

(par exemple, la non-dénombrabilité des nombres réels ou l'impossibilité de la quadrature du cercle) ne doivent pas être pris plus au sérieux que les tentatives de réaliser un mouvement perpétuel qui obsède les inventeurs du dimanche. Oui, en mathématiques aujourd'hui, l'unanimité existe concernant la justesse, et aucune controverse véritable n'a plus cours.

PROGRÈS DANS LA FORMALISATION

Bien que peu de mathématiciens se soucient au quotidien de la formalisation complète de leurs preuves, les progrès faits sur ces questions ne sont pourtant pas négligeables.

Poincaré se moquait du fait que, pour écrire 1 dans le formalisme du système des *Principia* de Russell et Whitehead (le premier système formel complet permettant l'écriture d'un volume important de mathématiques), il fallait un grand nombre de symboles, ce qu'il trouvait absurde. Passionné par le traité de *Mathématiques* de N. Bourbaki, dont les premières pages sont constituées par la description détaillée du système formel sur lequel le traité s'appuie ensuite, un ami s'était amusé à écrire explicitement la suite des symboles représentant l'ensemble des parties d'un ensemble sans utiliser aucune abréviation. Le tout, une fois transcrit sur un rouleau de papier, avait une longueur de trois mètres.

Les systèmes formels d'aujourd'hui ne présentent pas tous ces défauts ridicules, car, dans le but de les manipuler, on a conçu avec des ordinateurs des notations plus efficaces. On a d'ailleurs, grâce à cela, pu écrire des preuves de résultats assez avancés de mathématiques. Les techniques mises au point à cette occasion servent aussi à prouver la validité de programmes informatiques, et c'est là tout un domaine de recherche actif où la logique vient en aide à l'informatique.

LES INFINIMENT PETITS FORMALISÉS

D'autres progrès logiques ont étonné les mathématiciens. On désespérait de justifier par un formalisme précis les méthodes de calcul qui fonctionnent pourtant bien et qui se fondent sur la manipulation des infiniment petits. L'analyse des XVIII^e et XIX^e siècles avait d'ailleurs débarrassé les mathématiques de ces troubles infinis qui paraissaient indomptables. Le système formel de l'Analyse non standard de A. Robinson, dans les années 1960, a réussi l'exploit de proposer un usage réglé des infiniment petits. Celui qui souhaite

profiter de son intuition de physicien pour calculer dispose maintenant d'un formalisme qui pourra valider ses calculs, jusque-là considérés comme non rigoureux. Les résultats logiques connus concernant l'Analyse non standard sont remarquables, et l'un d'eux indique que toute propriété ne mentionnant pas les infiniment petits démontrés dans le cadre formalisé de l'Analyse non standard peut aussi être démontrée sans utiliser les infiniment petits dans le formalisme ensembliste usuel. Ce résultat justifie *a posteriori* le choix fait historiquement par les mathématiciens de se passer des infiniment petits, mais, le connaissant, il permet aujourd'hui à celui qui trouve commode de les utiliser de laisser libre cours à son goût.

PREUVES HEURISTIQUES ET «PRESQUE PREUVES»

À côté de la notion de preuve formelle qui sert à mettre tout le monde d'accord pour savoir ce qui est vraiment démontré, il existe une multitude de preuves non formelles et résolument non formalisables (du moins avec les systèmes connus aujourd'hui) qui fournissent des presque-certitudes. Ces preuves heuristiques, c'est ainsi qu'on les appelle, sont étranges, car quand on les suit, elles persuadent de la vérité des propositions visées. Pourtant, comme pour les preuves démontrées autrefois par les infiniment petits, les mathématiciens les refusent. Bien qu'elles «fassent voir que c'est vrai», tant qu'on ne disposera pas de bons systèmes formels (analogues à celui de A. Robinson pour l'Analyse non standard), il sera impossible de les transformer en preuves formelles, ce qui signifie tout simplement qu'aux yeux des mathématiciens elles ne démontrent rien!

Un exemple de preuve heuristique difficile à transformer en preuve formelle est indiqué sur la figure 5.

