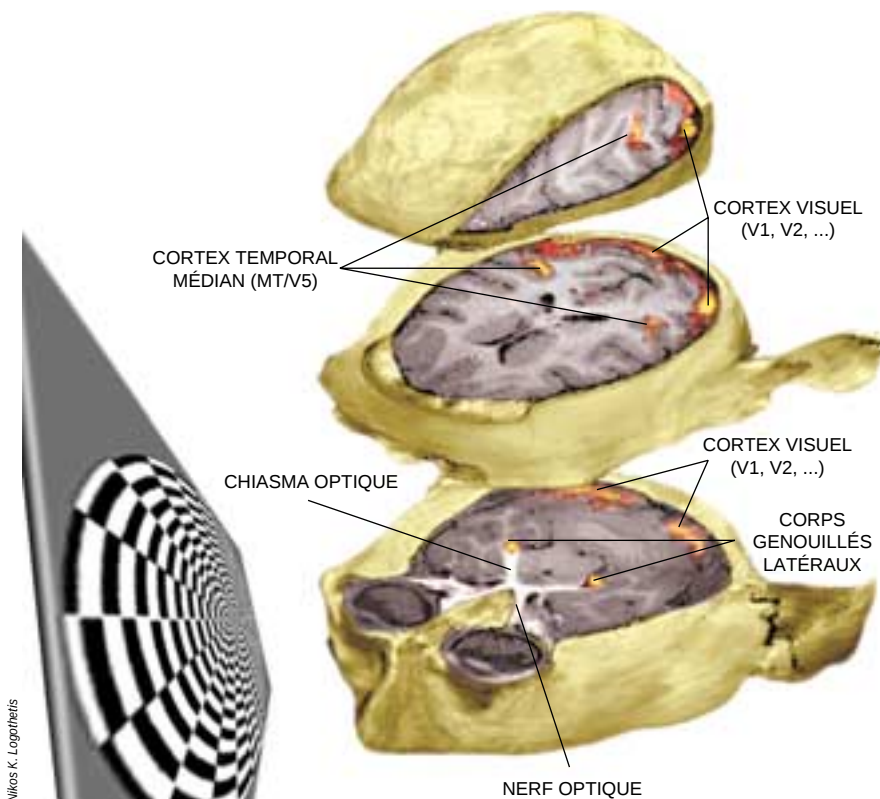




Nikos K. Logothetis

4. L'ACTIVITÉ DU CERVEAU d'un singe a été étudiée par des techniques d'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle, alors que l'animal, anesthésié, était confronté à un stimulus visuel très contrasté, en rotation (en bas à gauche). Certaines aires de traitement visuel (dont les corps genouillés latéraux, le cortex visuel primaire et le cortex temporal médian) sont actives, bien que le singe soit inconscient.

encore été localisés. D'autres aires corticales, qui ne font pas partie du chemin qu'emprunte l'information visuelle, sont peut-être aussi responsables de la perception. Erik Lumer et ses collègues du Collège universitaire de Londres ont étudié cette possibilité par IRMF : chez l'être humain comme chez le singe, la perception consciente d'un stimulus active le lobe temporal du cerveau. Le changement de perception active les aires corticales pariétales et préfrontales, au moment précis où il a lieu.

Quels sont les neurones responsables de la prise de conscience? Les expériences déjà réalisées montrent que la conscience visuelle ne dépendrait pas seulement des étapes successives de traitement de l'information initiale, mais aussi de l'activité de toutes les aires corticales, pariétales et préfrontales, qui participent aux processus cognitifs supérieurs. Au début du système visuel, la perception résulte de l'activité d'une minorité de neurones dans V1 et V2 ; seule la proportion de neurones actifs augmente dans les centres supérieurs.

Aujourd'hui, on ignore si l'activité des neurones des premières aires corticales sur le chemin de l'infor-

mation visuelle est déterminée par des connexions avec d'autres neurones des mêmes aires ou par des connexions rétroactives émanant des lobes temporaux et pariétaux. L'information visuelle chemine entre les niveaux supérieurs et les niveaux inférieurs dans les deux sens. Or des systèmes avec de telles rétroactions présentent souvent une dynamique complexe, évoluant vers plusieurs états stables. Ces divers états stables pourraient correspondre à différents états de conscience visuelle.

