

2. LES ABUS DANS LES EXPOSÉS MATHÉMATIQUES...

Les raccourcis et omissions pratiqués lors d'exposés sont bien pires que ceux qu'on trouve dans les textes écrits. Des recensions humoristiques de ces abus ont plusieurs fois été proposées. En voici une, largement inspirée par celle de la revue *Plot* (APMEP Orléans-Tour, n° 86).

- Démonstration par l'évidence : «La démonstration est triviale»; «Immédiat à partir des définitions»; «On obtient sans peine que...»; «On voit que...»
- Démonstration par la confiance : «Vous n'avez qu'à essayer, vous verrez, ça marche». Variante : «Je l'ai démontré hier chez moi, aucune difficulté.»
- Démonstration par consensus : «Tous ceux qui sont d'accord lèvent la main». Variante encore plus efficace : «Tous ceux qui ne sont pas d'accord lèvent la main.»
- Démonstration par commodité dénommée «nos désirs sont des réalités» : «Ce serait si beau si c'était vrai, donc...» (Redoutablement dangereuse.)
- Démonstration par nécessité : «Ça doit être vrai, sinon toutes les mathématiques s'effondreraient.» Variante : «Le cas contraire contredirait un résultat bien connu qui ne peut pas être faux.» (Peu de travail est nécessaire pour en tirer une bonne vieille preuve par l'absurde.)
- Démonstration par plausibilité : «Ça a l'air bon, donc ça doit être vrai.» (Très utilisé pour évaluer le résultat d'un long calcul ; ne pas en abuser.)
- Démonstration par intimidation : «Ne soyez pas stupide! Bien sûr que c'est vrai.» Variantes du débutant : «Même un débutant sait ça»; «Vous l'avez vu en sixième.» Variante du devoir pour demain : «Ceux qui en doutent feront la démonstration pour demain sur une feuille qu'ils me rendront.» Variante du tableau : «Si quelqu'un a des doutes, il passe au tableau le démontrer.»
- Démonstration par manque de temps : «Il ne me reste pas assez de temps, vous ferez la démonstration vous-même.»
- Démonstration par complexité : «La démonstration est trop compliquée pour être donnée ici.» Variantes : «Je ne peux pas vous le faire, car ça fait partie du programme de l'année prochaine.» «J'ai fait le calcul en 1985, c'est assez pénible, je n'ai pas envie de le refaire.»
- Démonstration par accident : «Tiens, tiens, qu'avons-nous



là...» (En fait, tout était calculé par avance pour obtenir le résultat prétendument inattendu.)

- Démonstration par la définition dite méthode du postulat d'Euclide : «On le définit comme vrai.» (En abuser risque de diminuer l'intérêt de votre cours.)
- Démonstration par la tautologie : «C'est vrai, parce que c'est vrai.» (Risque de vous faire perdre du crédit, mieux vaut utiliser une des autres méthodes.)
- Démonstration par référence : «Comme c'est établi à la page 289 du ...» (Là encore, si vous en abusez, vous viderez votre cours de sa substance.)
- Démonstration par perte de référence : «Je sais que j'ai vu la démonstration quelque part.» (Même si c'est du bluff, préférez la méthode précédente.)
- Démonstration par manque d'intérêt : «Y a-t-il quelqu'un qui souhaite vraiment voir la démonstration?» Variante en combinant avec la démonstration par complexité : «La démonstration est longue et pénible. Est-ce que je la fais?» Variante dite du calcul merdique : «En général, quand je me lance dans ce calcul, je me plante. On y va?»
- Démonstration par obstination : «Vous pouvez croire ce que vous voulez, moi je vous dis que c'est vrai.» Variante du contre-exemple : «Trouvez-moi un contre-exemple, en attendant je considère que c'est vrai.» (Contraire à la déontologie la charge de la preuve ne serait pas à celui qui affirme.)
- Démonstration par analogie : «C'est la même chose que...»; «Il suffit de s'inspirer de...» «On procède comme pour...» (Moyen efficace d'obtenir des résultats faux : le procédé a coûté cher à de nombreux mathématiciens.)
- Démonstration par autorité : «Borsnuch l'a dit.» Variante dite de l'ascenseur : «J'ai rencontré Borsnuch dans l'ascenseur, et il est d'accord.»
- Démonstration par symbolisme excessif : « $\forall a > 0 \exists b > a$ $F(-A(a)) > 0 \wedge B(b)$ fi ...» Variante dite du renvoi multiple : «On conclut en combinant les lemmes 1, 3, 8 et 15 avec le théorème 12, puis en utilisant les propositions 7, 9 et 21.»
- Démonstration par appel à l'opinion publique : «Si c'était vrai ça se saurait, donc c'est faux...» (Contrairement aux apparences, ce procédé marche bien, car les résultats simples qui n'ont pas été démontrés sont généralement faux.)