PRESQUE, MAIS PAS VRAIMENT

Un autre exemple de résultat presque prouvé est celui qui concerne les nombres parfaits impairs, résultat qui résiste à une démonstration depuis 20 siècles. Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs différents de lui-même. Le nombre 6 qui est divisible par 1, 2, 3 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$. C'est le plus petit nombre parfait, et les trois suivants sont 28, 496, 8128. Existe-t-il des nombres parfaits impairs? La question est posée depuis plus de deux millénaires. Personne n'en a jamais trouvé, mais personne n'a

démontré qu'il n'en existait pas. Malgré cette absence de démonstration, tout le monde est persuadé aujourd'hui qu'il n'existe pas de nombre parfait impair, car on a démontré (rigoureusement) une grande quantité de propriétés que devrait posséder un tel nombre parfait impair N , s'il en existe.

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, possède au moins 8 facteurs premiers différents et, s'il est multiple de 3, il doit en posséder au moins 11 (P. Hagis, 1983).

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, est tel que la somme des inverses de ses facteurs premiers est située entre 0,596 et 0,694 (D. Suryanarayan, P. Hagis, 1970).

– La plus grande puissance d'un nombre premier qui divise un nombre parfait impair N , s'il en existe, est plus grande que 10^{20} (G. L. Cohen, 1988).

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, est plus grand que 10^{300} (R. Brent, G.L. Cohen, H. te Riele, 1989).

– Un des facteurs premiers d'un nombre parfait impair N , s'il en existe, dépasse 10^6 (P. Hagis, G.L. Cohen, 1998), un autre dépasse 10^4 , et un autre encore dépasse 10^3 (1999, D. Iannucci).

Remarquez que certains résultats ont été démontrés il y a seulement quelques mois. Il semble qu'aucun nombre ne puisse vérifier toutes ces conditions à la fois (mais ce n'est pas rigoureusement établi), et donc on croit plus fortement que jamais qu'il n'existe aucun nombre parfait impair. Ce sentiment et l'idée qu'on est arrivé à quelques millimètres du résultat final ne constituent pas une preuve mathématique formalisable, et donc, comme c'est toujours le cas, aucune controverse n'a cours sur ce point : aussi fort que soit notre sentiment qu'on a qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs, personne ne prétend que c'est prouvé.

Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Paris.

Imre LAKATOS, *Preuves et réfutations*, Éditions Hermann, Paris 1984.

Roger NELSEN, *Proofs Without Words : Exercices in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993, ISBN 0-88385-700-6.

J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987.

Jean-Michel SALANSKIS, *Le constructivisme non standard*, Presse universitaires du Septentrion, ISBN 2-85939-604-7, 1999. (À propos de l'Analyse non standard).

Simon SINGH, *Le dernier théorème de Fermat*, Éditions J.-C. Lattès, 1998.

Astronomie

La vie sur Mars

Charles Frankel. Éditions du Seuil, 1999 (312 pages, 135 francs).

Dès l'Antiquité, l'homme hésite : la Terre est-elle immuable, au centre de l'Univers, entourée d'«ornements célestes», ou bien est-elle en orbite autour du Soleil, au même titre que les autres planètes ? L'Église catholique cautionne la première hypothèse, et tout dissident à la doctrine officielle de la création termine dans les flammes de l'Inquisition. Ainsi périt Giordano Bruno (1548-1600), prêtre italien, hérésiarque, qui s'est emparé des idées héliocentriques de Nicolas Copernic (1473-1543) et qui a proclamé que les différentes planètes pouvaient abriter la vie ; les étoiles sont autant de soleils, avec leurs planètes, leurs races, leurs cultures et leurs religions. Bernard de Fontenelle (1657-1757), dans ses *Entretiens sur la pluralité des mondes*, conçoit également des systèmes stellaires peuplés d'habitants, de plantes, d'animaux divers.

L'héliocentrisme l'emporte, alors que les lunettes astronomiques montrent les astres. En 1659, Christiaan Huygens (1629-1695) propose les premiers croquis de Mars, planète plus éloignée du Soleil que la Terre : il imagine un cli-

mat plus froid que le nôtre, et des habitants adaptés à cette rigueur.