La perception des animaux est-elle réellement déterminée par l'activité du type de neurones que nous avons considéré dans ces études? Ces neurones sont peut-être sous le contrôle d'une autre région du cerveau, qui détermine la prise de conscience. Les expériences de William Newsome et de ses collègues, à l'Université de Stanford, répondent à la question : dans l'aire MT/V5, au moins l'activité neuronale détermine directement ce qu'un singe perçoit. W. Newsome a d'abord identifié les neurones sensibles à un stimulus qui se déplace dans une certaine direction, puis il les a activés à l'aide de faibles courants

électriques : les singes indiquaient qu'ils percevaient le mouvement correspondant à l'activation artificielle même lorsque le stimulus se déplaçait dans l'autre sens.

Les neurones d'autres aires corticales, par exemple du cortex temporal inférieur ou des niveaux inférieurs, participent-ils à l'élaboration de la conscience? Leur stimulation ou leur inactivation temporaire devraient alors changer la perception des singes en situation de rivalité binoculaire. La compréhension de la conscience visuelle passe par la prise en compte de ce qu'on sait des autres processus cognitifs, telle l'attention ou tels certains types de mémoire à court terme. D'après les expériences de Robert Desimone et de ses collègues de l'Institut américain de psychiatrie, les interactions compétitives de la rivalité binoculaire ressemblent beaucoup aux processus impliqués dans l'attention. Nos collègues ont entraîné des singes à indiquer leur perception quand ils voyaient des objets qu'on leur avait annoncés. Là encore, la réaction de nombreux neurones dépend du stimulus que le singe s'attend à voir, ou de l'endroit où il s'attend à le voir. On gagnerait à savoir si ces neurones sont les mêmes que ceux dont l'activité reflète la perception, en situation de rivalité binoculaire.

La conscience visuelle ne dépendrait donc pas seulement des étapes de traitement de l'information, mais aussi de l'expérience acquise par chaque singe (ou chaque personne). Les neurosciences ont encore un long chemin à parcourir pour découvrir les circuits neuronaux qui en sont responsables. L'identification des neurones qui jouent un rôle dans la conscience est déjà un bon début.

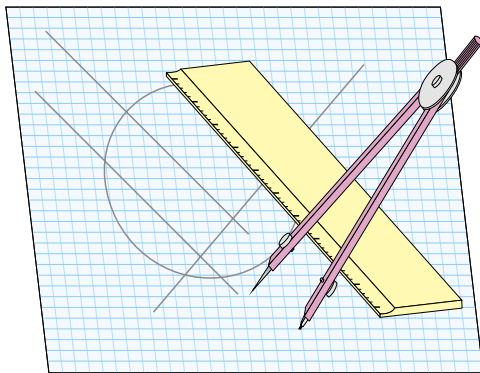
Nikos LOGOTHETIS est directeur de la division de physiologie cognitive à l'Institut Max Planck de cybernétique, en Allemagne.

Semir ZEKI, *A Vision of the Brain*, Blackwell Scientific Publications, 1993.

Francis CRICK, *The Astonishing Hypothesis : The Scientific Search for the Soul*, Scribner's, 1994.

David H. HUBEL, *L'œil, le cerveau et la vision*, in *Pour la Science*, Collection l'Univers des sciences, 1994.

A. David MILNER et Melvyn A. Goodale, *The Visual Brain in Action*, Oxford University Press, 1996.



Les théorèmes de l'impossible

IAN STEWART

À l'impossible nul n'est tenu... surtout en mathématiques.

Dans le langage quotidien, quand on déclare une chose impossible, c'est souvent que l'on n'y croit pas. Combien d'hommes ont jugé impossible une machine volante plus lourde que l'air ou un engin flottant plus lourd que l'eau, avant que l'ingéniosité de quelques inventeurs ne les contredise ? Le génie humain surmonte fréquemment d'apparentes impossibilités.

Cependant, en mathématiques, où les mots ont un sens plus strict, l'impossibilité est souvent définitive et démontrable. Par exemple, aucune puissance entière de 2 n'est égale à 3. Pour le prouver, remarquons simplement que $2^1 = 2$ est trop petit et que 2^k est toujours supérieur à 3 quand k est supérieur à 1. Ce résultat, valable pour l'ensemble des entiers naturels, peut devenir faux lorsqu'on change les règles. Ainsi, dans l'ensemble des entiers «modulo 5», où tout entier usuel est remplacé par le reste de sa division par 5 (à 2 correspond 2, à 5 correspond 0, à 7 correspond 2, à 11 correspond 1...), $2^3 = 3$. La démonstration précédente n'est pas fausse, mais des précisions sont indispensables, telle la définition claire des objets mathématiques utilisés.