J.-M. Thiriet

3. LE VIDE ET LES ENTIERS DE VON NEUMANN

Un exemple remarquable de situation où un formalisme élégant conduit à des notations impraticables si on ne les accompagne pas de notations raccourcies est celui des entiers de von Neumann, qui permettent en théorie des ensembles de construire les nombres à partir de l'ensemble vide. Ceux-ci sont définis en posant $0 = \{\}$ (l'ensemble vide), $n + 1 = n \cup \{n\}$, ce qui donne :

$$0 = \{\}$$
$$1 = \{\{\}\}$$
$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$3 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$
$$4 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}$$
$$5 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$
$$6 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$$
$$7 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$$
[illegible] $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$$

Imagine-t-on combien il serait pénible d'écrire les tables de multiplication dans

ce formalisme!

de place, il note a^7 à la place de $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$, ou $\sin^{(5)}(x)$ à la place de $\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))$; les parenthèses autour du 5 évitent la confusion entre $\sin^{(5)}(x)$ et $\sin^5(x)$.

Si seules de telles abréviations étaient utilisées, il serait facile de traduire une preuve humaine en preuve formelle (et donc de la vérifier mécaniquement). On demanderait à l'ordinateur de remplacer systématiquement chaque notation abrégée par sa version complète et, même si cette pratique allonge le texte, ce ne serait pas une gêne sérieuse pour l'ordinateur chargé de le contrôler.

LES RACCOURCIS ET LES ABRÉVIATIONS

Malheureusement la plupart des abréviations sont ambiguës, et seul le contexte permet d'en déterminer la signification. La notation dx , par exemple, peut représenter le produit de la variable d par la variable x , ou bien la différentielle de x utilisée en calcul intégral. Le mathématicien Littlewood cite l'anecdote où un professeur qui écrivait le polynôme $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ commentait la formule en disant : « e n'est pas nécessairement, mais peut l'être, la base des logarithmes naturels.» Le signe + désigne l'addition entre entiers ou celle entre matrices ou toutes sortes d'autres opérations (il n'est pas rare que, dans un même texte mathématique, plusieurs signes + soient utilisés, chacun se référant à un concept différent). La notation i , selon le texte, désignera un entier naturel, ou le nombre complexe dont le carré vaut -1 , ou autre chose encore.

On trouve aussi fréquemment des indications qui introduisent une ambiguïté : «Le paramètre k sera fixé dans le reste du paragraphe, et à la place de $f_k(x)$ nous écrirons $f(x)$.» Les textes mathé-

matiques sont remplis de ces raccourcis qui rendent difficile la traduction dans un langage formel. Les mathématiciens en sont conscients, comme cette citation de Nicolas Bourbaki (*Algèbre linéaire*, Chapitre II, p. 53) l'atteste : «La notation $u \otimes v$ pourra donc prêter à confusion, et il sera nécessaire que le contexte indique s'il s'agit d'un produit tensoriel ou d'une application linéaire.» Mille autres exemples pourraient être donnés.

PARTOUT DES MANQUES

Toutes ces abréviations, après un travail attentif et minutieux, pourraient être traquées et supprimées du texte d'une démonstration, alors qu'en revanche les abréviations dans la structure même des démonstrations sont bien plus graves. Les textes mathématiques en sont pour-tant truffés.

On comprend ce que signifie «le lecteur vérifiera sans peine que le chiffre des unités de 2^{100} est 6» ou «quand on développe $(x + 4x^5)^{12}$, le coefficient de x^{20} est 1056» ; en prenant une feuille de papier, le lecteur (supposé patient) s'assurera de la justesse de ce qui est affirmé, et le bout de démonstration qui manque – un calcul – sera ainsi reconstitué.

Parfois le calcul qui permettrait la vérification est impossible à faire sans l'utilisation d'ordinateurs munis de programmes particuliers. Imaginez ce que vous devriez faire pour vous assurer de l'affirmation «il y a 9,98 % de '7' parmi le premier million de décimales du nombre π » (ce qui est un énoncé vrai qu'on trouve dans certains ouvrages). On doit faire confiance à l'auteur qui affirme cela, ou travailler des heures, voire des jours, pour le vérifier.

Lorsqu'il ne s'agit que de calculs, combler le trou présent dans la preuve humaine ne semble pas totalement insurmontable.

En revanche, comment ne pas être inquiet quand le mathématicien, après avoir donné la démonstration du théorème dans le cas b positif, écrit : «le cas b négatif se traite facilement» ou «est analogue»? Va-t-on y arriver? Comment ne pas devenir franchement anxieux quand, dans le texte d'une démonstration, on découvre le laconique et pourtant très fréquent «Laissé en exercice au lecteur»?