Au XIX^e siècle, les spéculations sur la pluralité des mondes continuent, et Camille Flammarion (1842-1925) propose une exploration systématique des planètes, afin d'y rechercher la vie. Dans ce contexte, il n'est pas étonnant que Giovanni Schiaparelli (1835-1910), puis Percival Lowell (1855-1916) décrivent des chenaux ou des canaux sur Mars : une race extraterrestre serait-elle obligée de lutter contre la sécheresse pour conserver sa végétation et assurer son agriculture ?

Au XX^e siècle, les télescopes contredisent les intuitions de Lowell : les canaux n'étaient que des artefacts. En revanche, on observe des changements polaires saisonniers : une voile humide se déplacerait-il vers l'équateur, autorisant la reprise périodique de la végétation martienne ? La recherche d'une atmosphère devient prioritaire, mais les premiers résultats, décevants, font reculer l'hypothèse de la vie sur Mars.

Après beaucoup d'essais soviétiques et américains, c'est en 1965 que la sonde *Mariner 4* fournit enfin des renseignements partiels et peu encourageants sur la planète rouge : elle est deux fois plus petite que la Terre, et son atmosphère a une pression 100 fois inférieure à celle qui nous fait vivre. Les sondes suivantes donnent une couverture photographique plus complète, et la géologie martienne se révèle pleine de surprises. Tandis que les calottes glaciaires feuilletées recouvrent les pôles, l'hémisphère Sud se compose de vieux

terrains cratérisés, et l'hémisphère Nord de volcans géants, élevés ou plats qui reposent sur des plaines. Outre ces formations, on découvre un canyon long et profond, qui serait la preuve d'un effondrement du sol lors de la fonte de glaces souterraines. De plus, des formations typiques de bassins hydrographiques sont observables dans les deux hémisphères.

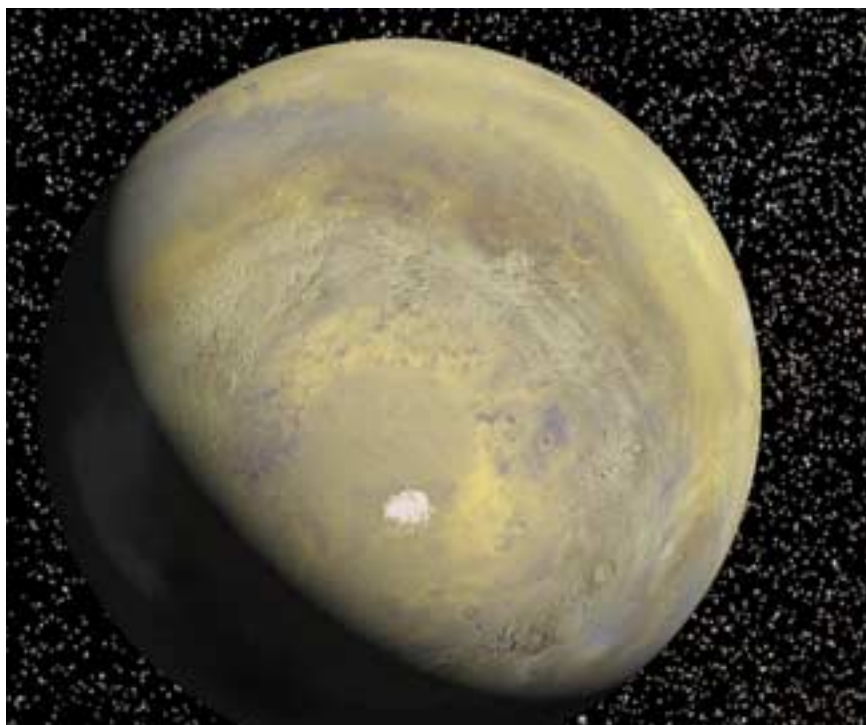
La température oscille entre -15 °C le jour et -80 °C la nuit, et l'atmosphère ténue comprend du dioxyde de carbone (95 pour cent), de l'azote (2,7 pour cent), de l'argon (1,6 pour cent), et des traces d'oxygène, de monoxyde de carbone et d'eau. Cependant, dans un passé lointain, des variations climatiques ont existé, et il est raisonnable d'envisager une atmosphère plus chaude et plus dense, favorable à la vie.