Les démonstrations d'impossibilités mathématiques sont parfois frustrantes. Par exemple, imaginez que vous ayez calculé pendant dix ans, noircis-

sant des cahiers entiers, et que vous soyez convaincu d'avoir trouvé un nouveau nombre premier de plusieurs milliers de chiffres ; mieux encore, ce nombre premier est pair ! Excité par cette découverte extraordinaire, vous envoyez votre travail à un mathématicien... qui vous le réexpédie aussitôt en le déclarant fautif. Pis encore : lorsque vous lui demandez où se trouve l'erreur, il vous répond qu'il n'a pas lu votre étude et qu'il n'en sait donc rien. Et il ose répéter qu'il y a une faute ?

Voilà le nœud de l'incompréhension : ce qui passe pour de l'arrogance n'est en fait que de la logique : le seul et unique nombre premier pair est deux.

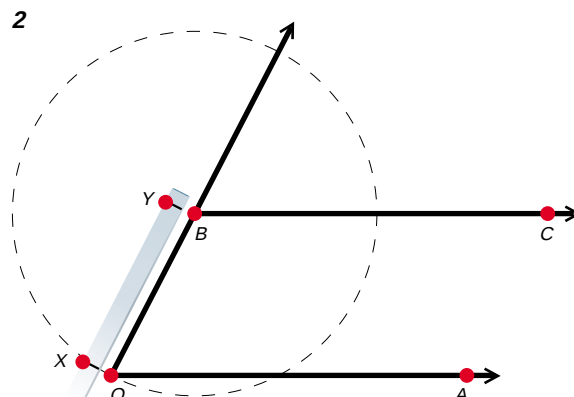
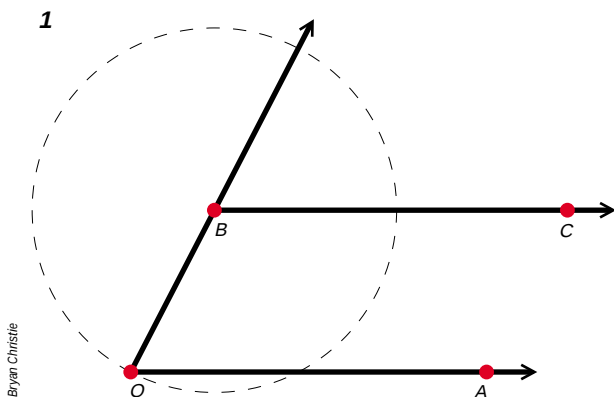
Un des théorèmes d'impossibilité les plus importants a été découvert au début du XIX^e siècle, indépendamment, par les mathématiciens norvégien, Niels Abel (1802-1829), et français, Évariste Galois (1811-1832). Par des méthodes différentes, ils ont montré que, le plus souvent, les solutions d'équations algébriques du cinquième degré ne peuvent s'écrire avec seulement les quatre opérations arithmétiques et des radicaux (les racines carrées, cubiques, etc.). Les mathéma-

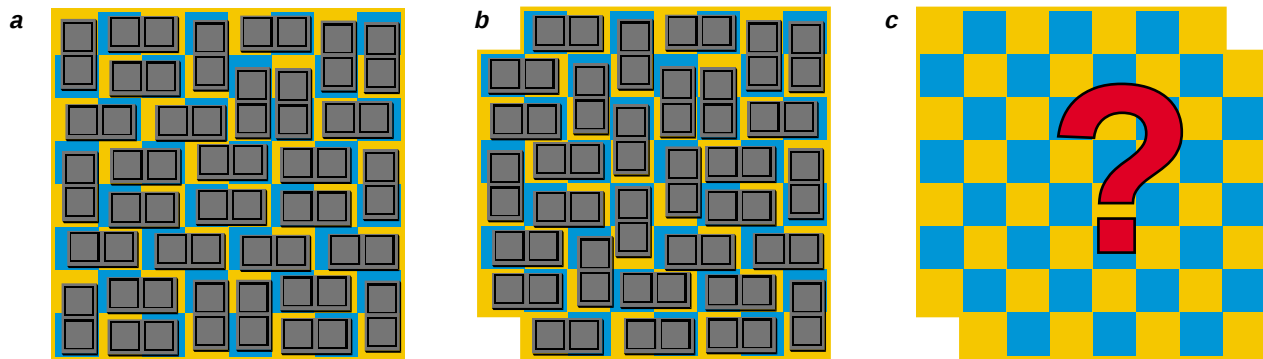
ticiens avaient découvert des formules utilisant seulement les quatre opérations et les radicaux pour exprimer les solutions des équations algébriques de degré inférieur à cinq, mais leurs tentatives avec le degré cinq restaient infructueuses. Abel et Galois ont mis fin à ces recherches.