Voici quelques exemples de ce type, tirés du livre d'*Algèbre linéaire* du traité Bourbaki. D'abord le classique : «On vérifie facilement que...» (chapitre I, p. 107). Une telle phrase ne semble pourtant pas pouvoir guider le lecteur. Pas plus d'ailleurs que celle-ci qui, si vous rencontrez un obstacle dans la démonstration omise, risque de vous faire désespérer de vous-même : «La démonstration est encore plus simple pour...» (Chapitre II, p. 85).

L'inévitable «on voit que...» fait bien sûr partie de l'arsenal démonstratif du traité (Chapitre III, p. 158). Lorsque des précisions sont données, elles ne sont pas nécessairement parlantes, et l'on n'est pas sûr certain de pouvoir s'en sortir avec celles, cryptiques, de la démonstration de la proposition 3 du Chapitre II, p. 39, qui se termine par : «La conclusion résulte donc de la déf. 1 et de II, p. 10, prop. 5(ii).» Plus délicate encore est l'étonnante démonstration en une ligne d'un énoncé qui en occupe quatre : «Cela résulte de E, III, p. 29, prop.12, et E.,III, p. 42, cor.1» (Chapitre III, p. 87).

ON PEUT MÊME OMETTRE LES THÉORÈMES!

Les non-mathématiciens seront étonnés, mais les raccourcis, même dans les meilleurs traités, peuvent s'étendre au-delà des démonstrations. Ainsi, parfois, les définitions et les énoncés eux-mêmes sont omis. Toujours dans le traité de N. Bourbaki, on trouvera l'admirable : «Nous laissons au lecteur le soin de formuler les définitions et remarques analogues pour les systèmes d'équations linéaires à gauche» (Chapitre II, p. 146), et aussi : «On laisse au lecteur le soin de définir un système projectif d'anneaux... et de vérifier que...» (Chapitre II, p. 146). Pourquoi ne pas confier au lecteur le soin d'écrire le chapitre suivant tout seul ?

Ces omissions ne sont pas sans danger, et beaucoup de mathématiciens vous diront que, même si elles paraissent inévitables, elles restent périlleuses. Il est fréquent en effet que des erreurs se produisent dans les textes mathématiques, précisément en ces endroits incomplètement détaillés par un mathématicien pressé et sincèrement persuadé que la démonstration est possible à partir des indications succinctes qu'il propose à titre d'argument.

Ces facilités autorisées par les «lâchés au lecteur», et autres «à titre d'exemple, démontrons le cas numéro 5», sont dangereuses, car tous ceux qui écrivent des textes mathématiques savent que bien souvent ils n'ont pas détaillé pour eux-mêmes sur une feuille à part ces parties manquantes qu'ils suggèrent au lecteur de reconstituer seuls. Ils y ont réfléchi, ils sont intimement convaincus que «ça passe», mais est-ce suffisant ? Pourtant comment pourrait-on s'interdire ces facilités, puisque Bourbaki lui-même reconnaît que, dans les textes mathématiques, «l'emploi des ressources de la rhétorique est nécessaire» (Bourbaki, Introduction, p. 7) ?

Encouragé par le plaisir de l'économie et l'élégance de la concision, soucieux aussi de ne pas passer pour un imbécile en donnant des détails sur un passage vraiment facile, tout mathématicien écourté ses démonstrations, et cela d'autant plus qu'il s'adresse à des mathématiciens de haut niveau. Assez étrangement donc, les risques sont maximaux dans les textes présentant des résultats de recherches. Dans un cours destiné à des étudiants, le mathématicien essaiera de contenir son penchant pour les brèves esquisses de preuves, sans toutefois résister à la tentation d'un «le cas 1 est trivial» et surtout au coup de l'exercice. Ces laconiques pirouettes font le désespoir des étudiants moyens, incapables de boucher ces trous prétendument aisés, et donnent un sentiment de culpabilité au lecteur trop pressé qui se dispense des travaux suggérés, dont pourtant, dans l'introduction, l'auteur a indiqué, avec perfidie, qu'il était important de les traiter soigneusement pour s'assurer de la bonne assimilation du cours.

UN TROU FAMEUX

Un des plus fameux trous dans une preuve mathématique provient d'un de ces raccourcis imprudents. On sait que, le mercredi 23 juin 1993, à l'issue de trois jours de conférence Andrew Wiles concluait en public une présentation de la preuve du Grand Théorème de Fermat (qu'il démontrait comme cas particulier de résultats plus généraux). Personne sur le coup ne put vérifier la démonstration bien trop complexe, dont seules les grandes lignes avaient été expliquées oralement. La démonstration, d'environ deux cents pages, fut soumise à un comité d'experts composé de six spécialistes qui travaillèrent des mois durant. De nombreuses fois, ils durent interroger A. Wiles pour obtenir des explications leur permettant de saisir le sens de ce qui était écrit. Face à une preuve formelle, les experts mathématiciens n'au-