Ainsi la recherche de la vie sur Mars ne repose plus sur l'existence d'intelligences extraterrestres avec lesquelles on chercherait à communiquer, mais sur la compréhension d'un passé géologique, climatique et chimique qui pourrait avoir favorisé l'apparition de la vie. Les recherches sur les milieux extrêmes terrestres, telles les sources hydrothermales ou les glaces de l'Antarctique, nous autorisent à étudier, sur d'autres planètes que la Terre, des mécanismes prébiotiques, puis biotiques.

C'est une météorite martienne découverte le 27 décembre 1984 en Antarctique, ALH 84001, qui relance un débat passionné et justifie de nouveaux espoirs. On connaît bien l'histoire de cette pierre de deux kilogrammes : elle est née avec la planète dans le magma en fusion, il y a 4,5 milliards d'années, à plus de 100 mètres de profondeur, a subi des chocs qui l'ont zébrée il y a quatre milliards d'années, des fluides chauds ont circulé dans les stries, déposant des carbonates, il y a 3,6 milliards d'années. C'est à cette époque que la vie aurait pu apparaître. Puis la planète a perdu son atmosphère, la pierre est restée congelée durant trois milliards d'années, avant d'être éjectée dans l'espace ; après un séjour de quelque 15 millions d'années, elle serait arrivée sur la Terre il y a 13 000 ans. L'analyse de la roche a montré des particularités surprenantes : des globules de carbonates avec, en surface, des larmes de magnétite et des microformes qui font penser à de très petites bactéries.

Ces caractéristiques, sans constituer des preuves absolues, permettraient d'envisager une activité biologique. Les indices discutés depuis des années incitent partisans et adversaires de la vie sur Mars à considérer l'exploration de la planète comme essentielle.

En 1997, le remarquable petit robot *Sojourner* a roulé sur le sol martien et



La planète Mars.

exploré une plaine d'inondation. Sur le site, il a montré des rochers qui avaient été violemment charriés il y a un milliard d'années. Toujours pas de trace de vie à la surface de la planète... mais en profondeur ?

À la recherche d'un site approprié pour la recherche d'une vie profonde, on envisage des vols habités, qui déposeraient sur la planète rouge tout le matériel nécessaire à ces missions humaines de longue durée. Outre la recherche de la vie, les prospections concerneraient les ressources minérales : la planète est jugée colonisable, le sol fertile. On envisage d'enrichir l'atmosphère et de la réchauffer («terraformage»). Quand l'effet de serre sera enclenché, la température et la pression augmentées, les calottes polaires fourniront de l'eau, et du dioxyde de carbone s'échappera du sol. On parle d'un millénaire pour que l'homme vive sur Mars...

Ainsi, de la recherche de nos origines à l'exploration d'autres planètes, les questions essentielles demeurent, mais la science, faite de propositions audacieuses et d'expérimentations novatrices, nourrit le rêve. Le livre de Charles Frankel est une brillante réussite. Vulgarisation scientifique bien maîtrisée, documentation actualisée, objectivité : il ne bascule jamais dans le sensationnel. De cette histoire passionnante, le lecteur éprouve le besoin impérieux de connaître la suite.

Michèle FEBVRE

Biologie

La sculpture du vivant

Jean-Claude Ameisen. Éditions du Seuil, 1999 (340 pages, 145 francs).

La mort cellulaire programmée, aussi nommée apoptose, est aujourd'hui l'un des phénomènes les plus étudiés par la recherche biomédicale : plus de 10 000 articles concernant l'apoptose ont été publiés dans des revues scientifiques, en 1999 seulement.

La mort des cellules était connue, depuis le ^{xix}^e siècle, comme un processus de sculpture du corps au cours du développement embryonnaire, mais la recherche biologique du ^{xx}^e siècle s'est concentrée, pendant plusieurs décennies, sur la multiplication et la différenciation des cellules, négligeant la mort de ces dernières comme phénomène structurant. C'est seulement en 1972 qu'a été redécouverte la mort cellulaire et que le mot

«apoptose» est apparu ; à partir de cette date, la biologie, la science du vivant, se penche sur les mécanismes moléculaires de la mort des cellules au cours des processus physiologiques (reproduction, développement, homéostasie de l'organisme adulte, vieillissement) et décrit les nombreuses situations où des cellules superflues, âgées, endommagées ou placées en dehors de leur contexte habituel, disparaissent par apoptose.