Comment de telles démonstrations sont-elles possibles ? Considérons un échiquier à 64 cases. Avec 32 dominos dont la surface couvre exactement deux cases de l'échiquier, le nombre de pavages de l'échiquier est considérable (voir la figure 2). Lorsque vous excluez deux coins adjacents de l'échiquier, le pavage reste possible (avec 31 dominos et sans difficultés). En revanche, quand vous supprimez deux coins opposés, toutes vos tentatives échouent.

Les échecs répétés ne sont pas une preuve d'impossibilité, car une vie entière à tester des pavages ne suffirait pas à examiner toutes les possibilités. Alors, le pavage est-il possible ? Non ; en voici une preuve : un domino recouvre une case blanche et une case noire ; donc, un pavage recouvre ou laisse découvertes autant de cases noires que de

1. La trisection d'un angle, tel AOB, est possible avec un compas et une règle graduée. Tracez d'abord le cercle centré en B et passant par O, puis la demi-droite BC parallèle à OA (1). Sur la règle, repérez ensuite les points X et Y, tel que $XY = OB$ (2). Enfin, placez la règle afin qu'elle passe par O, et amenez le point X sur le cercle et le point Y sur la demi-droite BC (3). L'angle AOY est le tiers de l'angle AOB initial.





2. Les pavages par des dominos d'un échiquier 8×8 (a) et du même échiquier privé de deux coins adjacents (b) sont possibles. Lorsque deux coins opposés sont ôtés (c), le pavage est-il encore possible ?

cases blanches. Un échiquier complet a 32 cases blanches et 32 cases noires. Or, l'élimination de deux coins adjacents laisse 31 cases de chaque couleur, tandis que l'exclusion de deux coins opposés (de la même couleur) rompt l'égalité. Dans ce second cas, le pavage est donc impossible.

Cette démonstration a un point commun avec celle de Galois sur l'impossibilité de résolution de l'équation du cinquième degré par radicaux : elle utilise un invariant, c'est-à-dire une propriété des éventuelles solutions que l'on peut utiliser sans connaître la forme exacte de ces solutions. Pour les dominos, l'invariant est la différence entre le nombre de cases noires recouvertes et celui de cases blanches. Cet invariant doit être nul pour qu'un pavage soit possible. Inutile de chercher une solution lorsque les nombres de cases noires et de cases blanches sont différents.

Pour l'équation du cinquième degré, l'invariant est une structure algébrique complexe, fondée sur les symétries des racines de l'équation. Cette structure est nommée groupe de Galois de l'équation. Lorsque l'invariant n'est pas respecté par les conditions du problème, toute proposition de solution doit être rejetée !

Des théorèmes d'impossibilité existent aussi dans un autre domaine très exploité par les mathématiques récréatives : la construction de figures géométriques,

où les seuls outils autorisés sont une règle non graduée et un compas. À partir d'un ensemble de points, on construit des intersections de droites ou de cercles.

Par exemple, grâce à ces deux instruments, un segment de droite peut être divisé en un nombre quelconque de parties égales, et un angle peut être divisé en deux angles égaux (puis en 4, puis en 2^n angles égaux lorsqu'on répète n fois la bisection). On peut aussi dessiner des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10 ou 12 côtés. Ces résultats étaient connus à l'époque d'Euclide (-450 ; -380). Pendant les deux millénaires qui ont suivi, de nombreux mathématiciens ont tenté de résoudre trois problèmes apparemment simples avec des méthodes analogues : (1) Peut-on construire un cube de volume double de celui d'un cube donné ? (2) Peut-on diviser un angle en trois angles égaux ? (3) Peut-on construire un carré dont la surface est égale à celle d'un cercle initial ?

On sait aujourd'hui pourquoi les mathématiciens ont eu tant de déboires avec ces questions : elles sont impossibles à résoudre à la règle et au compas !

Rappelons que nous cherchons des solutions exactes, non des approximations. De plus, nous nous imposons de n'utiliser que la règle non graduée et le compas. Avec une règle graduée, la trisection d'un angle est facile (voir la figure 1).

Quel est l'invariant dans les constructions à la règle et au compas ? Si l'on munit le plan d'un repère, chacune de ces constructions se décrit par des calculs sur les coordonnées des points : à chaque étape de la construction, les coordonnées des nouveaux points se déduisent de celles des points précédents par des équations

algébriques de degré un ou deux (l'équation d'une droite est de degré un ; celle d'un cercle, de degré deux). Ainsi, le «degré» de tout point de la construction – celui de l'équation de plus bas degré dont il est une solution – est égal à une puissance de deux. Muni de cet invariant, nous pouvons régler le sort des trois précédents problèmes.

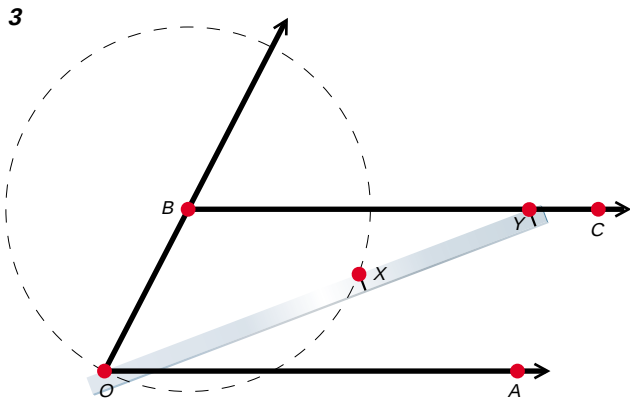
La duplication du cube consiste à résoudre l'équation du troisième degré : $x^3 - 2 = 0$. On ne peut donc pas dupliquer un cube avec une règle et un compas, car trois n'est pas une puissance de deux (dans l'ensemble des entiers naturels).

La trisection d'un angle est également impossible, car elle équivaut à la résolution d'une équation du troisième degré, déduite de formules trigonométriques, dont $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Enfin, la quadrature du cercle correspond à la recherche de solutions d'une équation du deuxième degré, à coefficients entiers non nuls, dont π est une solution. Or, le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann (1852-1939) a prouvé que π n'est pas solution d'une telle équation et, plus généralement, n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers, quel que soit son degré (π est transcendant).

Chercher à résoudre ces trois problèmes à la règle et au compas, c'est donc du temps perdu. Cependant, un théorème d'impossibilité ne suffit pas à décourager certains amateurs. Un ouvrage dû à Underwood Dudley (*The Trisectors*, 1994, éditions de l'Association mathématiques des États-Unis), réunit nombre de telles tentatives. Cependant, j'insiste : la trisection d'un angle, la duplication d'un cube et la quadrature du cercle à la règle et au compas sont impossibles ; tout comme chercher une puissance entière de deux (dans l'ensemble des entiers naturels) qui soit égale à 3.

De ce fait, je ne répondrai à aucun courrier au sujet de cet article : envoyez plutôt vos lettres éventuelles à U. Dudley !





O.M.F.

Grandeur et décadence des arbres

ROLAND LEHOUCQ

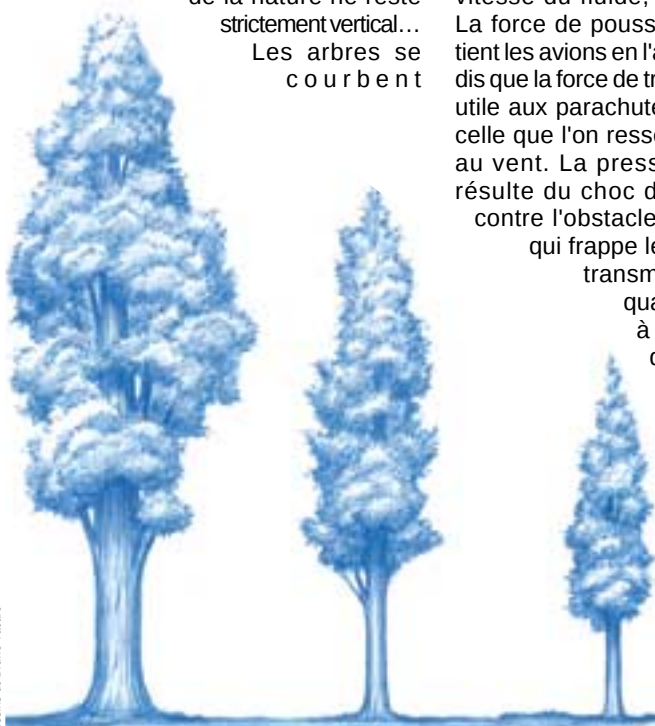
Le spectacle des forêts dévastées par la récente tempête interpelle le physicien : comment tant d'arbres ont-ils pu être cassés ou déracinés ?