On doit évidemment vaincre une petite résistance intuitive pour concevoir que, dans notre organisme, des millions de cellules meurent chaque seconde, que cette mort massive sculpte inlassablement notre corps, que son bon déroulement, sans excès et sans oubli, est même indispensable à notre survie. Concept plus surprenant encore, les cellules ne sont pas assassinées par leurs voisines, mais contribuent activement à leur mort : elles s'autodétruisent ou, pour utiliser une expression anthropomorphe, «se suicident».

Dans cet ouvrage qui porte le sous-titre «Le suicide cellulaire ou la mort créatrice», Jean-Claude Ameisen conte avec un style parfois lyrique, adapté à la dimension philosophique de la question, l'importance du suicide cellulaire pour la physiologie et la physiopathologie des organismes supérieurs. Il donne une vision intégrée des étapes qui ont contribué à l'explosion de ces champs de recherche, tout en procurant suffisamment d'informations de base pour que le livre soit lisible par un assez large public, notamment les étudiants des facultés des sciences ou de médecine. Je regrette l'absence de schémas, de graphiques et de références bibliographiques qui, du texte, permettraient de remonter à la source des informations données, mais je dois admettre que ce texte, le premier dans son genre en langue française, a le mérite de rendre concevable l'idée de la mort (et du suicide) des cellules comme partie intégrante de la vie.

L'auteur n'hésite pas à soulever les très grandes questions philosophiques et pratiques liées à l'apoptose ; il les aborde d'une manière claire, souvent à l'aide de métaphores simples. Ainsi une grande partie du livre est consacrée aux mécanismes de régulation de la mort, de sa programmation intrinsèque et extrinsèque, de la destruction enzymatique de la cellule, du ramassage des dépouilles cellulaires au sein de l'organisme, et de l'implication de la mort cellulaire dans les pathologies et dans le vieillissement.

Le livre se demande également pourquoi, pendant l'évolution, des structures vivantes ont acquis les mécanismes fins et régulés d'autodestruction qui permettent la mort des cellules, indispensables au fonctionnement des organismes pluri-



Cellule en apoptose au microscope électronique : sa membrane bourgeonne et son cytoplasme se divise en petits ballonnements.

cellulaires, les «sociétés des cellules». C'est dans les organismes pluricellulaires que l'absence d'apoptose, pendant l'embryogenèse, peut engendrer des malformations majeures ou, plus tard, contribuer à la prolifération incontrôlée, à l'immortalisation des cellules qui, normalement, s'élimineraient (cas du cancer).

Comment le vivant a-t-il inventé la mort en son sein ? La réponse est complexe, puisqu'elle demande une réflexion inductive, non vérifiable au laboratoire (l'évolution ne se récapitule pas dans un tube à essai) : la démarche doit être plus philosophique que scientifique («scientifique» au sens de Karl Popper, qui revendique la possibilité d'invalidation expérimentale). Néanmoins, J.-C. Ameisen a le mérite d'ébaucher un scénario qui rend plausible l'invention de la mort. Il part d'un constat : même si, intuitivement, l'apoptose n'a qu'un sens dans les organismes pluricellulaires (où le sacrifice «altruiste» de certaines cellules s'effectue au profit de la collectivité) et n'a pas d'utilité dans les organismes unicellulaires (qui, *a priori*, n'ont pas besoin de comportements altruistes), il apparaît que certains êtres unicellulaires eucaryotes, lorsqu'ils meurent, par exemple dans des conditions de culture défavorables, présentent des altérations biochimiques et morphologiques qui ressemblent à l'apoptose des cellules humaines.

Le programme officiel de la mort pourrait donc avoir été développé par des bactéries (dont des colonies ont parfois un comportement social, y compris la mort «altruiste») ; l'incorporation symbiotique de celles-ci, sous la forme de mitochondries, dans les cellules eucaryotes primitives unicellulaires (les précurseurs des organismes pluricellulaires) constituerait l'élément fondateur de la mort programmée, d'abord dans les eucaryotes unicellulaires, puis dans leurs dérivés pluricellulaires. L'auteur propose également une autre solution, sans exclure la première : le suicide des cellules pourrait être l'expression extrême de réactions cataboliques qui résulteraient de l'inversion de