Plusieurs dizaines de millions d'arbres ont été mis à mal par les vents de tempête qui balayèrent la France les 26 et 27 décembre 1999. Nous allons examiner les mécanismes physiques qui déséquilibrent les arbres, les cassent, voire les arrachent.

Même en l'absence de vent, un arbre ne peut croître indéfiniment, car le tronc doit résister à son propre poids : la pression qui s'exerce sur une section droite du tronc doit rester inférieure à la pression d'écrasement (quelques dizaines de millions de newtons par mètre carré). Ainsi, un arbre vertical dont la densité est de 0,8 (la plupart des bois flottent) pourrait atteindre une hauteur de six kilomètres avant de s'écraser sur son propre poids.

Apparemment aucun arbre de la nature ne reste strictement vertical...

Les arbres se courbent



Dessins de Bruno Vacaro

Le diamètre d'un tronc augmente comme la puissance 3/2 de la hauteur d'un arbre : les grands arbres ont proportionnellement un tronc plus gros que les petits.

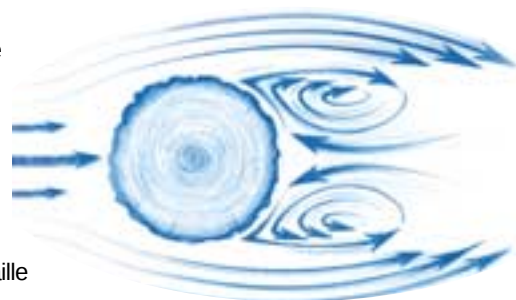
sous l'action du vent et la nécessité de résister aux forces de cisaillement limite la taille des arbres. La limite de rupture pour le cisaillement est identique à la pression d'écrasement, mais les contraintes de cisaillement sont bien supérieures aux forces d'écrasement de sorte que la limitation de taille est plus sévère.

LE VENT, SOURCE DE FORCE AÉRODYNAMIQUE

Tout corps plongé dans un fluide en mouvement subit une force dont une composante, perpendiculaire à la direction de la vitesse du fluide vue par l'obstacle, est la poussée, et l'autre, parallèle à la vitesse du fluide, est la traînée.

La force de poussée maintient les avions en l'air, tandis que la force de traînée, utile aux parachutes, est celle que l'on ressent face au vent. La pression de l'air résulte du choc des molécules d'air contre l'obstacle : chaque molécule qui frappe le tronc est déviée et transmet une partie de sa quantité de mouvement à l'arbre. Les chocs des molécules sur le tronc sont permanents et la somme de leur contribution engendre une pression dont la distribution autour du tronc crée la traînée.

Sur la surface d'un tronc d'arbre face au vent, la vitesse du fluide est quasi nulle, car l'air ne peut pénétrer dans le tronc. Dans un fluide en mou-



Lorsque le vent rencontre un tronc d'arbre, les filets d'air sont déviés. La couche d'air qui est au contact du tronc se décolle et à l'arrière du tronc existe une zone où la pression est inférieure à celle de la partie avant. De cette différence de pression résulte la force de traînée, responsable de l'arrachage.

vement, la pression est d'autant plus faible que la vitesse est grande (une grande vitesse augmente le volume d'une même masse de fluide et donc diminue la pression). Ainsi, la pression régnant sur la surface frontale du tronc est maximale, puisque la vitesse y est minimale. Comme les filets d'air sont déviés par le tronc, il se crée une dépression derrière l'arbre.

De cette asymétrie entre l'amont et l'aval résulte la traînée. Au total, la force de traînée subie par le tronc est le produit d'un coefficient de traînée (nombre sans dimension qui dépend à la fois de la direction du vent et de la forme du tronc), de la densité de l'air, de la section frontale et du carré de la vitesse du vent. En raison de cette variation avec le carré de la vitesse, la force exercée sur des arbres balayés par des vents de près de 200 kilomètres par heure est 16 fois celle exercée par un vent fort, mais assez fréquent, de 50 kilomètres par heure. On comprend aussi pourquoi les arbres dont la prise au vent (surface du tronc et surtout du feuillage) est la plus forte, tels les chênes, subissent une force supérieure. Un grand arbre attire-t-il le vent, comme le prétend un proverbe chinois ?

*Les vents me sont
moins qu'à vous redoutables.
Je plie, et ne romps pas.*